扩展的 (2+1) 维浅水波方程的尖峰孤子解及其相互作用*

马松华 方建平†

(丽水学院理学院, 丽水 323000)

(2012 年 1 月 14 日收到; 2012 年 2 月 16 日收到修改稿)

利用改进的 Riccati 方程映射法和变量分离法, 得到了扩展的 (2+1) 维浅水波方程的变量分离解 (包括孤波解, 周期波解和有理函数解). 根据得到的孤波解, 构造出了方程的几种不同形状的尖峰孤子结构, 研究了孤子的相互作用.

关键词: 改进的映射法, 扩展的 (2+1) 维浅水波方程, 尖峰孤子, 相互作用

PACS: 05.45.Yv, 03.65.Ge, 03.40.Kf

1 引 言

许多非线性物理现象可用非线性数学物理方法来描述. 近些年, 对非线性数学物理方程的研究不断有新的突破, 不少行之有效的求解非线性方程的方法被提出, 如 G'/G 展开法 [1−4]、双线性法 [5−8]、齐次平衡法 [9]、标准的 Painlevé 截断分析法 [10,11]、波数合并法 [12,13] 和映射法 [14] 等. 其中, 拓展的 Riccati 方程映射法是求解非线性方程简便和有效的方法, 已经被成功地应用于许多高维非线性物理模型中 [15−19]. Ma 等将映射法做了新的改进, 即在设解中加入了根号项, 获得了成功 [20,21]. 局域结构激发是非线性科学中一项重要的研究内容 [22−30]. 如果非线性物理方程的解中含有相关独立变量的任意函数, 通过对任意函数的适当选取, 能够激发丰富的局域结构, 而这些局域结构可以解释某些非线性物理现象.

本文的工作是将改进的 Riccati 方程映射法应用于扩展的 (2+1) 维浅水波 (SWW) 方程 [31]

$$u_{yt} + u_{xxxy} - 3u_{xx}u_y - 3u_xu_{xy} + bu_{xy} = 0, \quad (1)$$

构造出几种不同形状的尖峰孤子结构, 研究孤子的非弹性相互作用. 方程 (1) 中的 b 是任意常数. 在文献 [32] 中, Wang 和 Chen 利用双线性法求解了 SWW 方程, 构造出方程的周期波解.

2 SWW 方程的孤波解、周期波解和有理函数解

改进的 Riccati 方程映射法的基本思想是: 对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_ix_j}, \cdots) = 0, \quad (2)$$

设它有如下形式的解:

$$u = A(x) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\phi^i q(x) + C_i(x)\phi^{i-1}q(x)\sqrt{\sigma + \phi^2 q(x)}, \quad (3)$$

其中 ϕ 满足

$$\phi' = \sigma + \phi^2, \quad (4)$$

这里 $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ 和 $q(x)$ 为待定的 x 的任意函数. 将 (3) 和 (4) 式代入 (2) 式就可以得到一组 $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$

* 浙江省自然科学基金 (批准号: Y6100257, Y6110140) 资助的课题.

† E-mail: zjlsfjp@yahoo.com.cn

和 $q(x)$ 的约束方程. 通过约束方程求得变量 $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$ 和 $q(x)$, 再根据 Riccati 方程解

(a) 孤波解

$$\phi = -\sqrt{-\sigma}\tanh(\sqrt{-\sigma}q),$$
$$\phi = -\sqrt{-\sigma}\coth(\sqrt{-\sigma}q), \quad \sigma < 0,$$

(b) 周期波解

$$\phi = \sqrt{\sigma}\tan(\sqrt{\sigma}q),$$
$$\phi = -\sqrt{\sigma}\cot(\sqrt{\sigma}q), \quad \sigma > 0,$$

(c) 有理函数解

$$\phi = \frac{-1}{q}, \quad \sigma = 0, \tag{5}$$

就可以确定所求方程各种形式的解.

为了寻找 SWW 系统的新精确解, 我们将改进的 Riccati 方程映射法用于 (1) 式, 根据 (3) 式, 设解为

$$\begin{aligned} u =& f(x,y,t) + g(x,y,t)\phi(q(x,y,t)) \\ &+ h(x,y,t)\sqrt{\sigma + \phi^2(q(x,y,t))}, \end{aligned} \tag{6}$$

这里, f, g, h 和 q 是 (x,y,t) 的任意函数, 将 (6) 式和 (4) 式代入 (1) 式, 并按 ϕ 的同次幂合并, 提取 ϕ^i $(i = 1, 2, \cdots)$, 令 ϕ^i 前的系数等于零, 得到一系列方程, 由这些方程可求得:

$$f = -\frac{1}{3}\int \frac{q_x^3 q_y \sigma - 3q_x q_{xxy} - b q_x q_y - q_{xxx} q_y + 3q_{xy} q_{xx} - q_y q_t}{q_x q_y}\,\mathrm{d}x, \quad g = q_x, \quad h = -q_x. \tag{7}$$

从所得到的方程中, 我们发现有如下形式的特解:

$$q = \chi(x,t) + \varphi(y), \tag{8}$$

其中 $\chi \equiv \chi(x,t)$, $\varphi \equiv \varphi(y)$ 是关于 (x,t) 和 y 的任意函数.

情形 1 设 $\sigma = -1$, 可以得到 SWW 方程的孤波解

$$\begin{aligned} u_1 =& \frac{1}{3}\int \frac{\chi_x^3 + b\chi_x + \chi_{xxx} + \chi_t}{\chi_x}\,\mathrm{d}x \\ &- \chi_x\{\tanh(\chi+\varphi) \\ &+ \sqrt{\tanh(\chi+\varphi)^2 - 1}\}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} u_2 =& \frac{1}{3}\int \frac{\chi_x^3 + b\chi_x + \chi_{xxx} + \chi_t}{\chi_x}\,\mathrm{d}x \\ &- \chi_x\{\coth(\chi+\varphi) \\ &+ \sqrt{\coth(\chi+\varphi)^2 - 1}\}. \end{aligned} \tag{10}$$

情形 2 设 $\sigma = 1$, 可以得到 SWW 方程的周期波解

$$\begin{aligned} u_3 =& \frac{1}{3}\int \frac{-\chi_x^3 + b\chi_x + \chi_{xxx} + \chi_t}{\chi_x}\,\mathrm{d}x \\ &+ \chi_x\{\tan(\chi+\varphi) \\ &- \sqrt{\tan(\chi+\varphi)^2 + 1}\}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} u_4 =& \frac{1}{3}\int \frac{-\chi_x^3 + b\chi_x + \chi_{xxx} + \chi_t}{\chi_x}\,\mathrm{d}x \\ &- \chi_x\{\cot(\chi+\varphi) \\ &+ \sqrt{\cot(\chi+\varphi)^2 + 1}\}. \end{aligned} \tag{12}$$

情形 3 设 $\sigma = 0$, 可以得到 SWW 方程的有理函数解

$$u_5 = \frac{1}{3}\int \frac{b\chi_x + \chi_{xxx} + \chi_t}{\chi_x}\,\mathrm{d}x - 2\frac{\chi_x}{\chi+\varphi}. \tag{13}$$

其中 $\chi(x,t)$, $\varphi(y)$ 为所示变量的任意函数.

3 SWW 方程的尖峰孤子激发及其相互作用

由于 (9)—(13) 式中都包含有任意函数 χ 和 φ, 使得系统的解变得相当丰富. 本文的这一部分是以孤波解 u_2(10 式) 的势函数 u_{2y} 为例, 讨论 SWW 方程的尖峰孤子激发及其相互作用. 设

$$\begin{aligned} V =& u_{2y} \\ =& \chi_x\varphi_y\sqrt{\coth(\chi+\varphi)^2 - 1}\Big\}\Big\{\coth(\chi+\varphi) \\ &+ \sqrt{\coth(\chi+\varphi)^2 - 1}\Big\}. \end{aligned} \tag{14}$$

3.1 尖峰孤子激发

由于式 (14) 中的 χ 和 φ 的任意性, 不妨取 χ 和 φ 为如下简单形式:

$$\chi(x,t) = 1 + \exp(-|x+3-t|),$$
$$\varphi(y) = 1 + \exp(-|y-1|), \tag{15}$$

和

$$\chi(x,t) = 1 + \tanh(-|x+1-t|),$$
$$\varphi(y) = 1 + 0.1\tanh(y), \tag{16}$$

于是可以得到两种不同形状的尖峰孤子, 如图 1(a), (b) 所示 (取时间 $t=0$).

3.2　多尖峰孤子激发

如果取 χ 和 φ 为如下形式:

$$
\begin{aligned}
\chi(x,t) =& 1+2\exp(-|x+3-t|) \\
&+0.8\exp(-|x+3+t|), \\
\varphi(y) =& 1+\exp(-|y-1|),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

于是可以得到如图 2(a) 所示的多尖峰孤子 (取 $t=1$). 此外, 如果取

$$
\begin{aligned}
\chi(x,t) &= 1+\tanh(-|x+1-t|), \\
\varphi(y) &= 1+0.1\mathrm{sech}(y),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

可以得到如图 2(b) 所示的另一种类型的多尖峰孤子 (取 $t=0$).

3.3　孤子相互作用

两个孤子之间的相互作用通常表现为弹性的, 即孤子作用前后的运动速度、波幅和形状完全相同. 例如在 (14) 中, 取

$$
\begin{aligned}
\chi(x,t) &= 1+3\mathrm{sech}(x+t)+0.5\mathrm{sech}(x-t), \\
\varphi(y) &= 1+2\mathrm{sech}(y),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

于是可以得到如图 3 所示两个孤子的弹性相互作用, 时间分别取 (a) $t=-12$, (b) $t=-8$, (c) $t=0$, (d) $t=8$, (e) $t=12$. 然而, 孤子的相互作用也有非弹性的. 例如在 (14) 中, 如果取

$$
\begin{aligned}
\chi(x,t) =& 1+3\mathrm{csch}(-|x+t-1|) \\
&+\mathrm{csch}(-|x+0.3t-1|), \\
\varphi(y) =& 1+\tanh(-|y-1|),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

可以得到如图 4 所示两个孤子的非弹性相互作用, 时间分别取 (a) $t=-15$, (b) $t=-7$, (c) $t=0$, (d) $t=7$, (e) $t=15$. 从图 (4) 可以清楚看到, 两个尖峰孤子朝着同一个方向运动, 但是它们的运动速度不一样, 一个孤子追赶上另一个孤子, 然后发生碰撞, 碰撞后两个孤子的波幅和形状都发生了改变, 而且两个孤子之间的距离越来越远.

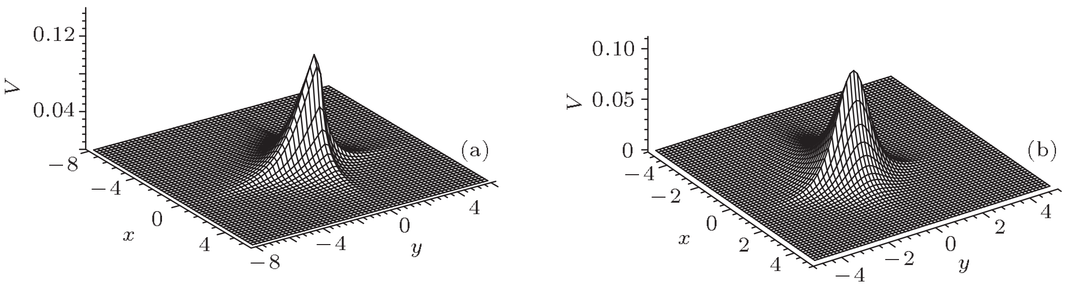

图 1　(14) 式利用 (15) 和 (16) 式得到的两种不同形状的尖峰孤子

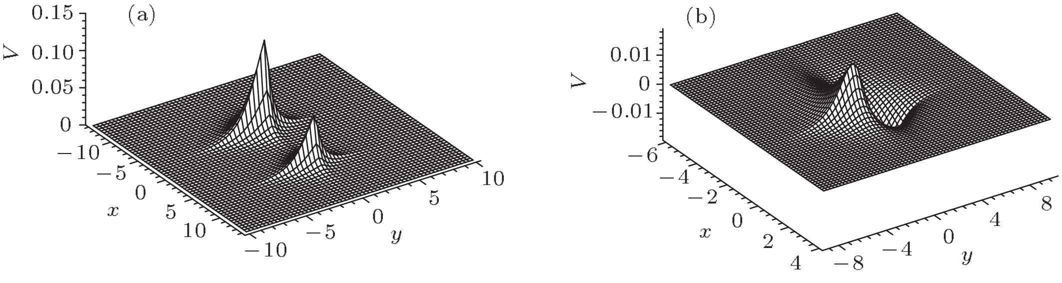

图 2　(14) 式利用 (17) 和 (18) 式得到的两种不同形状的多尖峰孤子

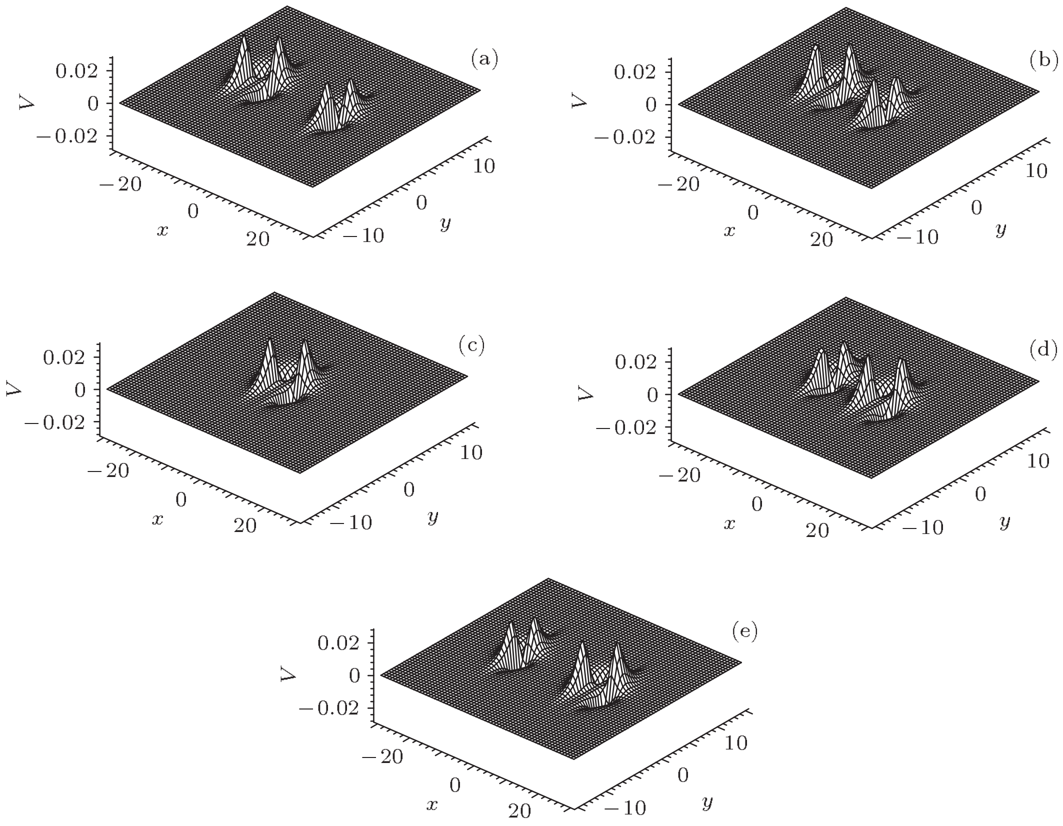

图 3 (14) 式利用 (19) 式得到的两个孤子之间的弹性相互作用

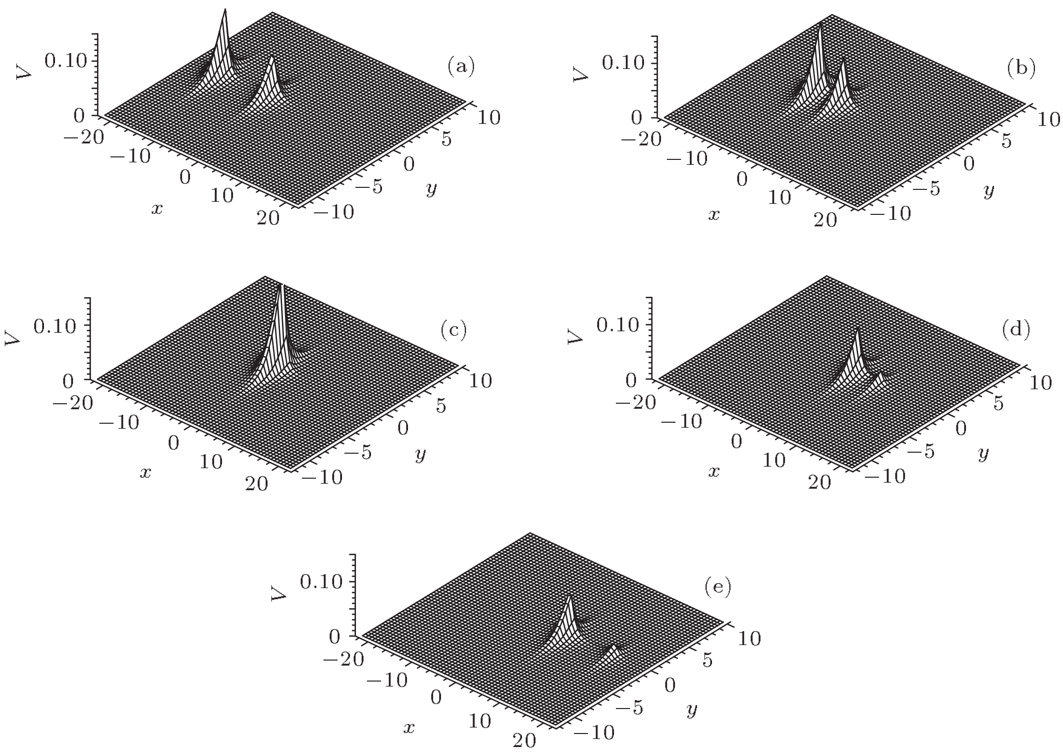

图 4 (14) 式利用 (20) 式得到的两个孤子之间的非弹性相互作用

4 结 论

本文利用改进的 Riccati 方程映射法, 得到了扩展的 (2+1) 维浅水波方程的孤波解、周期波解和变量分离解. 根据所得到的孤波解 $u_2(10)$ 式的势函数 $V = u_{2y}$, 构造出了方程的几种不同形状的尖峰孤子结构. 侧重研究和讨论了浅水波方程中孤子的相互作用, 特别是两个尖峰孤子有趣的追赶现象, 作用过程中两个孤子的波幅发生了改变, 说明了孤子 (孤立波) 的相互作用并不一定都是弹性的, 也可以是非弹性的.

作者对张解放教授的建议和指导表示感谢.

[1] Li B Q, Ma Y L 2010 *Z. Naturforsch.* **65a** 518

[2] Ma Y L, Li B Q 2010 *J. Math. Phys.* **51** 063512

[3] Ma Y L, Li B Q, Sun J Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7402 (in Chinese) [马玉兰, 李帮庆, 孙践知 2009 物理学报 **58** 7402]

[4] Li B Q, Ma Y L, Xu M P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1409 (in Chinese) [李帮庆, 马玉兰, 徐美萍 2010 物理学报 **59** 1409]

[5] Hietarinta J 1990 *Phys. Lett.* A **149** 113

[6] Radha R, Lakshmanan M 1991 *Phys. Lett.* A **197** 7

[7] Lou S Y 1995 *J. Phys. Math. Gen.* A **28** 7227

[8] Ruan H Y, Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123

[9] Lou S Y 1996 *Commun. Theor.* **26** 487

[10] Lou S Y, Tang X Y, Li J 2001 *Eue. Phys. J.* B **22** 473

[11] Lai D W C, Chow K W 1999 *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** 1847

[12] Lai D W C, Chow K W 2001 *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** 666

[13] Fang J P, Zheng C L, Chen L Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 175

[14] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese) [方建平, 郑春龙, 朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]

[15] Lü Z S, Zhang H Q 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **19** 527

[16] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **4** 670

[17] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华, 方建平 2006 物理学报 **55** 5611]

[18] Ma S H, Fang J P, Hong B H, Zheng C L 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **40** 1352

[19] Yang Z, Ma S H, Fang J P 2011 *Chin. Phys.* B **20** 040301

[20] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华, 强继业, 方建平 2007 物理学报 **56** 620]

[21] Ma S H, Fang J P, Ren Q B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4420 (in Chinese) [马松华, 方建平, 任清褒 2010 物理学报 **59** 4420]

[22] Boiti M, Leon J J, Manna M, Pempinelli F 1989 *Phys. Rev. Lett.* A **63** 1329

[23] Zhang J F, Huang W H, Zheng C L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2676 (in Chinese) [张解放, 黄文华, 郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]

[24] Zhang S L, Zhu X N, Wang Y M, Lou S Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 829

[25] Zhang S L, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 385

[26] Zhang J F, Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655

[27] Lou S Y 2003 *J. Phys.* A *Math. Gen.* **36** 3877

[28] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 695 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 695]

[29] Dai C Q, Yan C J, Zhang J F 2006 *Commun. Theor. Phys.* **46** 389

[30] Zheng C L, Fang J P, Chen L Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1468 (in Chinese) [郑春龙, 方建平, 陈立群 2005 物理学报 **54** 1468]

[31] Wazwaz A M 2010 *Studies in Mathematical Sciences* **1** 21

[32] Wang Y H, Chen Y 2011 *Commun. Theor. Phys.* **56** 672

Peaked soliton solutions and interaction between solitons for the extended (2+1)-dimensional shallow water wave equation*

Ma Song-Hua Fang Jian-Ping†

(*College of Science, Lishui University, Lishui* 323000*, China*)

(Received 14 January 2012; revised manuscript received 16 February 2012)

Abstract

By an improved Riccati mapping approach and a variable separation approach, a new family of variable separation solutions (including solitory wave solutions, periodic wave solutions, and rational function solutions) of the extended (2+1)-dimensional shallow water wave (SWW) equation is derived. According to the derived solitary wave excitation, we obtain some special peaked soliton structures and study the interaction between solitons.

Keywords: improved mapping approach, extended (2+1)-dimensional shallow water wave equation, peaked soliton, interaction between solitons

PACS: 05.45.Yv, 03.65.Ge, 03.40.Kf

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y6100257, Y6110140).

† E-mail: zjlsfjp@yahoo.com.cn