

受迫 Holmes-Duffing 系统安全域分形及时滞速度反馈控制*

尚慧琳[†]

(上海应用技术学院, 机械工程学院, 上海 200235)

(2012年3月29日收到; 2012年6月24日收到修改稿)

以受迫 Holmes-Duffing 系统为研究对象, 对系统施加时滞速度反馈控制, 研究周期激励引起的系统安全域的分形侵蚀及时滞速度反馈对分形侵蚀安全盆的控制作用. 利用 Melnikov 函数法给出时滞受控系统的安全盆的边界分形条件. 再以时滞量为变参数, 运用四阶 Runge-Kutta 方法和点映射方法数值研究了时滞对受控系统安全盆的影响规律. 结果表明在弱反馈下, 时滞量的增大能够提高安全盆边界分形的阈值, 从而抑制安全盆的分形侵蚀. 说明时滞速度反馈能够有效抑制系统的安全盆侵蚀.

关键词: 安全域侵蚀, 分形, Melnikov 函数, 时滞反馈控制

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Df, 02.30.Ks

1 引言

安全域的概念最初产生于对风浪中船舶倾覆现象的研究^[1], 进而应用到研究非线性系统的振动有界性问题上. 对于给定的系统, 其安全域被定义为所有有界解的吸引域的集合, 安全域的侵蚀常被用来解释工程结构的振动对初始条件的敏感性. 由此国内外学术界各研究领域展开了对安全域问题的广泛研究. Soliman^[2]考虑了周期激励下两自由度船舶运动方程的安全域侵蚀问题, 发现降低激励振幅或增大阻尼能够抑制安全域的分形侵蚀, 从而提高船舶航行的安全几率. 谷家扬和缪振华^[3]应用谱加速度方法数值模拟随机海浪下的横摇运动方程, 发现船舶航行在随机尾斜浪比在随机首斜浪中更易倾覆. Long 等^[4]研究系统参数对船舶横摇系统安全盆的影响, 发现风浪激励振幅的增大会导致系统的安全盆侵蚀. 在对电力系统的研究中, Marcos 等^[5]利用 SMIB 系统研究了电压崩溃

现象 (voltage collapse), 发现当输入的机械功率达到一定值时, 系统的安全域会出现边界危机 (boundary crisis) 现象. Lewis 等^[6]通过数值模拟发现时间滞后能够引起电力系统安全域的拓扑形态发生定性改变. 张强等^[7]研究了单机无穷大母线 (SMIB) 电力系统的安全域受分形侵蚀的现象, 进而对时滞反馈对系统安全域的控制作用进行了探索. 在微机电系统 (MEMS) 的研究领域, Fadi 等^[8]通过实验与 Monte-Carlo 法数值仿真研究 MEMS 共振器在交流电驱动下的安全盆侵蚀现象, 从而解释交流电频率取值所引起的 MEMS 共振器吸合 (pull-in) 现象; 对于抑制该现象的出现, Lenci 和 Rega^[9]、Fadi 和 Mohammad^[10]均提出了时滞反馈控制方法.

以上各领域对安全域的控制以被动控制为主, 如增大阻尼^[2-5], 只有极少研究^[7-10]采用了时滞反馈控制, 相比于被动控制, 时滞反馈控制这种主动控制方法更灵活, 其中反馈增益和时滞量都是可以独立调节和控制的物理参数, 有着较广阔的设计和调节空间. 由于时滞系统中系统的初始条件空间

* 国家自然科学基金 (批准号: 10902071)、上海市教委晨光计划 (批准号: 11CG61)、上海应用技术学院科学技术发展基金 (批准号: KJ2011-06) 和上海市教育委员会重点学科建设项目 (批准号: J51501) 资助的课题.

[†] E-mail: suliner60@hotmail.com

是无限维的,而多数研究由于没有给出时滞系统零时刻以前的初始状态,因此数值模拟所描述的“安全盆”只是时滞系统安全盆在零时刻的投影截面.文献 [11] 中对于时滞受控系统的安全域提出了明确的定义,在此基础上笔者对于 Holmes-Duffing 系统 [12] 和 Helmholtz 系统 [13] 安全域侵蚀现象的控制研究中均发现,在一定的反馈增益和时滞量下,时滞位移反馈能够对安全盆的侵蚀起到良好的控制作用.对于利用时滞反馈控制安全域侵蚀,常用的是时滞位移反馈 [6,8-13],而极少采用时滞速度反馈 [7,11].文献 [11] 通过数值仿真时滞反馈对一类单自由度参数激励系统安全域的控制发现,时滞速度反馈也能够抑制安全域的侵蚀,同时,相比时滞位移反馈和状态反馈,时滞速度反馈的控制参数调节范围更大.因此本文希望就利用时滞速度反馈来控制非线性系统安全域侵蚀方面做进一步探索.

本文以一类单周期激励 Holmes-Duffing 系统 [14-16] 为例,研究系统参数引起的系统安全域侵蚀现象,以及时滞速度反馈对系统安全域侵蚀的控制作用.结构安排如下:第二节应用 Melnikov 函数法得出时滞系统和无控系统的安全域的分岔条件;第三节利用数值模拟研究时滞量对系统安全盆边界和尺寸的影响规律,并验证第二节的理论预测;最后一节给出结论与讨论.

2 安全盆边界分形的条件

本文考虑如下系统

$$\ddot{x} + \varepsilon \delta \dot{x} - x + x^3 = \varepsilon f \cos(\omega t), \quad (1)$$

其中, δ 表示阻尼系数, ε 是小参数, $0 < \varepsilon \ll 1$, f 和 ω 分别表示单周期激励的频率和振幅.系统 (1) 为一个双势阱杜芬振子系统,能够描述一个轴向载荷大于第一欧拉荷载的简支欧拉梁的基谐模态的动力学响应.在周期激励下,梁的振动会表现为复杂的动力学行为,如奇怪吸引子和多稳态运动.对系统 (1) 施加线性时滞速度反馈,得到如下系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^3 - \varepsilon \delta y + \varepsilon f \cos(\omega t) \\ \quad + \varepsilon \mathbf{A}(y(t - \tau) - y), \end{cases} \quad (2)$$

其中 τ 为时间滞后量, \mathbf{A} 表示反馈增益系数.

当 $\tau = 0$ 时,系统 (2) 成为系统 (1).

系统 (1) 的无扰动无时滞系统可写成:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^3, \end{cases} \quad (3)$$

为 Hamilton 系统,方程 (3) 的平衡点有 3 个: $S(0, 0)$, $C_1(-1, 0)$ 和 $C_2(1, 0)$.由于系统 (3) 的线性化矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

在平衡点 $S(0, 0)$ 处特征方程的解 $\lambda = \pm 1$,因此该平衡点是鞍点;而在平衡点 $C_1(-1, 0)$ 和 $C_2(1, 0)$,特征方程均有两对纯虚根,因此平衡点 $C_1(-1, 0)$ 和 $C_2(1, 0)$ 为中心.无扰动系统 (3) 的 Hamilton 量为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad (5)$$

因此,具有过鞍点 $S(0, 0)$ 两条同宿轨线

$$\begin{aligned} x_{\pm}^0(t) &= \pm \sqrt{2} \operatorname{sech} t, \\ y_{\pm}^0(t) &= \mp \sqrt{2} \operatorname{sech} t \tanh t, \end{aligned} \quad (6)$$

也因此系统 (4) 的同宿轨环为

$$\begin{aligned} \Psi &= \{(0, 0)\} \cup \{x_{\pm}^0(t) = \pm \sqrt{2} \operatorname{sech}(t + t_0), \\ & y_{\pm}^0(t) = \mp \sqrt{2} \operatorname{sech}(t + t_0) \tanh(t + t_0) | t \in R\}, \end{aligned} \quad (7)$$

如图 1 所示.而当 $\mu > 0$ 时,无激励系统 (1) 原有的 3 个平衡点中 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ 均稳定, $(0, 0)$ 不稳定.即平衡点 $(0, 0)$ 仍为双曲鞍点,而平衡点 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ 则成为双曲汇点,则原同宿轨线分裂成两条稳定流形和不稳定流形 [17,18],如图 2 所示.将激励和阻尼看成摄动项,则系统 (1) 相应的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} y_0^{\pm}(t) (-\delta y_0^{\pm}(t) \\ & \quad + f \cos(\omega(t + t_0))) dt \\ &= -\frac{4}{3} \varepsilon \delta \mp \sqrt{2} \varepsilon f \pi \omega \operatorname{sech} \frac{\pi \omega}{2} \sin(\omega t_0), \end{aligned} \quad (8)$$

那么当

$$f > f_0 = \frac{2\sqrt{2}\delta}{3\pi\omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}, \quad (9)$$

则存在 t_0 使得 $M(t_0) = 0$ 且 $M'(t_0) \neq 0$,这就意味着稳定的流形与不稳定的流形将横截相交,出现同宿分岔,因此系统 (1) 的安全域边界会出现分形.

(9) 式中的 f_0 即为系统 (1) 安全域边界分形的激励振幅阈值. 而当

$$\delta > \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\omega f \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2}, \quad (10)$$

系统 (1) 的稳定流形在 Poincare 截面上不会横截相交, 因此安全域边界分形可以得到抑制. 由 (10) 式和 (11) 式可知, 增大系统的激励振幅会引起系统的安全域侵蚀, 但增大系统的阻尼系数却可以控制安全域的侵蚀.

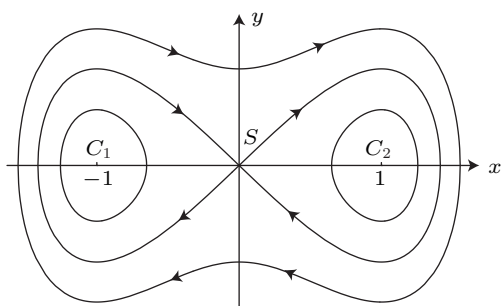


图 1 相平面上的同宿轨道

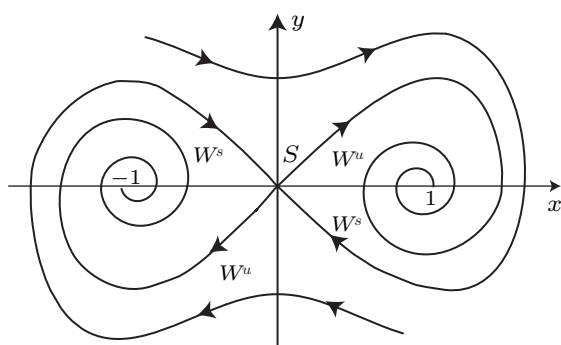


图 2 稳定流形与不稳定流形

对于时滞速度反馈控制系统 (2), 在时滞反馈项不改变原无激励系统 (1) 的平衡点稳定性的前提下, 仍可将反馈项当成扰动项, 运用 Melnikov 函数法预测安全域分形的条件. 因此运用 Melnikov 函数法的前提是系统 (2) 中时滞量的取值必须小于无激励系统 (2) 的平衡点第一次稳定性切换的临界值. 无激励系统 (2) 的平衡点 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ 发生 Hopf 分岔的必要条件为

$$\begin{cases} -\omega^2 + 2 = \varepsilon A \omega \sin(\omega\tau), \\ \varepsilon \delta \omega = \varepsilon A \omega \cos(\omega\tau) - \varepsilon A \omega. \end{cases} \quad (11)$$

由于 $\delta > 0, \varepsilon > 0, A > 0$ 和 $\omega > 0$, 上式无实根. 因此, 平衡点 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ 的稳定性不随时滞量而改变. 同理, 平衡点 $(0, 0)$ 也不会发生稳定性切换. 因此在全时滞取值范围内, 系统的三个平衡点均不会发生稳定性切换. 这时, 可以将时滞反馈项看成是扰动项. 系统 (2) 的无扰动系统和经过鞍点的同宿轨道与无时滞控制系统 (1) 相同, 分别为 (3) 和 (4) 式. 将阻尼项、外激励项以及时滞反馈项均当成扰动项, 则系统 (2) 的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M(t_0) = & \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} y_0^\pm(t) (-\delta y_0^\pm(t) \\ & + f \cos(\omega(t + t_0)) \\ & + A(y_0^\pm(t - \tau) - y_0^\pm(t))) dt \\ = & -\frac{4}{3}\varepsilon\delta - \frac{4}{3}\varepsilon A - 4\varepsilon A \operatorname{csch} \tau (\tau \\ & - 2 \coth \tau + 2\tau \operatorname{csch}^2 \tau) \\ & \mp \sqrt{2}\varepsilon f \pi \omega \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2} \sin \omega t_0, \end{aligned} \quad (12)$$

由于对 $\tau \geq 0$ 始终有

$$\operatorname{csch} \tau (\tau - 2 \coth \tau + 2\tau \operatorname{csch}^2 \tau) \geq -\frac{1}{3}. \quad (13)$$

因此

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3}\varepsilon\delta - \frac{4}{3}\varepsilon A - 4\varepsilon A \operatorname{csch} \tau (\tau \\ - 2 \coth \tau + 2\tau \operatorname{csch}^2 \tau) \leq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

令

$$\begin{aligned} P(\tau) = & \frac{2\delta}{3A} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}\pi}{2A} f \omega \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2} \\ & + 2 \operatorname{csch} \tau (\tau - 2 \coth \tau + 2\tau \operatorname{csch}^2 \tau), \end{aligned} \quad (15)$$

当 $P(\tau) > 0$ 时, (12) 式中 $M(t_0)$ 不存在简单零点, 因此系统的安全域边界分形可以得到控制. 给定系统 (1) 和 (2) 的参数取值:

$$\varepsilon = 0.1, \delta = 0.1, \omega = 0.5, A = 2 \quad (16)$$

则不同激励振幅下函数 $P(\tau)$ 随时滞的变化情况如图 3 所示. 根据图 3, 当 $f = 0.6$ 且 $\tau = 0$ 时, 安全域分形. 当时滞从 0 增大到 0.732324, 系统 (2) 的安全域仍然分形; 但当 $\tau > 0.732324$ 时, 系统安全域边界光滑不分形. 对于 $f = 1.2$, 当 $\tau = 0$ 时, 安全域边界分形; 当时滞量位于 0 到 1.19293 之间, 安全域仍然分形; 当 $\tau > 1.19293$ 时, 系统安全域边界不

分形. 而对于安全域边界拓扑形态随时滞量的变化, 我们将在下一节中通过数值仿真来研究.

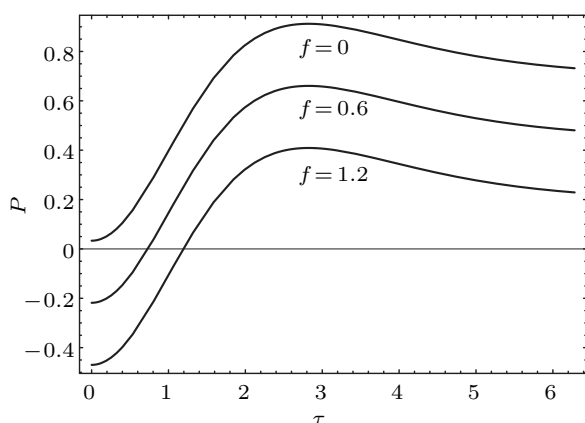


图3 不同激励振幅取值下函数 $P(\tau)$ 随时滞的变化图

3 安全盆的拓扑形态演变

由于在时滞反馈控制系统 (2) 在零时刻以前没有信号返回到系统, 可以给定初始条件为 $x(t) = x_0, y(t) = y_0 (t = 0)$ 和 $x(t) = y(t) = 0 (-\tau \leq t < 0)$. 因此, 系统安全盆应为位于 $t = 0$ 时刻状态平面 $x(0) - y(0)$ 上的所有有界解吸引域的集合. 在文献 [16] 中, 系统无扰的安全盆为相空间的一个有界区域, 即由未扰动系统 (3) 的稳定流形与不稳定流形围成的区域来定义. 在系统受扰动作用后, 若从此有界区域内部初始点出发的轨线在演化某给定的时间后逃逸出此有界区域, 将导致结构的破坏. 为便于与时滞系统的 Melnikov 函数方法所得的结果进行比较, 本节选取一个有界区域 D :

$$D = \{(x(t), y(t)) \mid -\sqrt{2} \leq x(t) \leq \sqrt{2}, -2 \leq y(t) \leq 2\}, \quad (17)$$

该区域包含了系统 (1) 和 (2) 的所有奇点和两条同宿轨线. 当 $t = 0$ 时, 本文在 $-1.5 \leq x(0) \leq 1.5, -0.8 \leq y(0) \leq 0.8$ 这样一个初始平面内运用 Runge-Kutta 法和点映射方法来刻画安全域, 其中初始点的个数为 480×240 . 即在初始轴 $x(0)$ 方向将 $[-1.5, 1.5]$ 划分为 479 等份, 由此产生 480 条平行于 $y(0)$ 轴的格线; 而在对应的 $y(0)$ 方向将 $[-0.8, 0.8]$ 划分为 239 等份, 产生 240 条相应的格线; 平行 $x(0)$ 轴和平行于 $y(0)$ 轴的格线相交, 将产生 480×240 个格点, 这些格点就是系统解的初

始值. 由于研究的是系统的长期动力学行为, 则当系统响应在 10000 个参数激励周期内如果仍未逃逸出有界区域 D , 则认为此解是安全有界的, 否则则认为不安全. 在安全盆图形中, 黑色区域对应于有界解的吸引域, 即安全域, 而空白区域则对应于逃逸解的吸引域.

以下研究系统 (2) 的参数取值如 (16) 式, 而激励振幅 f 取不同值时, 安全域边界随时滞的变化规律. 图 4 和图 5 分别对应 $f = 0.6$ 和 $f = 1.2$ 时, 系统 (2) 的安全域的拓扑形态随时滞量变化的演变图. 如图 4 所示, 对于无时滞反馈控制的情况下 (见图 4(a)), 安全域均为左右不中心对称的分形结构; 随着时滞量的增大, 安全域左右不中心对称的结构尺寸越来越大, 尽管当时滞量从 0 增大到 0.7 时 (见图 4(a)—4(d)), 安全域边界仍然分形; 此后, 当时滞量进一步增大 (见图 4(e) 和 4(f)), 安全域边界变得光滑而不分形, 这与图 4(a)—4(d) 有本质区别, 但与前面类似的是, 安全域左右两部分结构尺寸增大, 同时越来越靠近. 这与第二部分图 3 中利用时滞系统 Melnikov 函数法算得的使得安全域边界不分形的边界值 $\tau = 0.732324$ 非常符合. 类似的现象也出现在图 5 中. 从图 5 可看出, 当时滞量从 0 增大到 1.1 时 (见图 5(a)—5(d)), 安全域边界仍然分形; 此后, 当时滞量进一步增大 (见图 5(e) 和 5(f)), 安全域边界变得光滑而不分形, 这与第二部分利用时滞系统 Melnikov 函数法算得的使得安全域边界不分形的参数条件 $\tau = 1.19293$ 也基本一致. 由这些数值结果可见, 当反馈增益系数大于零时, 安全域的尺寸会随着时滞量的增大而增大, 同时边界也会越来越光滑. 因此可以看出, 时滞速度反应用于控制系统 (1) 的安全域的侵蚀很有效.

4 结论

本文讨论受迫 Holmes-Duffing 系统的安全盆的侵蚀情况及时滞速度反馈对系统安全域的控制效果和机理. 依据全局扰动方法, 本文分析了系统的同宿轨分岔, 计算了其轨道方程, 通过构造 Melnikov 函数给出了原系统和时滞速度反馈控制系统产生安全域侵蚀现象的必要条件. 用 Melnikov 函数算得的时滞受控系统的安全域分形阈值, 与安全盆方法算得的系统的阈值比较接近, 说明了在时滞非

线性系统中运用 Melnikov 函数法预测安全域分形阈值的的有效性和可行性. 研究发现, 在周期激励下, 当周期激励振幅足够大时, Holmes-Duffing 系统的安全域会出现分形边界, 这意味着系统的安全域受到侵蚀. 而对该系统引入时滞速度反馈, 那么在反馈增益大于零的情况下, 通过调节时滞量的大小可

以控制系统的安全域侵蚀现象: 安全域的尺寸会随着时滞量的增大而增大, 当时滞量增大到一定程度, 原来受到侵蚀的安全域边界会变得光滑而不分形, 即通过增大时滞量能够提高安全域边界分形的阈值, 从而控制安全域的分形侵蚀. 研究结果表明时滞速度反馈是控制系统的安全盆侵蚀的有效策略.

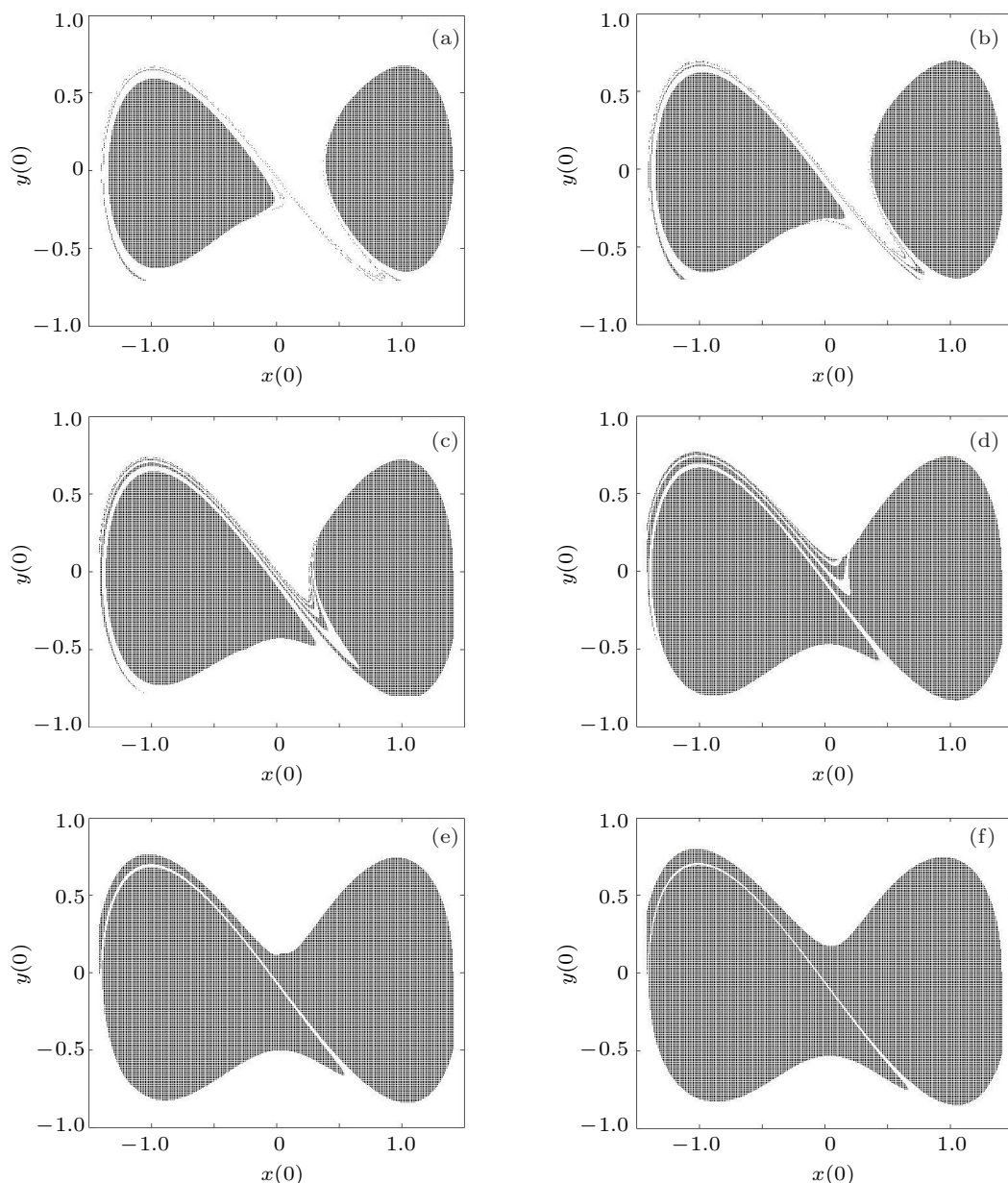


图 4 $f = 0.6$ 时系统 (2) 的安全域随时滞量的演变图 (a) $\tau = 0$; (b) $\tau = 0.25$; (c) $\tau = 0.5$; (d) $\tau = 0.7$; (e) $\tau = 0.8$; (f) $\tau = 1.0$

在利用了 Melnikov 函数法来预测时滞反馈控制系统安全域边界分形的条件时, 必须满足时滞量的取值不引起系统动力学行为的定性改变. 于是在运用时滞反馈控制非线性系统安全域侵蚀的时候,

必须要研究时滞量的调节所带来的系统的稳定性变化. 对多个单自由度非线性系统施加时滞位移反馈发现, 一旦时滞量超过了无激励系统的平衡点稳定性切换的临界值, 时滞反馈系统的动力学行为

发生了定性改变,就很难预测反馈对于系统安全域的控制作用^[11-13];甚至于当时滞量达到一定程度,系统的安全域侵蚀程度反而会随着时滞量的增大而加剧^[11].而本文中,在时滞速度反馈的控制下,Holmes-Duffing 系统并不存在平衡点稳定性切换的时滞临界值.这就意味着,时滞速度反馈下系统的安全域侵蚀会随时滞量的增大而越来越轻,同时安

全域的尺寸随着时滞量单调递增.因此与时滞位移反馈相比,时滞速度反馈作为一个单通道控制,反馈增益和时滞量有着更广阔的设计和调节空间,这也正是时滞速度反馈的优越之处.而在出现随机扰动的情况下,考察时滞速度反馈对于非线性系统安全域侵蚀的控制的鲁棒性则成为我们下一步工作的目标.

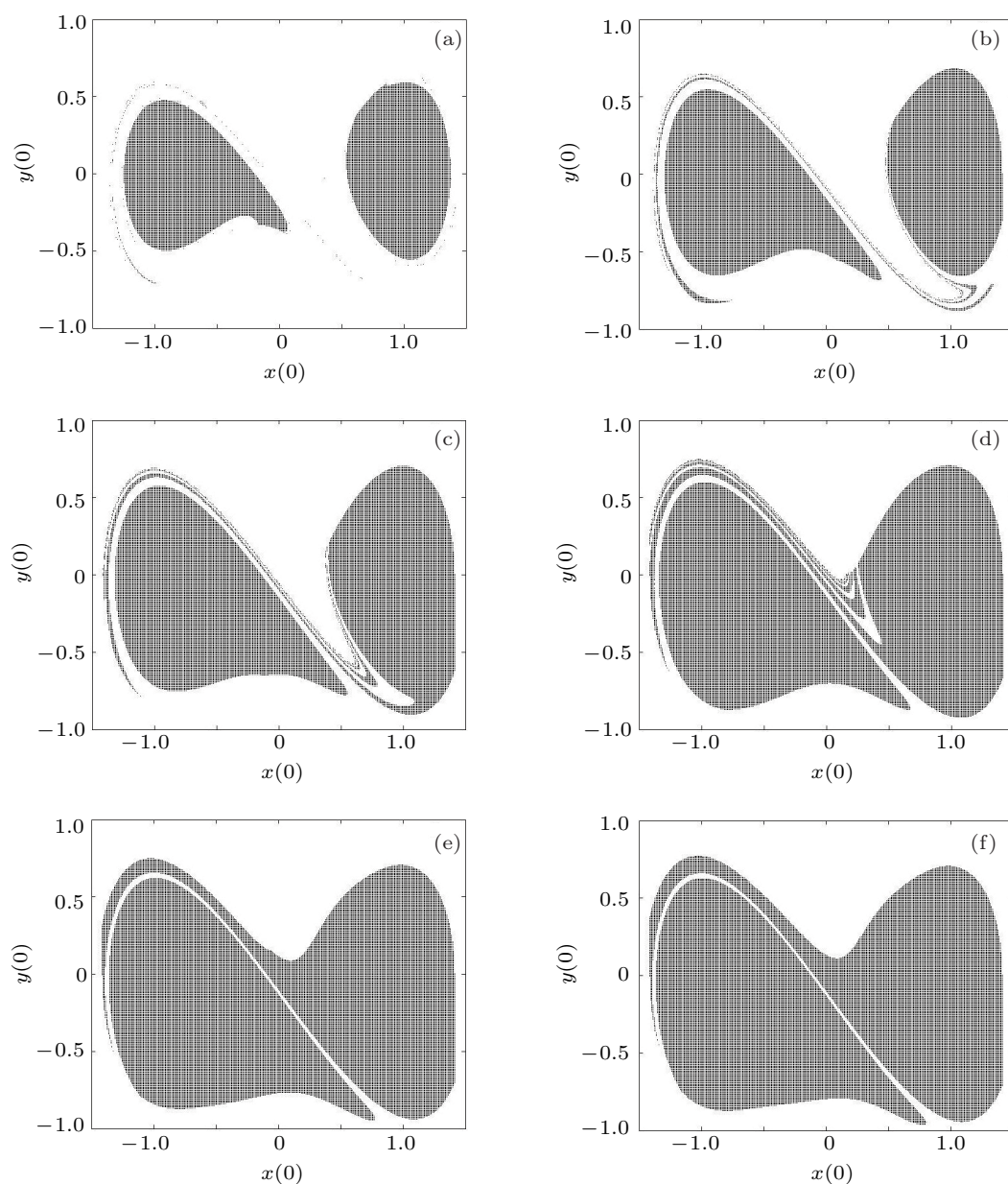


图5 $f = 1.2$ 时系统 (2) 的安全域随时滞量的演变图 (a) $\tau = 0$; (b) $\tau = 0.5$; (c) $\tau = 0.8$; (d) $\tau = 1.1$; (e) $\tau = 1.3$; (f) $\tau = 1.5$

- [1] Thompson J M T, Rainey F C T, Soliman M S 1995 *Philosophical Transactions of the Royal Society* **332** 149
- [2] Soliman M S 1995 *J. Sound Vib.* **182** 618
- [3] Gu J Y, Miao Z H 2005 *Journal of Jiangsu University of Science and Technology (Natural Science Edition)* **19** 6 (in Chinese) [谷家扬, 缪振华 2005 江苏科技大学学报(自然科学版) **19** 6]
- [4] Long Z J, Lee S K, Kim J Y 2010 *Ocean Engineering* **37** 418
- [5] Marcos S H C, Lopes S R, Viana R L 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **15** 417
- [6] Lewis C P, Uçar A, Bishop S R 1998 *Transactions of the Institute of Measurement and Control* **20** 29
- [7] Zhang Q, Wang B H, Yang C W 2005 *Power System Technology* **29** 63 (in Chinese) [张强, 王宝华, 杨成梧 2005 电网技术 **29** 63]
- [8] Fadi M A, Mohammad I Y, Hassen M O 2009 *Smart Material Structure* **19** 045013
- [9] Lenci S, Rega G 2006 *J. Micromechanics and Microengineering* **16** 390
- [10] Fadi M A, Mohammad I Y 2010 *Smart Material Structure* **19** 035016
- [11] Shang H L, Xu J 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **41** 1880
- [12] Shang H L 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 010502
- [13] Shang H L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 070501 (in Chinese) [尚慧琳 2011 物理学报 **60** 070501]
- [14] Sun Z K, Xu W, Yang X L, Fang T 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 705
- [15] Gan C B 2006 *Nonlin. Dyn.* **45** 305
- [16] Gan C B, He S M 2007 *Acta Mech. Sin.* **23** 577
- [17] Stephen W 2003 *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (2nd Ed.) (New York: Springer-Verlag) p62
- [18] Hu H Y 2000 *Applied Nonlinear Dynamics* (Beijing: Aviation Industry Press) p176 (in Chinese) [胡海岩 2000 应用非线性动力学(北京: 航空工业出版社) 第 176 页]

Fractal eroded safe basins in a forced Holmes-Duffing system and its control by delayed velocity feedback*

Shang Hui-Lin[†]

(School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China)

(Received 29 March 2012; revised manuscript received 24 June 2012)

Abstract

A forced Holmes-Duffing system is considered in this paper. A delayed velocity feedback is applied to the system. The erosion of safe basin, caused by the periodic excitation, and the effects of delayed velocity feedback on the controlling of the fractal eroded safe basin are investigated. The conditions of fractal erosion of the basin boundary are obtained by the Melnikov method. Then considering the time delay as a variable parameter, the evolutions of safe basin with time delay are presented numerically by the 4th Runge-Kutta and the point-to-point mapping method. It is found that the increase of time delay can enhance the threshold of the fractal erosion of the basin boundary under a weak and positive feedback gain so as to reduce the basin erosion. These imply that the delayed velocity feedback can control the basin erosion of the system effectively.

Keywords: erosion of safe basin, fractal, Melnikov function, delayed feedback control

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Df, 02.30.Ks

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10902071), the "Twilight" Program of Shanghai Education Commission, China (Grant No. 11CG61), Foundation of Science and Technology of Shanghai Institute of Technology, China (Grant No. KJ2011-06), and Shanghai Leading Academic Discipline Program, China (Grant No. J51501).

[†] E-mail: sulin60@hotmail.com