

# 两种群随机动力系统的信息熵和动力学研究\*

谢文贤<sup>†</sup> 蔡力 岳晓乐 雷佑铭 徐伟

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2011年12月20日收到; 2012年2月14日收到修改稿)

随机种群动力学模型是研究种群间以及种群与不确定性环境间相互作用的动力学行为的数学模型. 本文从概率密度以及信息熵流、熵产生的演化角度探讨了两种群生态系统的 Itô (或 Statonovich) 意义下随机模型的动力学行为. 利用 Fokker-Planck 方程及其边界条件和信息熵定义导出信息熵流 (平均散度) 和熵产生的关系式, 并通过数值路径积分法捕捉到熵流的非线性变化趋势以及信息熵的极值点位置与概率密度的快速迁移和分岔的联系. 应用数值路径积分法计算结果表明 Itô (或 Statonovich) 意义下两种随机模型的概率密度和信息熵的极值点位置不同但演化趋势一致.

**关键词:** 概率密度, 信息熵, 生态系统, 高斯白噪声

**PACS:** 05.45.-a, 65.40.gd, 91.62.Mn, 02.50.Ey

## 1 引言

生物种群系统是典型的非线性动力系统, 而 Lotka-Volterra (LV) 模型是众多种群系统中研究最为广泛的一类<sup>[1-3]</sup>. 不可避免地, 生物种群系统会经历各种因素的不确定性波动或瞬时变化, 而白噪声、随机正弦噪声甚至随机脉冲等是很好描述这些随机现象的数学模型<sup>[4-8]</sup>. 在充分考虑捕食和被捕食者增长率的随机性<sup>[6-8]</sup>基础上, 备受关注的研究有随机时滞 LV 模型<sup>[7]</sup>, 脉冲捕食-被捕食随机模型<sup>[8]</sup>以及相应的随机平均法<sup>[9]</sup>等等. 最近, Cai 和 Lin<sup>[10]</sup>就一新随机 LV 模型从样本轨迹和概率密度的角度出发研究了噪声 (特别是随机余弦噪声) 驱动下该系统的动力学行为, 发现随机系统的概率密度在两个稳定中心来回迁移进而形成双峰态. 事实上, 探析随机环境下的生态系统概率密度随时间演化的规律对该系统实施控制和干预

将有很大帮助.

另一方面, 信息熵是系统概率密度的泛函, 借助随机动力系统的概率密度函数所遵循的 Fokker-Planck (FP) 方程来研究相应信息熵的演化规律是自 Nicolis 和 Daems<sup>[11,12]</sup>在随机动力系统中建立信息熵定义下类比热力学中熵流和熵产生的概念开始的. 之后, 在一系列典型耗散系统<sup>[13-16]</sup>、化学反应系统<sup>[17,18]</sup>, 驱动噪声类型和作用机理<sup>[19-24]</sup>等研究中得到广泛应用, 重点分析了与系统的 Lyapunov 指数或散度以及混沌等之间的联系. 但上述研究大多是考虑随机线性系统或可化为随机线性系统的信息熵演化问题, 而针对多维非线性系统讨论甚少<sup>[25]</sup>.

本文将从概率密度结合信息熵演化的角度分析随机环境下两种群非线性动力系统的动力学行为, 并阐明信息熵流以及熵产生随时间的变化趋势与概率密度的快速迁移和分岔之间的对应关系. 这将为研究随机环境下多维生态系统的统计规律性

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11101333, 11102156, 10932009), 陕西省自然科学基金 (批准号: 2011GQ1018) 和西北工业大学基础研究基金资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: wenxianxie@nwpu.edu.cn

和其预测控制问题<sup>[26]</sup> 提供更有价值的参考.

## 2 随机环境下两种群动力系统的概率密度和信息熵的计算

### 2.1 高斯白噪声驱动的两种群非线性动力系统

考虑如下两种群的非线性动力系统<sup>[10]</sup>:

$$\dot{G} = r_g G (1 - s - c_{gg} G - c_{wg} W) + r_g G \xi(t),$$

$$\dot{W} = r_w [a + W (1 - c_{gw} G - c_{ww} W)],$$

其中  $\xi(t)$  是零均值且相关函数为  $D\delta(\tau)$  的高斯白噪声, 相关函数是时间间隔  $\tau$  的 Delta 函数,  $D$  为噪声强度.  $r_g, r_w$  分别为两种植被密度  $G, W$  的增长率,  $s$  为放牧率,  $c_{wg}, c_{gw}$  为种群间竞争系数,  $c_{gg}, c_{ww}$  为种群内竞争系数,  $a$  为植被  $W$  的基数. 若分别在 Itô ( $k = 0$ ) 或 Statonovich ( $k = 1$ ) 意义理解上述方程时<sup>[27]</sup>, 可将其改写为

$$\begin{aligned} \dot{G} = & r_g G (1 - s - c_{gg} G - c_{wg} W) \\ & + k \cdot \left( \frac{1}{2} D r_g^2 G \right) + r_g G \xi(t), \end{aligned}$$

$$\dot{W} = r_w [a + W (1 - c_{gw} G - c_{ww} W)], \quad (1)$$

为了研究随机系统 (1) 概率密度及信息熵变化率的演化规律, 首先分析系统 (1) 对应确定性部分的线性稳定性. 对于确定性系统

$$\begin{aligned} \dot{G} = & r_g G (1 - s - c_{gg} G - c_{wg} W) \\ & + k \cdot \left( \frac{1}{2} D r_g^2 G \right), \end{aligned}$$

$$\dot{W} = r_w [a + W (1 - c_{gw} G - c_{ww} W)], \quad (2)$$

当  $k = 0$  时其稳定性的讨论见文献 [10], 现将  $k = 0, 1$  两种情形合并如下:

1) 若  $G = 0, W = \frac{1}{2c_{ww}} (1 + \sqrt{1 + 4ac_{ww}})$ , 该点  $\alpha(G, W)$  为渐近稳定中心;

2) 若  $G \neq 0$ , 则有

$$\left( 1 - s + \frac{1}{2} k D r_g \right) - c_{gg} G - c_{wg} W = 0,$$

可解得

$$G = \frac{(1 - s + \frac{1}{2} k D r_g) - c_{wg} W}{c_{gg}};$$

当  $\Delta > 0$  时,  $W_{\pm} = \frac{1}{2A} (B \pm \sqrt{\Delta})$ , 有两个不动点  $\beta_{\pm}(G, W_{\pm})$  分别为鞍点和渐近稳定中心;

当  $\Delta = 0$  时,  $W = \frac{B}{2A}$ , 不动点  $\beta(G, W)$  为不稳定中心; 当  $\Delta < 0$  时, 唯有  $\alpha(G, W)$ ;

式中

$$A = c_{wg} c_{gw} - c_{gg} c_{ww},$$

$$B = c_{gw} \left( 1 - s + \frac{1}{2} k D r_g \right) - c_{gg},$$

$$C = a c_{gg},$$

$$\Delta = B^2 - 4AC.$$

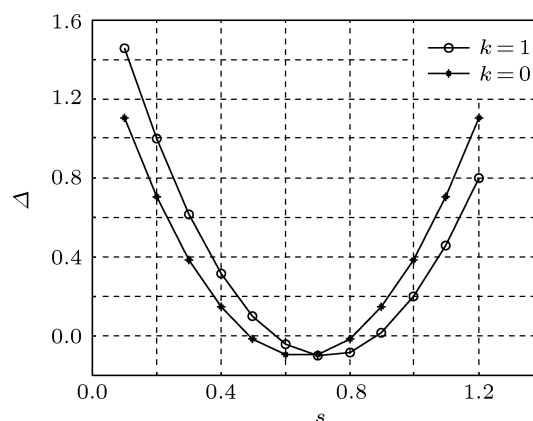


图1  $\Delta$  随参数  $s$  的变化曲线

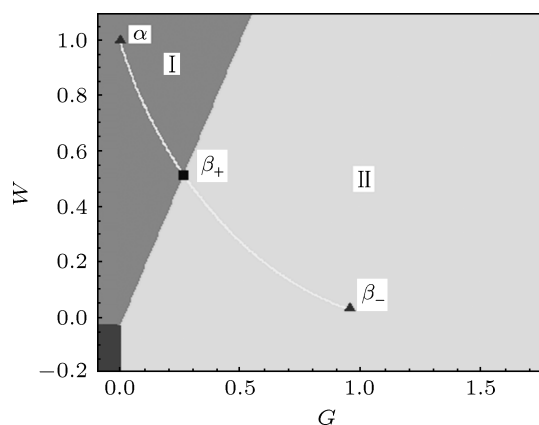


图2 确定性系统 (2) 的全局分析

图 1 给出了由  $\Delta = B^2 - 4AC$  之改变而使得系统 (2) 出现分岔现象所对应参数  $s$  的选取理论方案. 但是在实际种群系统的数值计算中  $s$  不能随意取, 因为系统 (2) 表征的是两种植被密度. 易见, 在参数取值相同时  $k = 1$  和  $k = 0$  情形下不动点位置

稍有差异. 为了直观展示  $\Delta > 0$  时系统 (2) 的吸引域分布 (以  $k = 0$  情形为例), 取

$$\begin{aligned} r_g &= 1.5, r_w = 1.0, c_{gg} = 0.7, c_{wg} = 1.0, \\ c_{gw} &= 2.0, c_{ww} = 1.03, s = 0.3, a = 0.03, \end{aligned} \quad (3)$$

进行数值计算. 图 2 表明系统 (2) 两个吸引域的分界线是一条直线, 而鞍点  $\beta_+$  点也在该直线上. 初值的选取将决定系统 (2) 解的稳定性. 据此选取初始分布用于第 3 节中相应随机系统 (1) 的概率密度及信息熵变化率的数值计算并分析其动力学行为.

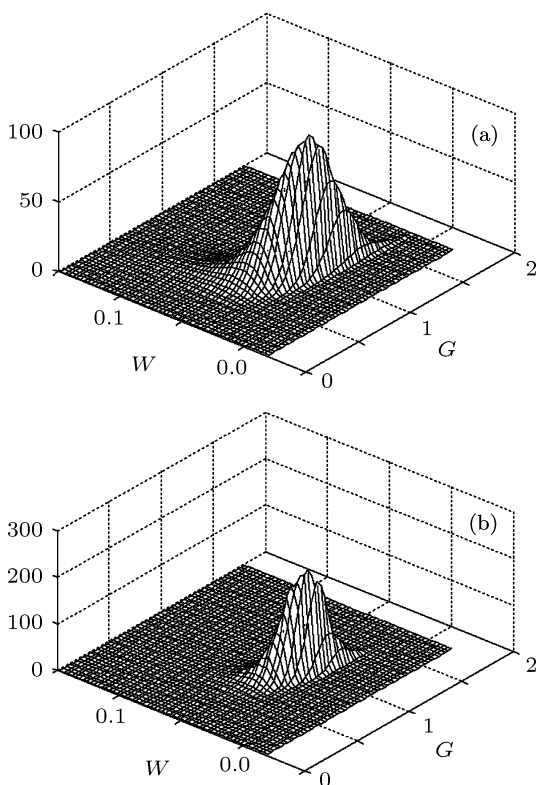


图 3 联合概率密度  $p_{GW}$  (a)  $D = 0.04$ ; (b)  $D = 0.02$

## 2.2 随机系统 (1) 的信息熵演化方程

若记

$$\begin{aligned} P &= P(g, w, t), \\ f_1(g, w) &= r_g g (1 - s + kDr_g/2 - c_{gg}g - c_{wg}w), \\ f_2(g, w) &= r_w (a + w (1 - c_{gw}g - c_{ww}w)), \\ f_3(g, w) &= Dr_g^2 g^2/2, \end{aligned} \quad (4)$$

则系统 (1) 相应的 FP 方程为

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial(f_1 P)}{\partial g} - \frac{\partial(f_2 P)}{\partial w} + \frac{\partial^2(f_3 P)}{\partial g^2}. \quad (5)$$

根据信息熵定义  $S(P) = -\iint P \ln P dg dw$ , 并利用微分法则, 推得信息熵演化的微分方程为

$$\frac{dS(P)}{dt} = -\iint \left( \frac{dP}{dt} \ln P + \frac{dP}{dt} \right) dg dw. \quad (6)$$

易知上式第二项为零, 再将 FP 方程 (5) 代入上式, 反复利用分部积分法及 FP 方程的吸收边界条件  $P(g, w, t)|_{(g,w) \in \Gamma} = 0$  ( $\Gamma$  为系统 (1) 的边界), (6) 式可逐步变为

$$\begin{aligned} \frac{dS(P)}{dt} &= \iint \left( \frac{\partial f_1}{\partial g} + \frac{\partial f_2}{\partial w} \right) P dg dw \\ &+ \iint \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial g} \cdot \frac{\partial(f_3 P)}{\partial g} dg dw. \end{aligned} \quad (7)$$

记 (7) 式的第一项和第二项分别为

$$\dot{S}_F = \iint \left( \frac{\partial f_1}{\partial g} + \frac{\partial f_2}{\partial w} \right) P dg dw, \quad (8)$$

$$\dot{S}_P = \iint \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial g} \cdot \frac{\partial(f_3 P)}{\partial g} dg dw. \quad (9)$$

信息熵流 ( $\dot{S}_F$ ) (8) 式可看成是系统 (1) 的随机散度的均值函数. 信息熵产生 ( $\dot{S}_P$ ) (9) 式是系统 (1) 的扩散项部分的贡献, 反映了系统 (1) 概率密度的扩散程度. 将  $f_1, f_2, f_3$  表达式 (4) 及各阶矩  $m_{ij} = \langle G^i W^j \rangle$  代入 (8) 式和 (9) 式可计算得到

$$\begin{aligned} \dot{S}_F &= r_g (1 - s + kDr_g/2) - (2r_g c_{gg} + r_w c_{gw}) m_{10} \\ &- (r_g c_{wg} + 2r_w c_{ww}) m_{01}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\dot{S}_P = -Dr_g^2 + \frac{Dr_g^2}{2} \iint \left( g \cdot \frac{\partial P}{\partial g} \right)^2 \cdot \frac{1}{P} dg dw. \quad (11)$$

由 (10), (11) 式可数值计算信息熵流、熵产生来观察系统 (1) 概率密度的瞬时变化规律.

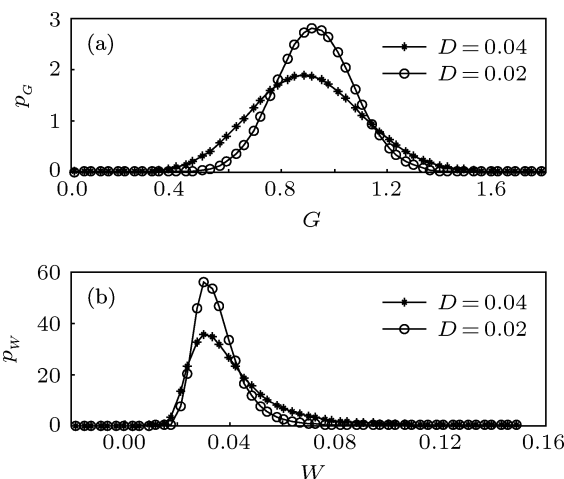


图 4  $k = 0$  时边缘概率密度 (a)  $p_G$  图; (b)  $p_W$  图

### 3 数值结果及分析

现采用文献 [25] 中数值路径积分计算系统 (1) 的概率密度及信息熵变化率. 为此先导出系统 (1) 的一、二阶矩的微分方程组

$$\begin{aligned}
 \dot{m}_{10} &= r_g m_{10} (1 - s) - r_g c_{gg} m_{20} \\
 &\quad - r_g c_{wg} m_{11} + k \left( \frac{1}{2} D r_g^2 m_{10} \right), \\
 \dot{m}_{01} &= r_w a + r_w m_{01} - r_w c_{gw} m_{11} - r_w c_{ww} m_{02}, \\
 \dot{m}_{11} &= r_g m_{11} (1 - s) - r_g c_{gg} m_{21} - r_g c_{wg} m_{12} \\
 &\quad + r_w a m_{10} + r_w m_{11} - r_w c_{gw} m_{21} \\
 &\quad - r_w c_{ww} m_{12} + k \left( \frac{1}{2} D r_g^2 m_{11} \right), \\
 \dot{m}_{20} &= 2 [r_g m_{20} (1 - s) - r_g c_{gg} m_{30} \\
 &\quad - r_g c_{wg} m_{21}] + (1 + k) D r_g^2 m_{20}, \\
 \dot{m}_{02} &= 2 [r_w a m_{01} + r_w m_{02} \\
 &\quad - r_w c_{gw} m_{12} - r_w c_{ww} m_{03}],
 \end{aligned} \tag{12}$$

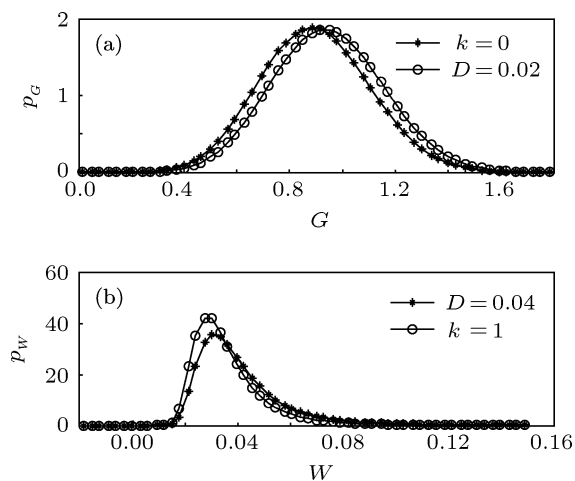


图5  $D = 0.04$  时边缘概率密度 (a)  $p_G$  图; (b)  $p_W$  图

再采用二阶累积量截断法将上述方程组 (12) 截断, 即将

$$\begin{aligned}
 m_{21} &= 2m_{10}m_{11} + m_{20}m_{01} - 2m_{10}^2 m_{01}, \\
 m_{12} &= 2m_{01}m_{11} + m_{02}m_{10} - 2m_{01}^2 m_{10}, \\
 m_{30} &= 3m_{10}m_{20} - 2m_{10}^3, \\
 m_{03} &= 3m_{01}m_{02} - 2m_{01}^3,
 \end{aligned}$$

代入 (12) 式. 所得截断后矩方程组用于数值路径积分法中转移概率密度的短时逼近及信息熵变化率 (10), (11) 式的计算, 详参见文献 [25].

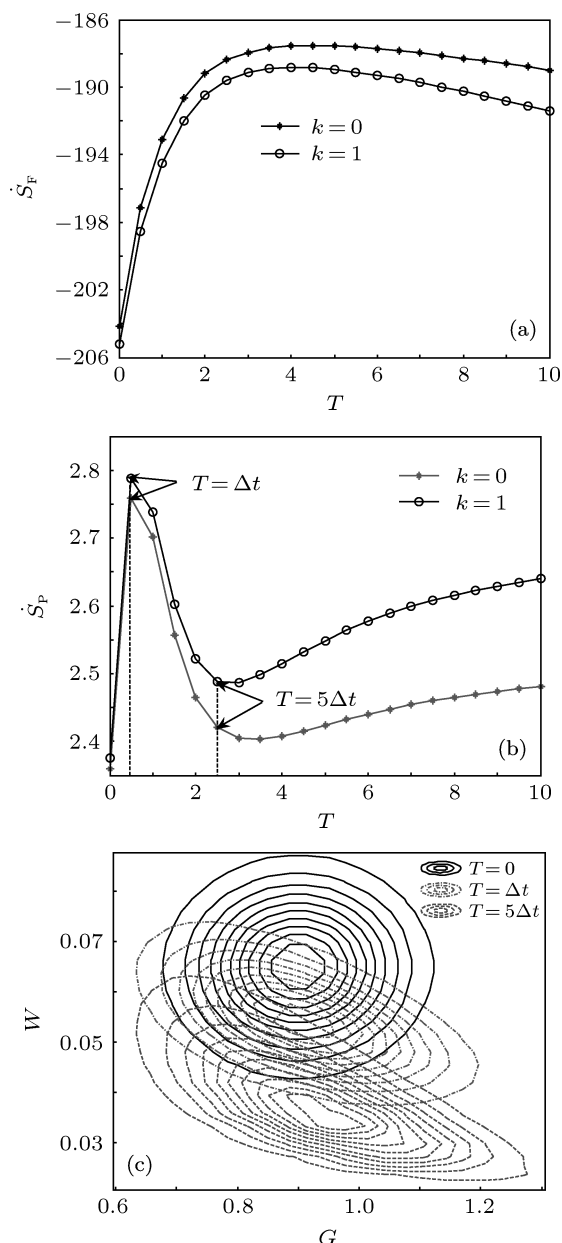


图6 信息熵流和熵产生 (a)  $\dot{S}_F$  和 (b)  $\dot{S}_P$  的趋势图以及 (c) 联合概率密度等值线图

### 3.1 当初始分布选在稳定流形内

#### 3.1.1 $k = 0$ 时的概率密度

参数选取为 (3) 式时, 系统 (2) 初值点选在某一吸引域比如图 2 区域 II 内, 此时系统实现不动点  $\beta_- (0.954, 0.0319)$  为渐近稳定的. 相应地, 系统 (1) 初始分布若选在吸引域 II 内, 概率密度将

在  $\beta_-$  点附近形成单峰状, 见图 3 和图 4. 结果表明噪声强度很小时, 确定性动力学特征处于主要支配地位; 随着噪声强度增大, 使得系统在  $\beta_-$  点附近更为活跃, 即系统响应的方差增大 (图 3). 两个边缘概率密度都将变矮变胖而其中心将偏离  $\beta_-$  (图 4).

### 3.1.2 $k = 1$ 时概率密度

参数选取仍为 (3) 式且  $k = 1$ , 当初值选在流形

II 内, 此时系统 (2) 的  $\beta_-$  移至 (1.0, 0.029). 图 5 比较了  $k = 0, 1$  时的边缘概率密度, 系统运动规律基本一致. 相对  $k = 0$  情形,  $k = 1$  时的概率密度  $p_G$  峰值中心右移而  $p_W$  峰值中心左移. 图 3 至图 6 的计算区域为  $[0.0, 1.8] \times [-0.02, 0.15]$  并剖分成  $28 \times 28$  个子区域, 计算时长为  $T = 10$ , 时间间隔为  $\Delta t = 0.5$ , 初始分布选为  $N(0.9, 0.065, 0.1^2, 0.005^2, 0)$ .

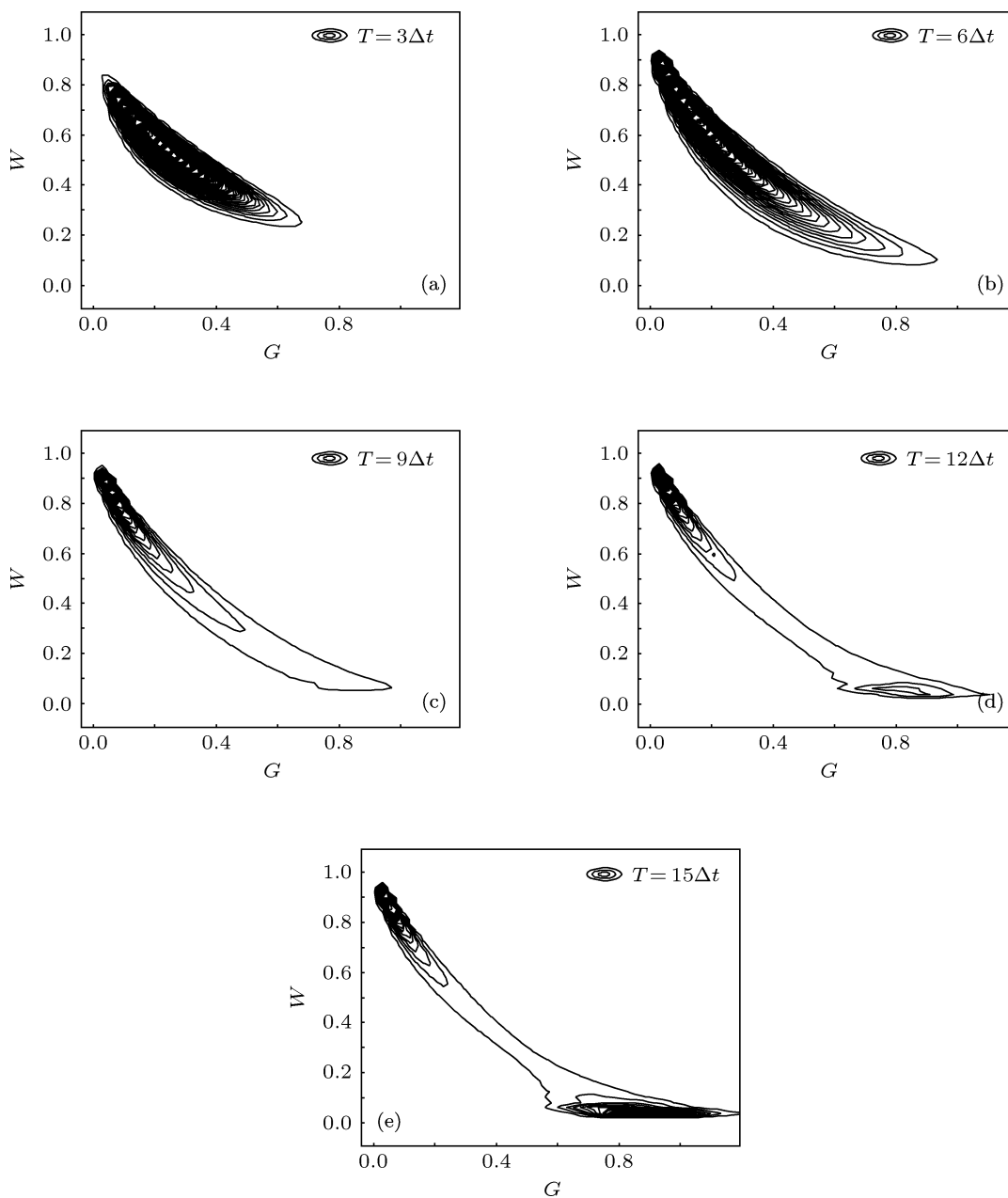


图 7 联合概率密度等值线图 (a)  $T = 3\Delta t$ ; (b)  $T = 6\Delta t$ ; (c)  $T = 9\Delta t$ ; (d)  $T = 12\Delta t$ ; (e)  $T = 15\Delta t$

### 3.1.3 $k = 0$ 或 $k = 1$ 时的信息熵流和熵产生

利用 (10) 和 (11) 式计算熵流  $\dot{S}_F$  和熵产生  $\dot{S}_P$ , 图 6 表明两者随时间都呈现非线性的变化趋势.  $\dot{S}_F$  先增后逐渐趋稳,  $\dot{S}_P$  在  $T = \Delta t$  附近达到极大, 表明系统 (1) 的概率密度中心从初始分布迅速靠拢不动点附近, 反映了概率密度的形态快速改变 (见图 6(c));  $T = 5\Delta t$  附近是  $\dot{S}_P$  曲线变化率的转折点, 意味着之后系统 (1) 的概率密度进入微调状态.

### 3.2 初始分布的中心选在分界线上的点

对于系统 (1), 当初始分布的中心选在分界线上的点, 在噪声的扰动下, 系统响应分布从初始分布出发, 先迅速汇集到  $\alpha$  为中心的区域, 而后逐渐向  $\beta_-$  这一中心迁移, 最终分聚到这两个渐近稳定中心. 图 7 和图 8 通过对瞬时概率密度的捕捉观察到这一统计运动规律. 由于  $\alpha$  和  $\beta_-$  的吸引力强弱不同, 使得分布最终呈现出双峰态.

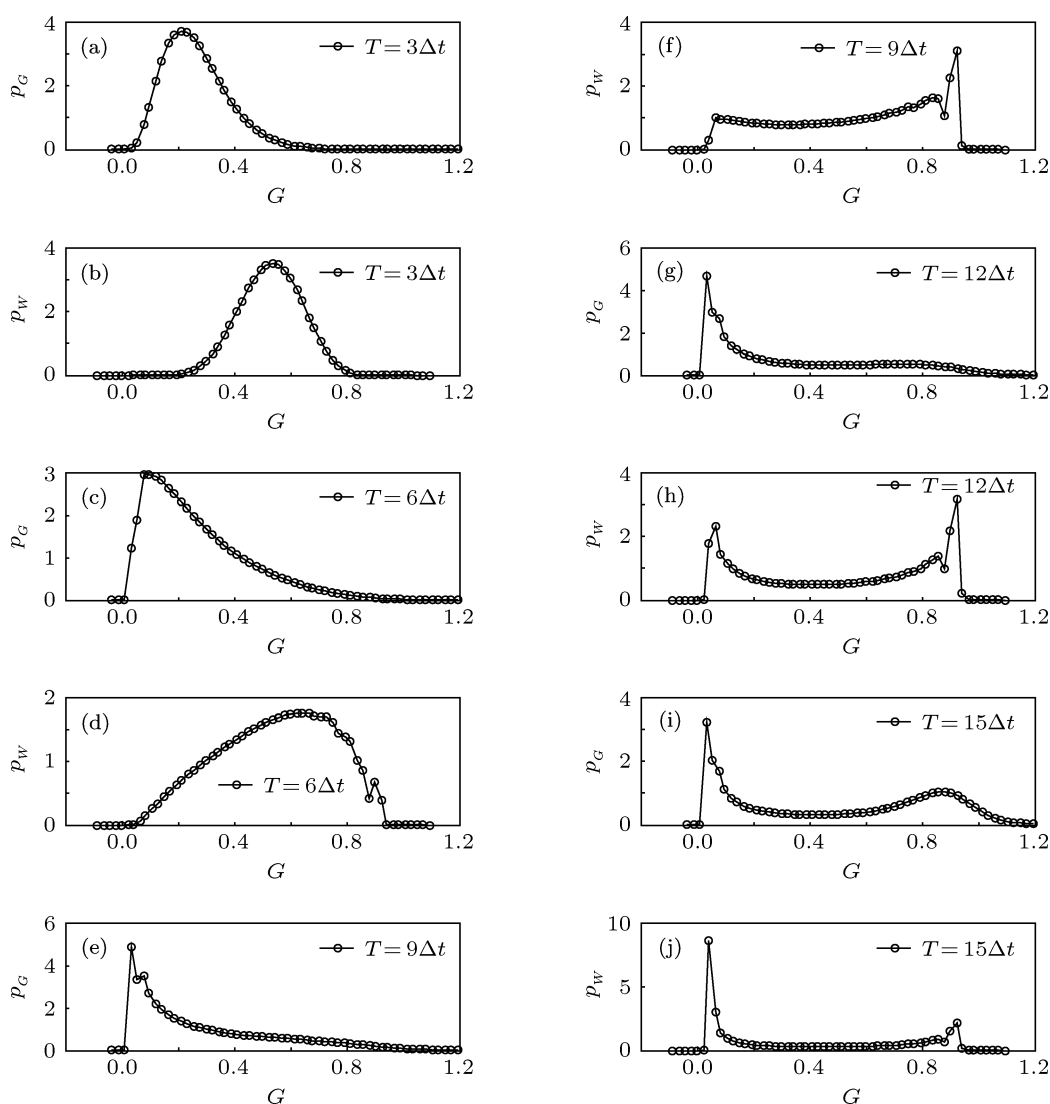


图 8 边缘概率密度 (a)  $p_G (3\Delta t)$ ; (b)  $p_W (3\Delta t)$ ; (c)  $p_G (6\Delta t)$ ; (d)  $p_W (6\Delta t)$ ; (e)  $p_G (9\Delta t)$ ; (f)  $p_W (9\Delta t)$ ; (g)  $p_G (12\Delta t)$ ; (h)  $p_W (12\Delta t)$ ; (i)  $p_G (15\Delta t)$ ; (j)  $p_W (15\Delta t)$

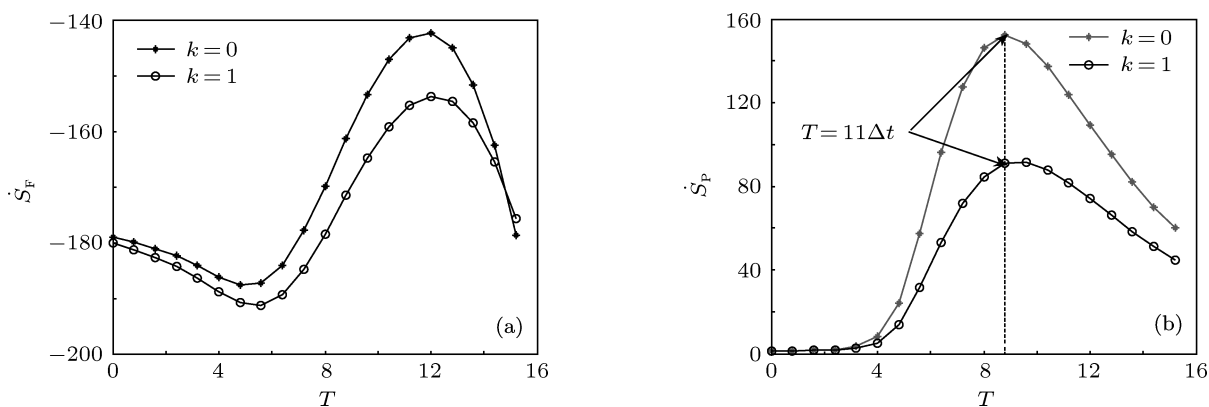


图9 信息熵流和熵产生 (a)  $\dot{S}_F$  和 (b)  $\dot{S}_P$  的趋势图

图9是通过由图7和图8所示概率密度的演化过程相应计算  $\dot{S}_F$  和  $\dot{S}_P$  随时间的变化趋势. 在  $k = 0, 1$  两种情形下  $\dot{S}_F$  和  $\dot{S}_P$  随时间的变化趋势相同但极值点位置不同.  $\dot{S}_F$  呈现多极值非线性变化趋势, 表明系统 (1) 的平均散度随时间的非线性变化.  $\dot{S}_P$  先增达到极大后逐渐减小, 而其极值点位置出现在  $T = 11\Delta t$  附近, 与之对应在图7(c), (d) 中系统 (1) 的联合概率密度从  $T = 9\Delta t$  单峰拖尾状分岔形成  $T = 12\Delta t$  时明显的双峰状, 同样地, 图8(e)—(h) 中两个边缘概率密度也由单峰逐渐变为双峰.

图7至图9计算区域为  $[-0.05, 1.2] \times [-0.1, 1.15]$  并剖分成  $28 \times 28$  个子区域,  $T = 16, \Delta t = 0.8$ , 初始分布为  $N(\beta_{+G}, \beta_{+W}, 0.05^2, 0.05^2, 0)$ . 参数选取为 (3) 式且  $k = 0, D = 0.028$  时,  $\beta_+$  坐标为  $(0.27, 0.51)$ . 由于两个渐近稳定中心均临近边界, 概率密度只集中于两个中心很小邻域内, 采用矩形

计算区域耗时多且计算精度差, 可通过调整计算区域来改善.

### 4 结论

本文实现两种群生态系统的 (多维非线性) 随机模型中概率密度及信息熵流、熵产生的演化规律并分析了与之对应的随机系统动力学行为, 数值结果表明平均散度的非线性变化趋势表明随机系统相空间随时间的平均意义上的非线性收缩变化. 而信息熵产生的极值点位置与概率密度的快速迁移和分岔相对应. 这为应用概率密度来实施随机控制提供帮助. 可见, 概率密度及信息熵演化方程是研究复杂的多种群生态系统随机模型的得力工具. 针对系统 (1) 可构造不规则区域的路径积分法来改善计算精度.

[1] Chen L S, Wang D D 1994 *Phys.* **23** 408 (in Chinese) [陈兰荪, 王东达 1994 物理 **23** 408]  
 [2] Gui Z J 2005 *Models of Biological Dynamics and Computer Simulation* (1st Ed.) (Beijing: Science Press) (in Chinese) [桂占吉 2005 生物动力学模型与计算机仿真 (第1版) (北京: 科学出版社)]  
 [3] Chen L S, Meng X Z, Jiao J J 2009 *Biological Dynamics* (1st Ed.) (Beijing: Science Press) (in Chinese) [陈兰荪, 孟新柱, 焦建军

2009 生物动力学 (第1版) (北京: 科学出版社)]  
 [4] Dimentberg M F 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036204  
 [5] Pigolotti S, Flammini A, Maritan A 2004 *Phys. Rev. E* **70** 011916  
 [6] Cai G Q, Lin Y K 2004 *Phys. Rev. E* **70** 041910  
 [7] Cai G Q, Lin Y K 2007 *Phys. Rev. E* **76** 041913  
 [8] Wu Y, Zhu W Q 2008 *Phys. Rev. E* **77** 041911  
 [9] Cai G Q 2009 *Int. J. Non-Linear Mech.* **44** 769  
 [10] Cai G Q, Lin Y K 2011 *Phys. Rev. E* **76** 041913  
 [11] Nicolis G, Daems D 1998 *Chaos* **8** 311

- [12] Daems D, Nicolis G 1999 *Phys. Rev. E* **59** 4000
- [13] Bag B C, Chaudhuri J R, Ray D S 2000 *J. Phys. A: Math. and General* **33** 8331
- [14] Bag B C, Banik S K, Ray D S 2001 *Phys. Rev. E* **64** 026110
- [15] Bag B C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 026122
- [16] Xie W X, Xu W, Cai L, Jin Y F 2005 *Chin. Phys.* **14** 1766
- [17] Bag B C 2003 *J. Chem. Phys.* **119** 4988
- [18] Goswami G, Mukherjee B, Bag B C 2005 *Chem. Phys.* **312** 47
- [19] Xie W X, Xu W, Cai L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1639 (in Chinese) [谢文贤, 徐伟, 蔡力 2006 物理学报 **55** 1639]
- [20] Xu W, Xie W X, Cai L 2007 *Phys. A-Stat. Mech. and its App.* **384** 273
- [21] Xie W X, Xu W, Cai L 2007 *Chin. Phys.* **16** 42
- [22] Guo P Y, Xu W, Liu D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5179 (in Chinese) [郭培荣, 徐伟, 刘迪 2009 物理学报 **58** 5179]
- [23] Guo Y F, Xu W, Li D X, Wang L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2235 (in Chinese) [郭永峰, 徐伟, 李东喜, 王亮 2010 物理学报 **59** 2235]
- [24] Guo Y F, Xu W, Li D X 2009 *Chin. J. Applied Mech.* **26** 264 [郭永峰, 徐伟, 李东喜 2009 应用力学学报 **26** 264]
- [25] Xie W X 2007 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Northwestern Polytechnical University) (in Chinese) [谢文贤 2007 博士学位论文 (西安: 西北工业大学)]
- [26] Zhang L P, Wang H N, Xu M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010506 (in Chinese) [张丽萍, 王惠南, 徐敏 2011 物理学报 **60** 010506]
- [27] Gardiner C W 1985 *Handbook of Stochastic Methods* (Berlin: Springer-Verlag)

## Information entropies and dynamics in the stochastic ecosystem of two competing species\*

Xie Wen-Xian<sup>†</sup> Cai Li Yue Xiao-Le Lei You-Ming Xu Wei

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 20 November 2011; revised manuscript received 14 February 2012)

### Abstract

Using the models of stochastic population dynamics, the competitions and interactions of interspecies and between species and the stochastic environment are studied. In this paper, the stochastic ecosystems (in Itô or Statonovich model) of two competing species are investigated through evaluating probability densities and information entropy fluxes and productions of two species. The formulas of entropy flux (i.e. expectation of divergence) and entropy production are deduced for numerical calculations, through the corresponding Fokker-Planck equation with its condition and the definition of Shannon entropy. The nonlinear characteristics of entropy fluxes are captured and the relationships are found between the extremal points of entropy productions and the rapid transitions or bifurcations. The numerical results obtained with path integration method show that the probability densities and Shannon entropies of these two stochastic models (in Itô or Statonovich meaning) have the same evolutionary tendency but with different points of extrema.

**Keywords:** probability density, information entropy, ecosystem, Gaussian white noise

**PACS:** 05.45.-a, 65.40.gd, 91.62.Mn, 02.50.Ey

\* Project supported by the Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11101333, 11102156, 10932009), the National Natural Science Foundation of Shaanxi (Grant No. 2011GQ1018), and NPU Foundation for Fundamental Research.

<sup>†</sup> E-mail: wenxianxie@nwpu.edu.cn