

混沌系统平均初始误差增长饱和特性研究

杨锦辉[†] 宋君强

(国防科学技术大学计算机学院, 长沙 410073)

(2011年12月1日收到; 2012年2月21日收到修改稿)

在非线性误差增长理论框架下研究了混沌系统平均初始误差增长饱和特性以及误差饱和值同系统可预报期限的关系. 首先探索了 Lorenz96 系统中平均相对初始误差增长饱和规律, 发现平均相对初始误差增长饱和值同初始误差的自然对数存在简单的线性关系: 其二者自然对数之和为一常量, 且该常量同初始误差无关. 实验表明该结论对其他混沌系统也适用. 因此对给定混沌系统, 在计算出和常数后可以外推得到任意固定初始误差的平均相对误差增长饱和值. 为进一步研究误差饱和值同可预报期限的关系, 给出了平均绝对误差增长的定义. 理论分析表明混沌系统平均绝对误差增长也会达到饱和. 其饱和值为常量, 与初始误差无关, 混沌系统控制参数确定, 饱和值就固定. 依据上述研究, 最后给出一个定量计算可预报期限的模型 $T_p = \frac{1}{\Lambda} \ln \left(\frac{E_s}{\delta_0} \right) + c$, E_s 为绝对误差增长饱和值. 实验研究表明对于复杂的高阶混沌系统, 该预报期限模型都能较好地适用.

关键词: 相对初始误差增长, 非线性误差增长理论, 混沌系统, 可预报期限

PACS: 05.50.-a

1 引言

地球大气或海洋预报的误差主要来源于初始值误差和模型误差两个方面. Lorenz 在 1996 年^[1]描述了混沌系统初始值误差增长过程: 在开始短时间内初始误差呈指数级增长, 增长指数基本等于全局最大 Lyapunov 指数; 系统演化一定时间后误差增长放缓, 增长率减小直至趋于零, 最终误差达到饱和. 混沌系统可预报性与初始误差关系的研究最初是建立在线性误差动力学基础上, 认为可预报时间尺度 $T_p = \frac{1}{\Lambda} \ln \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)$ ^[2], 其中 δ 为预报误差上限, δ_0 为初始误差, Λ 为最大 Lyapunov 指数. 该模型缺陷是只有当在 δ 和 δ_0 都较小时才有意义且 δ 的确定太过主观. 在最近的研究中, 李建平等提出了非线性误差增长理论^[3-6], 认为平均相对初始误差增长 (mean relative growth of initial error, mean RGIE) 达到一定值后, 误差增长进入一个明显的非线性阶

段最终达到饱和, 饱和值同初始误差相关. 基于非线性误差增长理论, 丁瑞强等^[7]提出了一个可定量估计混沌系统可预报期限的模型 $T_p = C - \frac{1}{\Lambda} \frac{\lg \delta_0}{\lg e}$, 该模型把误差增长分为线性增长阶段和非线性增长阶段, 线性增长阶段误差增长可以利用切线性发展方程^[8,9]来描述, 在非线性的增长阶段误差增速放缓, 对给定的混沌系统非线性增长阶段时长为固定. 该模型能够较好的描述简单系统的可预报期限同初始误差的关系, 但是模型的物理意义不是太明确.

非线性误差增长理论的研究现阶段主要集中在初始误差同可预报期限的关系方面, 而对误差增长饱和值还没有更多的研究. 为了更好地探索混沌系统误差增长饱和值的意义, 以及误差增长饱和值同可预报期限的关系. 本文首先对 Lorenz96 系统作了研究, 发现平均相对误差增长饱和值同初始误差大小存在简单的线性关系: 二者的自然对数和为常数. 实验表明这一结论对其他混沌系统也适用. 为

[†] E-mail: yangjinhui@nudt.edu.cn

进一步研究误差增长饱和值同混沌系统可预报期限的关系, 根据平均相对误差增长的定义, 文章给出了平均绝对误差增长的定义. 分析表明, 混沌系统平均绝对误差增长饱和值为常数, 仅同混沌系统的控制参数相关, 同初始误差无关. 依据上述研究, 本文还给出一个可定量计算可预报期限的模型 $T_p = \frac{1}{\Lambda} \ln \left(\frac{E_s}{\delta_0} \right) + c$, E_s 为绝对误差增长饱和值, δ_0 为初始误差, Λ 为最大 Lyapunov 指数, c 为修正参数. 该模型考虑了误差增长的线性阶段和非线性阶段, 和文献 [6] 提出的可预测期限模型相比, 本预测模型主要侧重于误差增长饱和值和可预测期限关系方面. 从后面分析可以看出两模型实质是等价的, 但是本文给出的模型形式物理意义更加明确, 而且实验分析表明对于一些复杂的高阶混沌系统, 该模型都能较好的适应.

2 非线性误差增长理论

非线性误差增长理论克服了线性误差增长理论在可预报性研究的局限性, 它不对非线性系统的误差作任何线性化的近似, 直接采用原始误差发展方程来研究初始误差的发展 [7]. 研究一类 N 维非线性动力系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)], \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, $\mathbf{F}[\mathbf{x}(t)] = (F_1(\mathbf{x}(t)), F_2(\mathbf{x}(t)), \dots, F_n(\mathbf{x}(t)))^T$, 上标 T 表示转置. 假设 $\delta\mathbf{x}(t_0)$ 为 $t = t_0$ 时刻的误差, 定义非线性局部 Lyapunov 指数如下:

$$\lambda(\mathbf{x}(t_0), \delta\mathbf{x}(t_0), \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{\|\delta\mathbf{x}(t_0 + \tau)\|}{\|\delta\mathbf{x}(t_0)\|} \right). \quad (2)$$

为了书写方便, 下面将误差向量 $\delta\mathbf{x}(t)$ 的大小表示为 $\delta(t)$. 为了从整体上对非线性系统的动力学特征进行研究, 引入系统平均非线性局部 Lyapunov 指数 [10]

$$\bar{\lambda}(\delta\mathbf{x}(t_0), \tau) = \langle \lambda(\mathbf{x}(t_0), \delta\mathbf{x}(t_0), \tau) \rangle_K, \quad (3)$$

式中 $\langle \cdot \rangle_K$ 表示 $K (K \rightarrow \infty)$ 个样本的集合平均.

因此平均相对初始误差增长可以表示为

$$\bar{E}(\delta\mathbf{x}(t_0), \tau) = \exp(\bar{\lambda}(\delta\mathbf{x}(t_0), \tau)\tau). \quad (4)$$

由 (1) 式至 (4) 式可得

$$\bar{E}(\delta\mathbf{x}(t_0), \tau) = \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\delta_i(t_0 + \tau)}{\delta_i(t_0)} \right) \right). \quad (5)$$

对于数值相同的初始误差 $\delta(t_0)$, 有

$$\bar{E}(\delta\mathbf{x}(t_0), \tau) = \left(\prod_{i=1}^N \delta_i(t_0 + \tau) \right)^{1/N} / \delta(t_0). \quad (6)$$

平均相对初始误差增长依概率意义收敛到一个常数 [3], 即

$$\bar{E}(\delta\mathbf{x}(t_0), \tau) \xrightarrow{P} c, \quad (K \rightarrow \infty). \quad (7)$$

这个常数 c 被看作 $\bar{E}(\delta\mathbf{x}(t_0), \tau)$ 的理论饱和值, \xrightarrow{P} 表示依照概率意义收敛. 随着系统演化时间 τ 的增加, 平均相对初始误差会达到一个饱和值, 用 $\bar{E}^*(\delta\mathbf{x}(t_0))$ 来表示.

3 混沌系统平均相对误差增长饱和值

我们首先研究 Lorenz96 [11] 模型的平均相对误差增长饱和值随初始误差大小变化关系. Lorenz96 模型是研究大气可预报性方面广泛应用的一个模型, 其方程为

$$\frac{d}{dt} y_i = -y_i - y_{i-1}(y_{i-2} - y_{i+1}) + F. \quad (8)$$

y_i 呈环形分布, $y_{i+N} = y_i$, 可用来代表沿纬圈均匀采样点的气象值, 如风速、气温等. 模型中的二次, 线性和常数项分别表示对流, 耗散以及外部驱动力 [12].

图 1(a) 显示 Lorenz96 系统在不同初始误差 $\delta(t_0)$ 下平均相对误差增长自然对数 $\ln \bar{E}(\delta\mathbf{x}(t_0), n)$ 随 n 的变化情况, 平均相对初始误差增长的自然对数从 0 开始, 随 n 增加达到饱和, 饱和值同初始误差有关. 图 1(b) 显示 $\ln \bar{E}^*(\delta\mathbf{x}(t_0))$ 同初始误差的自然对数 $\ln \delta(t_0)$ 的变化情况. 如图所示, $\ln \bar{E}^*(\delta\mathbf{x}(t_0))$ 和 $\ln \delta(t_0)$ 呈线性相关, 其线性拟合式的斜率项约等于 -1. 于是对 Lorenz96 系统 $\ln \bar{E}^*(\delta\mathbf{x}(t_0))$ 和 $\ln \delta(t_0)$ 的关系可以建立如下关系:

$$\ln \bar{E}^*(\delta\mathbf{x}(t_0)) + \ln \delta(t_0) = C, \quad (9)$$

其中 C 为同初始误差无关的常数项. 为验证 (9) 式在其他混沌系统中也成立, 我们对 Lorenz63 [13] 系

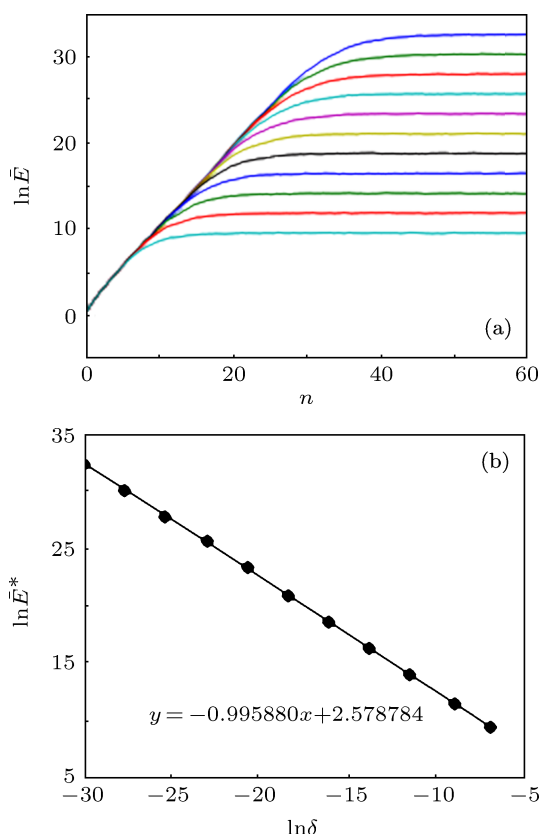


图1 平均相对初始误差增长饱和值随初始误差变化 (a) Lorenz96 系统在不同初始误差条件下的平均相对误差增长的自然对数 $\ln \bar{E}(\delta \mathbf{x}(t_0), n)$ 随 n 的变化 (曲线从上到下对应的 $\delta(t_0)$ 值为 $10^{-13}, 10^{-12}, 10^{-11}, 10^{-10}, 10^{-9}, 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$. Lorenz 系统的参数 $F = 10$, 系统维数等于 5. 积分格式采用 Rung-Kutta4, 积分步长为 0.01); (b) 平均相对误差增长饱和值自然对数 $\ln \bar{E}^*(\delta \mathbf{x}(t_0))$ 随初始误差自然对数 $\ln \delta(t_0)$ 的变化

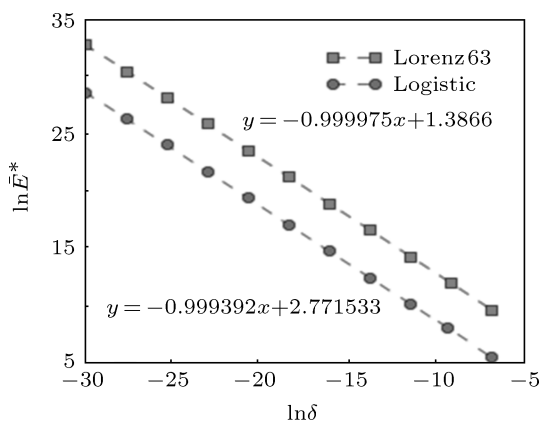


图2 Lorenz63 系统和 Logistic 映射的 $\ln \bar{E}^*(\delta \mathbf{x}(t_0))$ 同 $\ln \delta(t_0)$ 的关系 (Lorenz63 系统三个参数取值分别为 $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$, Logistic 映射参数 $a = 0.4$)

统以及 Logistic 映射也作了同样的平均相对误差饱和值变化研究. 结果如图 2 所示, $\ln \bar{E}^*(\delta \mathbf{x}(t_0))$

和 $\ln \delta(t_0)$ 也呈线性, 且其线性拟合式的斜率项约等于 -1 , (9) 式成立. 事实上本文对其他混沌系统 (如表 1 所示) 的实验表明, (9) 式都成立.

依照 (9) 式, 在已知常数 C 的情况下, 可求出任意固定初始误差下的平均相对误差饱和值. 常数 C 可以在已知初始误差的情况下通过实验获得.

此处对实验过程及关键数据进行描述. 为获得图 1(a), 首先取任意点作为初始值, 对于 Logistic 映射需保证初值在混沌区间 (0,1) 内. 然后按照积分 (对于离散系统是迭代) 模式运行 2×10^4 步, 最后的点作为真正起始点以保证起始点在吸引子上. 从起始点开始执行, 获得 $E(\delta \mathbf{x}(t_0), n)$ 的一次序列. 为了得到平均相对误差增长, 相同的过程共执行 200 次, 每一次计算的终点作为下一次计算的起点. 把总数据按 (6) 式计算得到平均相对误差增长.

4 混沌系统平均绝对误差增长饱和值

依照平均相对误差的定义 (6), 定义平均绝对误差增长为

$$\bar{E}_{\text{abs}}(\delta \mathbf{x}(t_0), \tau) = \left(\prod_{i=1}^N \delta_i(t_0 + \tau) \right)^{1/N}. \quad (10)$$

由 (6), (10) 式可得平均绝对误差增长和平均相对误差增长的关系如下:

$$\bar{E}_{\text{abs}}(\delta \mathbf{x}(t_0), \tau) = \bar{E}(\delta \mathbf{x}(t_0), \tau) \times \delta(t_0). \quad (11)$$

两边同时取对数有

$$\ln \bar{E}_{\text{abs}}(\delta \mathbf{x}(t_0), \tau) = \ln \bar{E}(\delta \mathbf{x}(t_0), \tau) + \ln \delta(t_0). \quad (12)$$

由 (12) 式易知, 平均绝对误差增长 $\bar{E}_{\text{abs}}(\delta(t_0), \tau)$ 同平均相对误差增长 $\bar{E}(\delta \mathbf{x}(t_0), \tau)$ 有相同的性质, 即会随着系统演化时间增加会达到饱和值. 用 $\bar{E}_{\text{abs}}^*(\delta(t_0))$ 来表示平均绝对误差饱和值, 于是有

$$\ln \bar{E}_{\text{abs}}^*(\delta \mathbf{x}(t_0)) = \ln \bar{E}^*(\delta \mathbf{x}(t_0)) + \ln \delta(t_0). \quad (13)$$

由 (9), (13) 式得

$$\ln \bar{E}_{\text{abs}}^*(\delta(t_0)) = C. \quad (14)$$

即混沌系统的平均绝对误差饱和值为常数, 同初始误差选取无关. 于是平均绝对误差饱和值可表示为 \bar{E}_{abs}^* .

图 3 验证了 \bar{E}_{abs}^* 为恒定值的推断. 如图所示, 不同的初始误差平均绝对误差增长最终会趋向同一饱和值. 在 Lorenz96 系统中, 当 $F = 10$, 维数等于 5 时 $\bar{E}_{\text{abs}}^* = 2.529$; $F = 10$ 维数等于 100 时 $\bar{E}_{\text{abs}}^* = 4.120$.

平均绝对误差饱和值 \bar{E}_{abs}^* 同初始误差无关, 仅同吸引子大小有关. 根据混沌系统的拓扑传递性 [19], 平均绝对误差增长饱和值可以看作混沌系统吸引子中任两点之间的平均距离. 可以用 \bar{E}_{abs}^* 作为刻画混沌系统吸引子大小的一个特征量. 表 1 给出了一些混沌系统的平均绝对误差增长饱和值的自然对数, 可以通过这些值来了解混沌系统吸引子大小情况.

由于混沌系统的绝对饱和误差为常数, 而且当误差达到饱和值后, 误差大小不再增加, 可以认为丧失了所有可预测性. 依照非线性误差发展理论, 可以对预报期限建立如下计算模型:

$$T_p = \frac{1}{\Lambda} \ln \left(\frac{E_{\text{abs}}^*}{\delta_0} \right) + c, \quad (15)$$

其中 Λ 表示系统最大 Lyapunov 指数, δ_0 为初始误差, c 表示非线性修正值. 模型中 $\frac{1}{\Lambda} \ln \left(\frac{E_{\text{abs}}^*}{\delta_0} \right)$ 表示线性增长阶段, 误差以最大 Lyapunov 指数增长. 但是误差增长达到一定大小 δ_c 后会进入非线性增长阶段, 该阶段误差增长不能用上述项描述因而需要对该项作一定的修正. 由于混沌系统误差的非线性增长阶段时间 T_n 是一个常数 [8], 所以可以对模型加入一个常量 c 来作为非线性增长的修正. c 可以依据某固定初始误差的可预报期限而计算得出. 由于 E_{abs}^* 为常数, 在已知 c 的情况下, 依照 (15) 式可以求得任意大小初始误差的可预报期限.

以 Lorenz96 系统为例, 验证该可预报期限模型的正确性. 如表 1 所示, $F = 10$ 的 20 维 Lorenz96 系统的绝对误差饱和值自然对数为 $\ln(E_{\text{abs}}^*) = 3.3023$, 最大 Lyapunov 指数为 $\Lambda = 2.1602$, 修正参数计算得 $c = 1.71$. 图 4 显示了利用 (15) 式外推得到其他初始误差时的可预报期限和利用非线性误差增长理论计算得到的可预报误差期限比较, 发现二者非常符合. 这说明利用绝对误差增长饱和值建立的可预报期限计算模型是正确的. 事实上, 该模型可化为

$$T_p = \frac{1}{\Lambda} \ln(E_{\text{abs}}^*) - \frac{1}{\Lambda} \ln(\delta_0) + c. \quad (16)$$

$$\text{令 } C = \frac{1}{\Lambda} \ln(E_{\text{abs}}^*) + c, \text{ 可得}$$

$$T_p = C - \frac{1}{\Lambda} \ln(\delta_0), \quad (17)$$

(17) 式正是文献 [7] 中所提的定量计算模型. (15) 式和 (17) 式是等价的, 只是二者描述的侧重点不同.

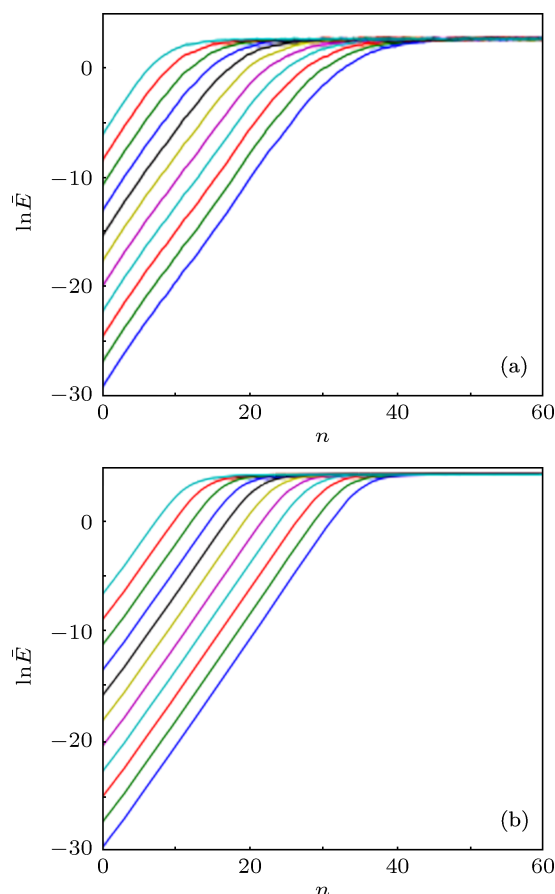


图 3 Lorenz96 系统的平均绝对误差增长 $\bar{E}_{\text{abs}}(\delta(t_0), n)$ 随 n 的变化 (积分格式采用 Rung-Kutta4, 积分步长为 0.01. 图中, 从上到下对应的 $\delta(t_0)$ 值为 $10^{-13}, 10^{-12}, 10^{-11}, 10^{-10}, 10^{-9}, 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$) (a) $F = 10$, 维数等于 5, $\bar{E}_{\text{abs}}^* = 2.529$; (b) $F = 10$, 维数等于 100, $\bar{E}_{\text{abs}}^* = 4.120$

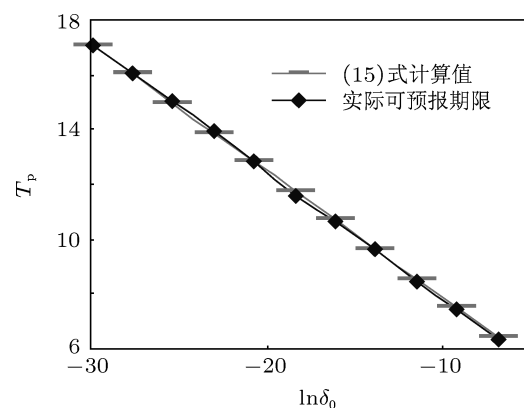


图 4 利用 (15) 式计算得到 Lorenz96 系统可预报期限和利用非线性误差增长理论计算得到的实际可预报期限随误差变化图

表 1 一些混沌系统的平均绝对误差增长饱和值的自然对数值

系统	参数	$\ln \bar{E}_{\text{abs}}^*$
Henon ^[14] : $X_{n+1} = 1 - aX_n^2 + Y_n$ $Y_{n+1} = bX_n$	$\begin{cases} a = 1.4 \\ b = 0.3 \end{cases}$	-0.398
Rossler-Chaos ^[15] : $\dot{X} = -(Y + Z)$ $\dot{Y} = X + aY$ $\dot{Z} = b + Z(X - c)$	$\begin{cases} a = 0.15 \\ b = 0.20 \\ c = 10.0 \end{cases}$	1.732
光滑 Chua ^[16] : $\dot{X} = p(y - x - ax - bx^3)$ $\dot{Y} = x - y + z$ $\dot{Z} = -qy$	$\begin{cases} a = -1.203 \\ b = 0.0081 \\ c = 10 \\ d = 14.87 \end{cases}$	1.757
Lorenz96 系统 (8) 式 Lorenz96, 系统 II ^[17] :	$F = 10, \text{维数} = 20$	3.3023
$\frac{dX_k}{dt} = -X_{k-1}(X_{k-2} - X_{k+1}) - X_k + F - \left(\sum_{j=1}^J Y_{j,k}\right)$ $\frac{dY_{j,k}}{dt} = -cb(Y_{j+1,k} - Y_{j-1,k}) - cY_{j,k} + (hc/b)X_k$	$\begin{cases} (h, c, b, F) = (1, 10, 10, 10) \\ (K, J) = (8, 4) \end{cases}$	2.736
Lorenz96 改进模型 ^[18] : $\frac{dx_i}{dt} = x_{i-1}(x_{i+1} - x_{i-2}) - x_i + a_0 + a_1x_i$	$\begin{cases} (a_0, a_1) = (9.95, -0.122) \\ \text{维数} = 8 \end{cases}$	2.445

5 结论

本文在非线性初始误差增长理论框架下, 研究了混沌系统平均初始误差增长饱和值同初始误差的关系, 以及饱和值同可预报期限的关系. 研究发现, 平均相对初始误差增长饱和值同初始误差二者的自然对数和为常数, 且该常数同初始误差无关. 依照这一结论, 在求出混沌系统的和常数后, 可求的任意初始误差下的平均相对误差饱和值. 进而, 本文依照相对误差的定义, 引入了绝对误差的概念, 并且推导出混沌系统的平均绝对误差增长饱和值为恒定值, 同初始误差大小无关, 仅同混沌系统吸引子有关的结论. 为验证这一结论, 文章测试了一些具有代表性的混沌系统, 从低阶的到高阶的、离散的到连续的, 实验结果都很好地满足这一结论.

这对于混沌系统可预报时间建模具有较大的意义. 利用绝对误差增长饱和值为常数这一特性, 本文建立一个可定量计算混沌系统可预报期限的模型. 实验证明该模型对于复杂的高阶混沌系统可预报期限都能很好的描述. 本文在最后还证明了本模型同文献 [7] 所建模型本质上式等价的, 只是本文的模型侧重于描述绝对误差增长饱和值同可预报期限的关系, 其给出形式的物理意义更加明确.

应当指出的是, 尽管实验中已经在多个混沌系统下验证了平均绝对误差增长饱和值为常数, 但是尚未以严格的数学逻辑来给予证明. 另外文中计算的都是数学混沌系统模型, 对于一些实际的复杂混沌系统比如天气系统而言本文的结论是否满足尚需要进一步研究.

[1] Lorenz E N 1969 *Tellus* **21** 289

[2] Eckmann J P, Ruelle D 1985 *Rev. Mod. Phys.* **57** 617

[3] Ding R Q, Li J P 2007 *Phys. Lett. A* **364** 396

[4] Li J P, Ding R Q, Chen B H 2006 *Frontier and Prospect of Atmospheric Sciences at the Beginning of the 21th Century* (Beijing:

China Meteorology Press) p96 (in Chinese) [李建平, 丁瑞强, 陈宝花 2006 21 世纪大气科学发展的回顾与展望 (北京: 气象出版社) 第 96 页]

[5] Chen B H, Li J P, Ding R Q 2006 *Sci. China D* **49** 1111

[6] Ding R Q, Li J P 2007 *Chin. J. Atmos. Sci.* **31** 571 (in Chinese)

- [丁瑞强, 李建平 2007 大气科学 **31** 571]
- [7] Ding R Q, Li J P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7494 (in Chinese) [丁瑞强, 李建平 2008 物理学报 **57** 7494]
- [8] Wolf A, Swift J B, Swinney H L 1985 *Physica D* **16** 285
- [9] Sano M, Sawada Y 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 1082
- [10] Li J P, Ding R Q 2011 *Relationship between the Predictability Limit and Initial Error in Chaotic System* Esteban Tlelo-Cuautle (Ed.) 39–50
- [11] Lorenz E N 1995 *Proceedings of a Seminar Held at ECMWF on Predictability* (Reading: ECMWF) p1
- [12] Diego Pazo, Ivan G Szendro 2008 *Phys. Rev. E* **78** 16209
- [13] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [14] Henon M 1976 *Comm. Math. Phys.* **50** 69
- [15] Rossler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [16] Hu Y H 2009 *Sci. Tech. Engng.* **11** 2856 (in Chinese) [胡杨慧 2009 科学技术与工程 **11** 2856]
- [17] Orrell D, Smith L A 2001 *Nonlin. Proc. Geo.* **8** 357
- [18] Orrell D 2003 *J. Atmos. Sci.* **60** 2219
- [19] Lv J H, Lu J A, Chen S H 2005 (in Chinese) [吕金虎, 陆君安, 陈士华 2005 混沌时间序列分析及其应用 (第二版) (武昌: 武汉大学出版社) 第 27 页]

Saturation property of mean growth of initial error for chaos systems

Yang Jin-Hui[†] Song Jun-Qiang

(School of computer, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 1 December 2011; revised manuscript received 21 February 2012)

Abstract

The saturation property of mean growth of initial error and the relation between saturation value and predictability limit of chaos system are studied in a frame of the nonlinear error growth dynamics. Firstly, the saturation property of mean relative growth of initial error (RGIE) of Lorenz96 system is investigated. It is found that there exists a simple linear relationship between the logarithm of saturation value of mean RGIE and initial error. The sum of logarithms of the two is constant that is independent of the magnitude of the initial error. It is proven by experiment that this conclusion is suitable for other chaotic systems too. With this conclusion, once the constant sum has been determined, the saturation values of mean RGIE at any magnitude of initial error can be calculated easily. Furthermore, to make the study of the relation between error growth saturation and the predictability limits more convenient, just as the definition of the mean RGIE, a definition of the mean absolute growth of initial error (AGIE) is introduced and theoretical analysis reveals that the AGIE has a similar saturation property as RGIE. The saturation value of mean AGIE is constant, which means for a given chaos system, once the control parameters of the system has been determined, the saturation of AGIE is determined. Finally a model for calculating predictability limit quantitatively is given as follows: $T_p = \frac{1}{\Lambda} \ln \left(\frac{E_s}{\delta_0} \right) + c$, where E_s is the saturation value of mean AGIE. It is shown that this model can work with complicated and high dimension chaos system very well.

Keywords: relative growth of initial error, nonlinear error growth dynamics, chaos, predictability limit

PACS: 05.50.-a

[†] E-mail: yangjinhui@nudt.edu.cn