

光学微腔中少光子数叠加态的耗散动力学*

文洪燕¹⁾ 杨杨²⁾ 韦联福^{1)2)†}

1) (西南交通大学量子光电实验室, 成都 610031)

2) (中山大学光电材料与技术国家重点实验室, 广州 510275)

(2012年2月11日收到; 2012年3月8日收到修改稿)

通过考察耗散光学腔中少光子数叠加态的 Wigner 函数随时间的变化行为, 揭示其非经典特性的动力学演化. 结果表明, 初始时 Wigner 函数为负的少光子数叠加态, 在耗散过程中其负性逐渐减小直至消失, 并最终达到一个稳定的正值. 但这并不意味着耗散量子态非经典特性的完全消失. 实际上, 作为非经典特性的另一个重要参量, 光子的二阶关联函数 $g^{(2)}(0)$ ($g^{(2)}(0) < 1$ 意味着光子是非经典地反聚束) 是一个耗散动力学不变的物理量. 我们证明, 光子的二阶反关联函数 $g^{(2A)}(0)$ 却是一个随着耗散而改变的物理参量, 从而可以用于描述光学微腔中光量子态的耗散动力学行为. 最后, 我们给出一个在实验上如何制备少光子数叠加态并对其 Wigner 函数进行探测的方案.

关键词: 少光子数叠加态, 耗散光学微腔, Wigner 函数, 反聚束

PACS: 42.50.Dv

1 引言

众所周知, 量子态的测量一直深受人们关注. 现今对光场量子态的实验测量主要是通过测量与波函数或密度矩阵等价的 Wigner 函数来完成的^[1]. 这是因为 Wigner 函数是一个定义在相空间上的实函数, 它具有准概率分布函数的性质, 包含了所对应量子态的全部信息. 因此, 量子态 Wigner 函数的重构测量在光量子行为的研究中起着重要的作用. 一旦确定了 Wigner 函数, 量子态的所有信息 (譬如某些非经典性质) 就可以得到^[2,3]. 例如, 这个准概率分布的负性^[4] 直接地对应于量子态的某些非经典性质^[5-10]. 然而, 实际系统中量子态光场不可避免地要与周围环境发生相互作用, 从而造成退相干. 鉴于光场退相干现象在模拟光量子信息过程和光量子计算等研究中的重要作用, 耗散光学微腔中量子态的时间演化行为的研究就显得尤为关键. 实际上, 目前的许多研究主要致力于研究叠加量子态的退相干和衰减的整体行为, 且忽略了其细节 (如

耗散演化的末态以及耗散过程中量子态物理效应的改变等) 的探究^[11-14].

光学微腔中的少光子数叠加态在当今的光量子信息研究中有着重要的意义. 一方面, 由于严格的单光子发射实际上是很难实现的^[15], 因此大多数制备单光子态实验实际上所得到的光子辐射仍然包括有真空态和两光子数乃至更高光子数态 (只不过它们的概率较小); 另一方面, 即使对光学微腔中精确的单光子态而言, 也还存在着腔场耗散所导致的动力学演化, 因而如何对其耗散特性进行表征也是一个必须面对的问题. 本文以较为实际的少光子数叠加态为例, 通过计算其所对应 Wigner 函数的耗散动力学来研究这一典型量子态中各种物理性质, 特别是其非经典特性的演变. 虽然本文的研究是以典型的少光子量子态为例进行的, 但很容易推广到其他光场量子态以及其他耗散量子系统动力学行为的研究.

本文具体安排如下: 第二部分给出光学微腔中少光子数叠加态 Wigner 函数的解析表达式, 并研究其如何随腔的耗散而演变; 在第三部分, 通过数

* 国家自然科学基金 (批准号: 90921010, 11174373) 资助的课题.

† E-mail: weilianfu@gmail.com

值研究的方法具体讨论 Wigner 函数的负性如何随时间演变. 结果表明, 初始时 Wigner 函数为负的少光子数叠加态在耗散过程中其负性逐渐减小直至消失, 并最后达到一个稳定的正值. 这一现象似乎意味着这一量子态的非经典性将逐渐消失. 然而, 通过具体地计算其二阶关联函数 $g^{(2)}(0)$ 的耗散动力学演化特性, 我们发现光场的二阶关联函数是一个耗散动力学不变的物理量. 反之, 光场的二阶反关联函数 $g^{(2A)}(0)$ 却是一个随着耗散而改变的物理量. 需要指出的是, 对光学微腔而言, 室温下的热涨落并不重要 (故可看做零温量子系统), 因而耗散的末态必定是光场的真空态. 当然, 对非零温量子光学系统而言, 其耗散的末态将是一个热场态. 在第四部分我们将给出一个在实验上制备少光子数叠加态并对 Wigner 函数进行探测的方案. 最后一节是本文工作的总结.

2 耗散光学腔中的少光子数叠加态的 Wigner 函数

通常的 Wigner 函数是通过特征函数 $C(\lambda, \lambda^*)$ ^[16] 做傅里叶变换来定义的:

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda C(\lambda, \lambda^*) \times \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda). \quad (1)$$

这里 λ 和 α 是相空间中的复参数, 而对应特征函数的定义为

$$C(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}[\rho \exp(\hat{a}^\dagger \lambda - \hat{a} \lambda^*)], \quad (2)$$

其中 ρ 是所讨论量子态的密度矩阵, \hat{a}^\dagger 和 \hat{a} 分别为光场的产生算符和湮灭算符.

不失一般性, 这里我们讨论单光子态 $|1\rangle$ 和真空态 $|0\rangle$ 及双光子激发态 $|2\rangle$ 的相干叠加. 在没有耗散的腔场中, 它可表示为如下的波函数形式:

$$|\psi(0)\rangle = C_0|0\rangle + C_1|1\rangle + C_2|2\rangle, \quad (3)$$

其中 $C_0 = |C_0|e^{i\phi}$, $C_1 = |C_1|$ 和 $C_2 = |C_2|e^{i\varphi}$ 是各数态的复振幅. 在 Fock 态表象下, 我们有^[17]:

$$\begin{aligned} &\langle n|\Delta(\alpha, \alpha^*)|m\rangle \\ &= \frac{(-1)^m}{\pi} \sqrt{\frac{m!}{n!}} (2\alpha)^{n-m} e^{(-2|\alpha|^2)} L_m^{n-m}(4|\alpha|^2), \\ &n, m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\Delta(\alpha, \alpha^*)$ 是 Wigner 算符: $\Delta(\alpha, \alpha^*) = \int d^2z \exp[z(\hat{a}^\dagger - \alpha^*) - z^*(\hat{a} - \alpha)]/2\pi^2$, 并且满足 $n > m$, $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. 因此, 很容易地得到这一少光子数叠加纯态的 Wigner 函数:

$$\begin{aligned} &W(\alpha_0, \alpha_0^*, 0) \\ &= \frac{2}{\pi} [|C_0|^2 - |C_1|^2 L_1^0(4|\alpha_0|^2) \\ &\quad + |C_2|^2 L_2^0(4|\alpha_0|^2)] \\ &\quad \times \exp(-2|\alpha_0|^2) + \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \\ &\quad \times \exp(-2|\alpha_0|^2) |C_0 C_2| |\alpha_0|^2 \\ &\quad \times \cos(2\theta - \varphi + \phi) \\ &\quad - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \exp(-2|\alpha_0|^2) \\ &\quad \times |C_1 C_2| |\alpha_0| \cos(\theta - \varphi) L_1^1(4|\alpha_0|^2) \\ &\quad + \frac{8}{\pi} \exp(-2|\alpha_0|^2) |C_0 C_1| |\alpha_0| \\ &\quad \times \cos(\theta + \phi). \end{aligned} \quad (5)$$

这里,

$$L_n^{(J)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+J)!}{(n-k)!(J+k)! k!} x^k \quad (6)$$

是连带拉盖尔多项式^[18].

现在我们讨论光学微腔中实际存在着的耗散, 如何影响少光子数叠加态 (3) 的 Wigner 函数分布特性. 在光学波段, 室温热涨落是非常微小的 ($\langle n \rangle_{th} = 1/[\exp(\hbar\nu/\kappa_B T) - 1] \rightarrow 0$, $\hbar\nu/\kappa_B T > 1$), 因而我们的微腔可以看成是温度为零、没有热光子的纯泄露光学腔. 因而其中的量子态演化可由如下的主方程^[19,20]

$$\frac{d\rho}{dt} = -\kappa(\hat{a}^\dagger \hat{a} \rho + \rho \hat{a}^\dagger \hat{a} - 2\hat{a} \rho \hat{a}^\dagger) \quad (7)$$

来描述, 其中 κ 是泄露耗散系数. 进而, 量子态 Wigner 函数的演化方程可表示为

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} W(\alpha, \alpha^*) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda \frac{dC(\lambda, \lambda^*)}{dt} \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda), \end{aligned} \quad (8)$$

所以,

$$\begin{aligned} \frac{dC(\lambda, \lambda^*)}{dt} &= \text{Tr} \left[\frac{d\rho}{dt} \exp(\lambda \hat{a}^\dagger - \hat{a} \lambda^*) \right] \\ &= \kappa \text{Tr} [(2\hat{a} \rho \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \rho - \rho \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &\quad \times \exp(\lambda \hat{a}^\dagger - \hat{a} \lambda^*)]. \end{aligned} \quad (9)$$

另一方面, 方程 (8) 可改写为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(\alpha, \alpha^*) &= 2\kappa W^{[\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger]}(\alpha, \alpha^*) - \kappa W^{[\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho]} \\ &\times (\alpha, \alpha^*) - \kappa W^{[\rho\hat{a}^\dagger\hat{a}]}(\alpha, \alpha^*), \quad (10) \end{aligned}$$

这里 $W^{[x]}(\alpha, \alpha^*)$ 定义为

$$\begin{aligned} W^{[x]}(\alpha, \alpha^*) &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda C^{[x]}(\lambda, \lambda^*, t) \\ &\times \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda), \quad (11) \\ C^{[x]}(\lambda, \lambda^*) &= \text{Tr}[x \exp(\lambda\hat{a}^\dagger - \hat{a}\lambda^*)]. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} W^{[\rho]}(\alpha, \alpha^*) &= W(\alpha, \alpha^*), \\ C^{[\rho]}(\lambda, \lambda^*) &= C(\lambda, \lambda^*), \end{aligned}$$

故:

$$\begin{aligned} C^{[\rho\hat{a}^\dagger\hat{a}]}(\lambda, \lambda^*) &= \left[\frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(-\frac{\partial}{\partial\lambda^*} \right) \right] C(\lambda, \lambda^*) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{\lambda^*}{2} \right) \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\partial}{\partial\lambda^*} \right) C(\lambda, \lambda^*), \quad (12) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda) \frac{\partial}{\partial\lambda} C(\lambda, \lambda^*) \\ &= \alpha^* W(\alpha, \alpha^*), \\ &\frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda) \frac{\partial}{\partial\lambda^*} C(\lambda, \lambda^*) \\ &= -\alpha W(\alpha, \alpha^*), \\ &\frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda) \lambda^* C(\lambda, \lambda^*) \\ &= \frac{\partial}{\partial\alpha} W(\alpha, \alpha^*), \\ &\frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda) (-\lambda) C(\lambda, \lambda^*) \\ &= \frac{\partial}{\partial\alpha^*} W(\alpha, \alpha^*). \quad (13) \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} W^{[\rho\hat{a}^\dagger\hat{a}]}(\alpha, \alpha^*) &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda C^{[\rho\hat{a}^\dagger\hat{a}]}(\lambda, \lambda^*) \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda \left[\alpha\alpha^* + \frac{1}{2} - \alpha^* \frac{\partial}{\partial\alpha^*} - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha} \right] C(\lambda, \lambda^*) \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\lambda \left[\alpha^* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha} \right] \left[\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times C(\lambda, \lambda^*) \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda) \\ &= \left[\alpha^* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha} \right] \left[\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \right] W(\alpha, \alpha^*). \quad (14) \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{cases} W^{[\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger]}(\alpha, \alpha^*) \\ = \left[\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \right] \left[\alpha^* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha} \right] W^{[\rho]}(\alpha, \alpha^*), \\ W^{[\hat{a}^\dagger\hat{a}\rho]}(\alpha, \alpha^*) \\ = \left[\alpha^* - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha} \right] \left[\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \right] W^{[\rho]}(\alpha, \alpha^*). \end{cases} \quad (15)$$

把 (14) 式和 (15) 式带入 (10) 式, 得:

$$\begin{aligned} &\frac{dW(\alpha, \alpha^*)}{dt} \\ &= \kappa \left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \alpha^* \right] W(\alpha, \alpha^*), \quad (16) \end{aligned}$$

其一般解为^[11]

$$\begin{aligned} &W(\alpha, \alpha^*, t) \\ &= \frac{2}{1 - e^{-2\kappa t}} \int \frac{d^2\alpha_0}{\pi} \exp \left[-\frac{2}{1 - e^{-2\kappa t}} \right. \\ &\quad \left. \times |\alpha - \alpha_0 e^{-\kappa t}|^2 \right] W(\alpha_0, \alpha_0^*, 0). \quad (17) \end{aligned}$$

对于我们所讨论的初始态 $|\psi(0)\rangle$, 把初始时刻的 Wigner 函数 (5) 代入 (17) 式即得到如下的时间演化 Wigner 函数:

$$\begin{aligned} &W(\alpha, \alpha^*, t) \\ &= \frac{2}{\pi} \exp(-2|\alpha|^2) [|C_0|^2 - |C_1|^2 \\ &\quad \times (2e^{-2\kappa t} - 1)] L_1^0 \left[-\frac{|2\alpha e^{-2\kappa t}|^2}{1 - 2e^{-2\kappa t}} \right] \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \exp(-2|\alpha|^2) |C_2|^2 \\ &\quad \times (2e^{-2\kappa t} - 1)^2 L_2^0 \left[-\frac{|2\alpha e^{-2\kappa t}|^2}{1 - 2e^{-2\kappa t}} \right] \\ &\quad + \frac{8\sqrt{2}}{\pi} |C_0 C_2| \exp(-2|\alpha|^2 - 2\kappa t) \\ &\quad \times |\alpha|^2 \cos(2\theta - \varphi + \phi) \\ &\quad + \frac{8}{\pi} |C_0 C_1| \exp(-2|\alpha|^2 - \kappa t) |\alpha| \cos(\theta + \phi) \\ &\quad + \frac{8\sqrt{2}}{\pi} |C_1 C_2| \exp(-2|\alpha|^2 - \kappa t) |\alpha| \\ &\quad \times \cos(\theta - \varphi) [2(|\alpha|^2 - 1) \\ &\quad \times e^{-2\kappa t} + 1]. \quad (18) \end{aligned}$$

整理过程中用到了关系式^[21]:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2z}{\pi} z^n z^{*m} \exp[x_1|z|^2 + x_2z + x_3z^*] \\ &= \exp\left(-\frac{x_2x_3}{x_1}\right) \\ & \times \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{n!m!}{k!(n-k)!(m-k)!(-x_1)^{m+n-k+1}} \\ & \times x_2^{m-k} x_3^{n-k}, \operatorname{Re}(x_1) < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

和非连带拉盖尔多项式 $L_m(x, y)$ 以及厄密多项式 $H_{m,n}(x, y)$ ^[22,23] 的表达式:

$$\begin{aligned} L_m(x, y) &= \frac{(-1)^m}{m!} H_{m,n}(x, y), \\ H_{m,n} &= \frac{\partial^{m+n}}{\partial T^m \partial T'^n} \exp[-TT' + Tx \\ & + T'y] |_{T=T'=0}. \end{aligned} \quad (20)$$

3 少光子数叠加态非经典特性的演化

利用上节的时间相关 Wigner 函数, 我们可以方便地研究少光子数叠加态非经典特性 (如 Wigner 函数的负性和光子的反聚束效应等) 随有效时间 κt 而变的耗散动力学行为. 为数值计算简便起见, 我们把初态 (3) 中的复参数具体地选为: $|C_1| = \frac{1}{3}, |C_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta = \varphi = \pi, \phi = 0$. 图 1 给出了 Wigner 函数随有效时间参数 κt 而变化的特性, 图中的三维图是 Wigner 对应的相空间点 (x, p) 与 κt 的关系图, 而对应的二维图则是 $p = 0$ 时, $W(x, t)$ 随 κt 的变化特性. 图中选取的时间点分别是: $\kappa t = 0(a, a'), 0.2(b, b'), 0.35(c, c'), 3(d, d')$. 这里把含时 Wigner 函数简记为 $W(x, p, t)$: 在 (x, p) - 相空间中, $x = (\alpha + \alpha^*)/2$ 和 $p = (\alpha - \alpha^*)/(2i)$. 从图 1 可以看出:

(1) 初始时刻时, Wigner 函数明显显示出负值 (即在某些相空间点 $W(x, p) < 0$), 这意味着在最初的一段时间里, 光学微腔中的少光子数叠加态具有显著的非经典特性;

(2) 随着时间的演化, 即耗散的过程发生, Wigner 函数的负值逐渐变小最后变为正值, 这意味着耗散腔场的非经典效应在逐渐减弱, 直到完全消失, 如图 1(c) 所示, 当 $\kappa t \geq 0.35$ 时, Wigner 函数的负值消失, 即 $W(x, p) \geq 0$;

(3) 随着耗散时间的增长, 腔场态最后将稳定

于真空态 (或者是平均光子数为 0 的热场态), 此时的 Wigner 函数满足高斯分布律. 事实上, 从 (17) 式我们容易得到:

$$\begin{aligned} W(\alpha, \alpha^*, \infty) &= \frac{2}{\pi} \exp(-2|\alpha|^2) [|C_0|^2 \\ & + |C_1|^2 L_1^0(0) + |C_2|^2 L_2^0(0)] \\ &= \frac{2}{\pi} \exp(-2|\alpha|^2) [|C_0|^2 \\ & + |C_1|^2 + |C_2|^2] \\ &= \frac{2}{\pi} \exp(-2|\alpha|^2). \end{aligned} \quad (21)$$

光场量子态的非经典特性有很多, 例如, 相位正交分量的量子涨落压缩、光子的反聚束效应和亚泊松分布等. 对光场量子态非经典效应的研究一直是量子光学中的热点问题, 各种量子光场态的非经典效应都得到了深刻的揭示^[24]. 近年来, Biswas 和 Agarwal 讨论了耗散光学腔中减光子压缩态的 Mandel Q 因子随耗散环境而变的衰变行为^[11]. 他们的结果表明, Q 因子随有效时间 ($\kappa t \rightarrow \infty$) 的演变而逐渐消失. 我们上面的分析也可以看到, 作为非经典特性之一的 Wigner 函数的负性, 也是随着腔场的耗散而逐步消失的. 那么一个自然的问题是, 少光子数叠加态中的另外一些非经典特性, 如光子的反聚束效应, 又将如何随着腔的耗散而变化呢?

光场态的二阶关联函数 $g^{(2)}(0)$ 是描述光子量子统计性质的一个重要物理量, 其定义为

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle}{\langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \rangle^2}, \quad (22)$$

这里, $\langle X \rangle$ 表示所选光场量子态下光子相关算符 X 的平均值. 如果 $g^{(2)}(0) < 1$, 则该光场态中的光子呈现反聚束的非经典行为; 反之, 当 $g^{(2)}(0) > 1$ 时, 光子则是像经典粒子一样是聚束的. 利用上节给出的 Wigner 函数的耗散动力学演化, 容易考察给定少光子数叠加态中光场二阶关联函数的动力学演变. 一般地, 对于 Wigner 函数 $W(\alpha, \alpha^*, t)$ 的量子态, 光场算符^[16]

$$\hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^{\dagger})(t) = \sum_{n,m} C_{n,m} \hat{a}^{\dagger n}(t) \hat{a}^m(t) \quad (23)$$

的平均值可通过下式计算:

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^{\dagger})(t) \rangle &= \operatorname{Tr}[O(\hat{a}, \hat{a}^{\dagger})\rho(t)] \\ &= \int d^2\alpha O_S(\alpha, \alpha^*) W(\alpha, \alpha^*, t), \end{aligned} \quad (24)$$

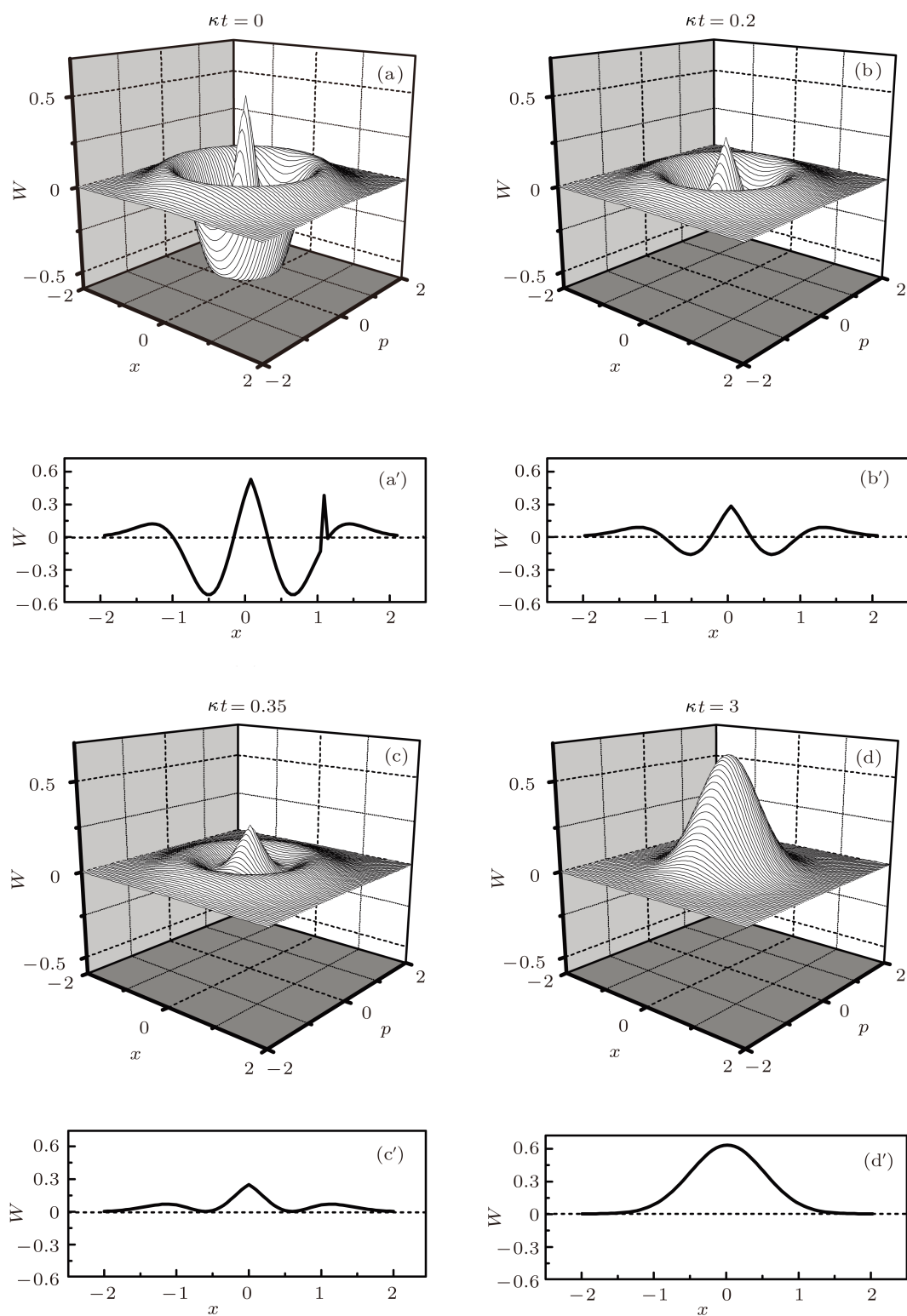


图1 耗散少光子数叠加态 Wigner 函数随 κt 的变化图

这里的 $W(\alpha, \alpha^*, t)$ 由 (17) 式给出, 而 $O_S(\alpha, \alpha^*)$ 则为 C -数 (非算符) 函数. 容易证明:

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}^\dagger \rangle(t) &= \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^*}{2} \right] C(\lambda, \lambda^*, t)|_{\lambda=\lambda^*=0}, \\ \langle \hat{a} \rangle(t) &= \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda^*} - \frac{\lambda}{2} \right] C(\lambda, \lambda^*, t)|_{\lambda=\lambda^*=0}.\end{aligned}\quad (25)$$

因而,

$$\begin{aligned}\langle O(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle(t) &= \sum_{n,m} C_{n,m} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^*}{2} \right]^n \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda^*} - \frac{\lambda}{2} \right]^m \\ &\quad \times C(\lambda, \lambda^*, t)|_{\lambda=\lambda^*=0} \\ &= \int d^2\alpha \sum_{n,m} C_{n,m} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^*}{2} \right]^n \\ &\quad \times \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda^*} - \frac{\lambda}{2} \right]^m C(\lambda, \lambda^*, t) \\ &\quad \times \exp(-\alpha\lambda^* + \alpha^*\lambda)|_{\lambda=\lambda^*=0} W(\alpha, \alpha^*, t) \\ &= \int d^2\alpha O_S(\alpha, \alpha^*) W(\alpha, \alpha^*, t).\end{aligned}\quad (26)$$

所以,

$$O_S(\alpha, \alpha^*) = \sum_{n,m} C_{n,m} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^*}{2} \right]^n$$

$$\begin{aligned}g^{(2)}(0; t) &= \frac{\langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} = \frac{2|C_2|^2 \exp(-4\kappa t)}{[\exp(-2\kappa t)]^2 \{4|C_2|^2 \exp(-2\kappa t) + 2|C_2|^2 [1 - 2\exp(-2\kappa t)] + |C_1|^2\}^2} \\ &= \frac{2|C_2|^2}{(|C_1|^2 + 2|C_2|^2)^2} = g^{(2)}(0).\end{aligned}\quad (32)$$

这表明, 二阶关联函数 $g^{(2)}(0; t)$ 是与耗散时间无关的一个动力学不变量. 这意味着, 如果初始腔场态的光子是反聚束的 ($g^{(2)}(0; t) < 1$), 那么即使其场态 Wigner 函数变为非负但光子的分布仍然是非经典的反聚束. 图 2 更直观地给出了此结果: 图 2(a) 表明二阶关联函数 $g^{(2)}(0; t)$ 是一个不随耗散而变的耗散动力学不变量; 图 2(b) 给出了二阶反关联函数取 $g^{(2A)}(0; t)$ 随耗散逐渐演化的过程. 图 2 中所取值的参数是: $\theta = \varphi = \pi, \phi = 0$, 而 $|C_1| = \sqrt{6}/6, |C_2| = \sqrt{6}/3$ (实线), $|C_1| = 1/3, |C_2| = 1/3$

$$\begin{aligned}g^{(2A)}(0; t) &= \frac{\langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle_t + 4\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_t + 2}{[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_t + 1]^2} \\ &= \frac{[2|C_2|^2 \exp(-4\kappa t)] + 4\exp(-2\kappa t) \{4|C_2|^2 \exp(-2\kappa t) + 2|C_2|^2 [1 - 2\exp(-2\kappa t)] + |C_1|^2\} + 2}{\{4|C_2|^2 \exp(-4\kappa t) + 2|C_2|^2 \exp(-2\kappa t) [1 - 2\exp(-2\kappa t)] + |C_1|^2 \exp(-2\kappa t) + 1\}^2} \\ &= \frac{\exp(-2\kappa t) \{4|C_1|^2 + 8|C_2|^2 + 2|C_2|^2 \exp(-2\kappa t)\} + 2}{\{|C_1|^2 \exp(-2\kappa t) + 2|C_2|^2 \exp(-2\kappa t) + 1\}^2}.\end{aligned}\quad (34)$$

$$\begin{aligned}&\times \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda^*} - \frac{\lambda}{2} \right]^m \\ &\times \exp(-\alpha\lambda^* + \alpha^*\lambda)|_{\lambda=\lambda^*=0}.\end{aligned}\quad (27)$$

特殊地, 当 $\hat{O} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ 时,

$$O_S(\alpha, \alpha^*)|_{\hat{O}=\hat{a}^\dagger \hat{a}} = |\alpha|^2 - \frac{1}{2},\quad (28)$$

从而,

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle(t) &= \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*, t) O_S(\alpha, \alpha^*)|_{\hat{O}=\hat{a}^\dagger \hat{a}} \\ &= \exp(-2\kappa t) \{4|C_2|^2 \exp(-2\kappa t) \\ &\quad + 2|C_2|^2 [1 - 2\exp(-2\kappa t)] \\ &\quad + |C_1|^2\}.\end{aligned}\quad (29)$$

类似地, 当 $\hat{O} = \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2$ 时,

$$O_S(\alpha, \alpha^*)|_{\hat{O}=\hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2} = |\alpha|^4 - 2|\alpha|^2 + \frac{1}{2},\quad (30)$$

故,

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle(t) &= \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*, t) O_S(\alpha, \alpha^*)|_{\hat{O}=\hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2} \\ &= 2|C_2|^2 \exp(-4\kappa t).\end{aligned}\quad (31)$$

将 (29) 和 (31) 式代入 (22) 式, 我们可以得到:

(虚线) 以及 $|C_1| = 1/5, |C_2| = 1/3$ (点画线). 当然, 我们注意到, 对真空态 $|0\rangle$ 而言, $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ 为 0, 这时的二阶关联函数就是奇异而无定义的了.

有意思的是, 如果考察与二阶关联函数相对应的二阶反关联函数

$$\begin{aligned}g^{(2A)}(0; t) &= \frac{\langle \hat{a}^2 \hat{a}^{\dagger 2} \rangle_t}{\langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle_t^2} \\ &= \frac{\langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle_t + 4\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_t + 2}{[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_t + 1]^2}\end{aligned}\quad (33)$$

的耗散动力学行为, 我们得到:

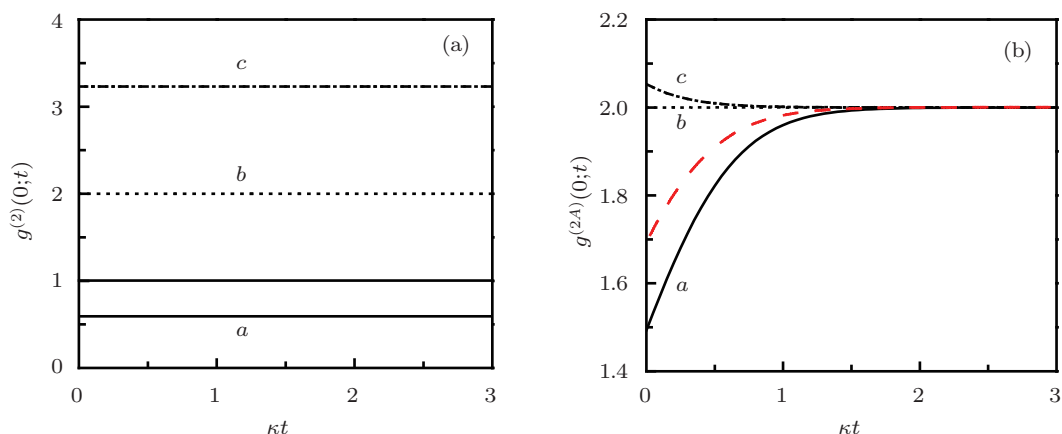


图2 耗散少光子数叠加态的二阶关联函数随时间的变化

从图 2(b) 我们可以看出, 二阶反关联函数的值随着有效耗散时间在逐渐衰减; 当时间 t 趋于无穷大时, 不管初始值为多少, 最终 $g^{(2A)}(0;t)$ 都将趋于 2, 即

$$g^{(2A)}(0;t) \rightarrow \infty = 2. \quad (35)$$

这说明, 与二阶关联函数不同, 二阶反关联函数可以用来描述光量子态统计特性的耗散动力学.

4 少光子数叠加态的制备及其 Wigner 函数的探测方案

现在我们来讨论本文所研究问题的实验可行性. 为此, 我们采用图 3 所示的一个简化装置: 一个高 Q - 值光学微腔与高激发 Rydberg 原子^[25] 相互作用的腔 QED 系统. 如图所示: 假定从发射源 O 处发射出一个原子, 依次穿过一个量子腔和一个经典微波腔, 最后在探测器 I 中被探测. 这里, 当原子通过量子腔时, 它与腔场模的相互作用由 Jaynes-Cummings 模型描述: 在旋波近似和偶极近似下, 哈密顿量可表示为 ($\hbar = 1$)

$$H = \omega_a S_z + \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{a} S_+ + \hat{a}^\dagger S_-), \quad (36)$$

其中 ω_a 和 ω_b 分别是两能级原子的跃迁频率和腔场的本征频率, S_z, S_\pm 是原子算符: $[S_+, S_-] = 2S_z, [S_z, S_\pm] = \pm S_\pm$; 而 \hat{a}^\dagger 和 \hat{a} 则分别是量子化腔场模的产生算符和湮灭算符; g 是原子 - 场的耦合强度.

假设原子初始态处于基态 $|g_1\rangle$, 而量子化腔模处于真空态 $|0\rangle$, 即 $|\psi(0)\rangle = |0, g_1\rangle$. 当原子注入量

子化腔场时, 原子 - 腔的量子态演化为

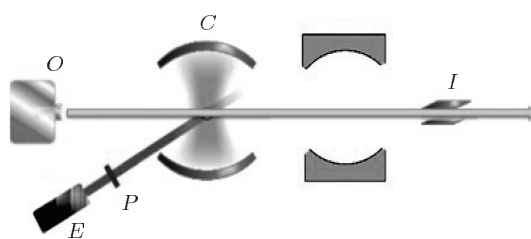
$$|\psi(t)\rangle_1 = \cos(gt_1)|0, g_1\rangle - i \sin(gt_1)|1, e_1\rangle. \quad (37)$$

设原子穿过量子腔的时间为 t_1 , 则当它连续穿过下一个经典微波场后, 量子态将受到如下的调制:

$$\begin{aligned} |g_1\rangle &\rightarrow \cos(\theta_1/2)|g_1\rangle \\ &\quad + i \exp(-i\varphi_1) \sin(\theta_1/2)|e_1\rangle, \\ |e_1\rangle &\rightarrow \cos(\theta_1/2)|e_1\rangle \\ &\quad + i \exp(i\varphi_1) \sin(\theta_1/2)|g_1\rangle, \end{aligned} \quad (38)$$

其中, θ_1 和 φ_1 为飞行时间有关的可调参量. 因此, 在原子到达探测器 I 前, 原子 - 腔系统的量子态为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_1 &= \left[\cos(gt_1) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |0\rangle + \exp(i\varphi_1) \right. \\ &\quad \times \sin(gt_1) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |1\rangle \left. \right] |g_1\rangle \\ &\quad + \left[i \exp(-i\varphi_1) \cos(gt_1) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right. \\ &\quad \times |0\rangle - i \sin(gt_1) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |1\rangle \left. \right] \\ &\quad \times |e_1\rangle. \end{aligned} \quad (39)$$


 图3 制备 $|0\rangle, |1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 叠加态的简化实验装置图

我们的目的是要制备 $|0\rangle, |1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的叠加态, 因此我们必须让另一个原子 (和前一原子相同) 再依次穿过腔和微波场. 设原子穿过量子腔的时间为 t_2 , 最后包括两个原子和量子化腔模的系统的量子态演变为

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle_2 = & |0, g_1\rangle \left[\cos(gt_1) \cos(gt_2) \right. \\
 & \times \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |g_2\rangle \\
 & + i \exp(-i\varphi_2) \cos(gt_1) \cos(gt_2) \\
 & \times \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |e_2\rangle \left. \right] \\
 & + |1, g_1\rangle \left[\exp(i\varphi_1) \sin(gt_1) \cos(gt_2) \right. \\
 & \times \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |g_2\rangle \\
 & + \exp(i\varphi_2) \cos(gt_1) \sin(gt_2) \\
 & \times \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |g_2\rangle \\
 & + i \exp(i\varphi_2 - i\varphi_1) \sin(gt_1) \cos(gt_2) \\
 & \times \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \\
 & \times \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |e_2\rangle \\
 & - i \cos(gt_1) \sin(gt_2) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \\
 & \times \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |e_2\rangle \left. \right] \\
 & + |2, e_1\rangle \left[\exp(i\varphi_2 + i\varphi_1) \sin(gt_1) \sin(gt_2) \right. \\
 & \times \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |g_2\rangle \\
 & - i \exp(i\varphi_1) \sin(gt_1) \sin(gt_2) \\
 & \times \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |g_2\rangle \left. \right], \quad (40)
 \end{aligned}$$

最后通过态选择器, 我们就可以制备出所需要的少光子叠加态. 例如, 如果原子态的选择器选择在原子最终在 $|g_1\rangle|g_2\rangle$ 态上, 那么腔模就塌缩到:

$$|\psi(t)\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \begin{aligned} & |0\rangle \cos(gt_1) \cos(gt_2) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \\ & + |1\rangle \left[\exp(i\varphi_1) \sin(gt_1) \cos(gt_2) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. + \cos(gt_1) \sin(gt_2) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right] \\ & + |2\rangle \left[\exp(i\varphi_2 + i\varphi_1) \sin(gt_1) \sin(gt_2) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right] \end{aligned} \right\} |g_1\rangle|g_2\rangle, \quad (41)$$

这里

$$\begin{aligned}
 N = & \left[\cos(gt_1) \cos(gt_2) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right]^2 + \left[\sin(gt_1) \sin(gt_2) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right]^2 \\
 & + \left[\sin(gt_1) \cos(gt_2) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right]^2 + \left[\cos(gt_1) \sin(gt_2) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \right]^2 \\
 & + \frac{1}{8} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(2gt_1) \sin(2gt_2) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)] \quad (42)
 \end{aligned}$$

是归一化系数. 如果相关的参数设置如下 $\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0, gt_1 = gt_2 = \theta_2/2 = \pi/4$, 以及 $\theta_1/2 = 7\pi/4$, 那么我们就可以得到一个典型的少光子数叠加态:

$$|\psi(t)\rangle_2 = \frac{\sqrt{6}}{6} |0\rangle + \frac{\sqrt{6}}{3} |1\rangle + \frac{\sqrt{6}}{6} |2\rangle. \quad (43)$$

测量 Wigner 函数的方法相对是比较成熟的. 比如, Lutterbach 和 Davidovich^[26] 就利用原子 Ramsey 干涉仪就能直接判断出 Wigner 函数是否为负

值. 事实上, 对于相空间点 α , 场态的 Wigner 函数也可以简单表示为^[27]

$$W(\alpha) = 2\text{Tr}[D(-\alpha)\rho D(\alpha)P] = 2\langle P \rangle, \quad (44)$$

这里 $P = \exp(i\pi\hat{a}^+\hat{a})$ 和 $D(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a})$. 而得到:

$$P_e(\phi, \alpha) = \frac{1}{2} [1 + \langle P \rangle \cos \phi]. \quad (45)$$

由此, Wigner 函数可计算为

$$W(\alpha) = 2[P_e(0, \alpha) - P_e(\pi, \alpha)]. \quad (46)$$

显然, 如果

$$P_e(0, \alpha) < P_e(\pi, \alpha), \quad (47)$$

则 Wigner 函数就取负值.

5 结论

基于耗散光学微腔中量子光场态 Wigner 函数的时间演化, 本文研究了少光子数叠加态的耗散动力学行为. 结果表明, Wigner 函数的负值随腔场的耗散逐渐消失, 但光场的二阶关联函数 $g^{(2)}(0)$ 却仍

然保持不变.

本文的讨论局限于光学微腔中的量子态, 这时室温下的平均热场光子数可以忽略, 因此相当于零温耗散, 故而微腔的耗散末态将是真空态. 当然, 本文的讨论可以推广到对非零温腔场中的量子态耗散动力学行为研究. 只是非零温的腔场的耗散行为要复杂一些, 但其耗散末态应是明确的热场态. 具体的讨论将另文给出.

感谢华南理工大学程教授的有益讨论.

-
- [1] Wigner E P 1932 *Phys. Rev.* **40** 749
- [2] Buzek V, Knight P L 1995 *Progress in Optics* in: Wolf E ed Vol. XXXIV, Edited by (Amsterdam: North Holland), and Refs. Therein.
- [3] Yang Y, Li F L 2009 *J. Opt. Soc. Am. B* **26** 830
- [4] Hillery M, O'Connell R F, Scully M O, Wigner E P 1984 *Phys. Rep.* **106** 121
- [5] Wei L F, Wang S J, Jie Q L 1997 *Chin. Sci. Bull.* **42** 1686
- [6] Yang Q Y, Sun J W, Wei L F, Ding L E 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2704 (in Chinese) [杨庆怡, 孙敬文, 韦联福, 丁良恩 2005 物理学报 **54** 2704]
- [7] Li S B, Zou X B, Guo G C 2007 *Phys. Rev. A* **75** 045801
- [8] Zhang M, Jia H Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 880 (in Chinese) [张淼, 贾焕玉 2008 物理学报 **57** 880]
- [9] Hu L Y, Fan H Y 2010 *J. Opt. Soc. Am. B* **27** 286
- [10] Lan H J, Pang H F, Wei L F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8281 (in Chinese) [蓝海江, 庞华锋, 韦联福 2009 物理学报 **58** 8281]
- [11] Biswas A, Agarwal G S 2007 *Phys. Rev. A* **75** 032104
- [12] Xu X X, Hu L Y, Fan H Y 2010 *Opt. Commun.* **283** 1801
- [13] Hu L Y, Xu X X, Wang Z S, Xu X F 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043842
- [14] de Queiros I P, Cardoso W B, de Alemida N G 2007 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40** 21
- [15] Buller G S, Collins R J 2010 *Meas. Sci. Technol.* **21** 012002
- [16] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [17] Fan H Y, Hu L Y 2009 *Opt. Commun.* **282** 4379
- [18] Gradshteyn I S, Ryzhik I M 1965 *Table of Integrals, Series and Products* (New York: Academic)
- [19] William L H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: John Wiley)
- [20] Gardiner C W, Zoller P 2000 *Quantum Noise* (Berlin: Springer)
- [21] Puri R R 2001 *Mathematical Methods of Quantum Optics* (Berlin: Springer-Verlag)
- [22] Wüünsche A 2001 *J. Comput. Appl. Math.* **133** 665
- [23] Wüünsche A 2000 *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 1603
- [24] Dodono'v V V 2002 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4** R1
- [25] Agarwal G S, Tara K 1992 *Phys. Rev. A* **46** 485
- [26] Lutterbach L G, Davidovich L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2547
- [27] Cahill K E, Glauber R J 1969 *Phys. Rev.* **177** 1882

Dissipative dynamics of few-photon superposition states in optical microcavity*

Wen Hong-Yan¹⁾ Yang Yang²⁾ Wei Lian-Fu^{1)2)†}

1) (*Quantum Optoelectronics Laboratory, School of Physics and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

2) (*State Key Laboratory of Optoelectronic Materials and Technologies, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China*)

(Received 11 February 2012; revised manuscript received 8 March 2012)

Abstract

Detections and manipulations of quantum optical state at single-photon level have received much attention in the current experiments. Here, by numerically calculating the time-evolved Wigner functions, we investigate the dynamics of the typical non-classical state, i.e., few-photon superposition states in a dissipating optical microcavity. It is shown that the negativity of their Wigner function vanishes with dissipation. But this does not imply that all the non-classical features of the dissipative quantum state disappear. In fact, it is shown that the value of the second-order correlation function $g^{(2)}(0)$ (which serves usually as the standard criterion of a typical non-classical effect, i.e., the anti-bunching of photons, if $g^{(2)}(0) < 1$) for the few-photon superposed states is dissipatedly-dynamical invariant. We find that the anti-normal-order correlation function $g^{(2A)}(0)$ varies with the cavity dissipation and thus could be used to describe the physical effects of the dissipative cavity. Finally, we discuss the experimental feasibility of our proposal with a practically-existing cavity QED system.

Keywords: few-photon superposition states, Wigner function, dissipative optical microcavity, anti-bunching

PACS: 42.50.Dv

* Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 90921010, 11174373).

† E-mail: weilianfu@gmail.com