

基于 Logistic 模型的均值突变时间序列 临界预警研究*

颜鹏程^{1)3)†} 侯威²⁾ 胡经国¹⁾

1) (扬州大学物理科学与技术学院, 扬州 225002)

2) (国家气候中心, 北京 100081)

3) (西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2012 年 1 月 14 日收到; 2012 年 2 月 22 日收到修改稿)

对物理学中的非线性方程——Logistic 方程解的稳定性进行分析, 发现当初值和参数取值一定时, 解具有从一种稳定状态突变到另一种稳定状态的特性. 突变的程度和速度与方程的控制参数有关, 可以用定义的突变强度指数来进行描述. 利用方程解的这一特性, 构造满足动力学结构突变的理想时间序列, 模拟气候系统中的均值突变, 考察物理量回复速率和回复力在系统趋近临界阈值时的临界行为, 研究其对系统突变的早期预警能力. 本文还讨论了当系统受到噪声信号干扰时, 回复速率和回复力仍然对系统突变有较好的预警. 最后, 对太平洋年代际振荡 (PDO) 指数序列进行检测, 检测结果表明早期预警信号出现在 1973 年前后, 而公认的 PDO 指数序列的突变发生在 1976/1977 年, 表明回复速率和回复力在一定程度上可以作为均值突变的早期预警信号.

关键词: 非线性, 均值突变, 回复速率, 回复力

PACS: 92.70.Aa

1 引言

突变是系统由一种稳定状态到另一种稳定状态的转变, 广泛存在于在气候变化、传染病爆发、化学反应平衡破坏、生物种群扩张等复杂非线性系统中. 托姆在 1972 年创立了突变理论, 用系统的控制参数和状态变量描述系统的突变情况, 并指出动力系统中存在着七种基本突变类型^[1]. 对于气候系统, 符淙斌等^[2]认为主要存在四种形式的突变, 即均值突变、方差突变、跷跷板突变和转折突变. 如何对这些突变进行准确地检测乃至预测一直以来都是气象学家们面临的重大难题. 传统检测突变点位置主要方法有: Mann-Kendall (M-K)、滑动 t -检验 (MTT), Cramer, Yamamoto 等检测方法^[3]. 封国林等^[4-13]发展了启发式分割 (BG) 算法、相空

间重构理论 (Q 指数算法)、滑动移除重标极差分析 (MC-R/S)、滑动移除近似熵 (MC-ApEn) 等方法对气候系统时间序列突变点的位置进行准确有效的识别与检测.

由于气候突变对人类生产生活产生极大影响^[14], 仅仅能够识别突变现象还是远远不够的. Scheffer, Carpenter, Vishweshwara 等^[15-17]研究了生物学、古气候、医学等领域的突变现象, 提出当系统趋近于临界阈值附近时, 系统将出现临界慢化现象, 并由此得出系统在突变发生前夕出现的几种可能的预警信号. 本文对系统的动力学特性做进一步深入研究, 利用 Logistic 模型构造满足动力学结构突变的时间序列, 模拟气候系统中的均值突变现象, 并考察系统的回复速率和回复力在系统趋近临界阈值时的临界行为, 研究这一临界行为对系统突变的预警意义.

* 国家自然科学基金 (批准号: 41175067, 41105033) 和全球变化研究国家重大科学研究计划 (批准号: 2012CB955902) 资助的课题.

† E-mail: 491900551@qq.com

2 非线性动力学结构突变的构造与临界分析

Logistic 模型又称为虫口模型^[18], 是一种基于有限资源下, 虫口扩张至一个有限数量的非线性过程, 其方程可以表述如下:

$$\dot{x} = \omega x - \kappa x^2 = x(\omega - \kappa x), \quad (1)$$

其中 x 表示的是虫口的数量, $\omega - \kappa x$ 是增长系数, ω 是资源总量, κ 是单位虫口的消耗量. 方程 (1) 的解析解是:

$$x = \frac{\omega/\kappa}{1 + ce^{-\omega t}}, \quad (2)$$

其中 c 是一个与初值 x_0, t_0 以及参数 ω, κ 相关的常数: $c = \frac{\omega - \kappa x_0}{\kappa x_0} e^{\omega t_0}$. 本文在求解方程 (1) 的过程中通过构造如下差分格式进行数值求解:

$$x(i+1) = x(i) + \tau(\omega x(i) - \kappa x^2(i)), \quad (3)$$

求解的结果存放于数组 $x(i)$ 中.

方程 (1) 的物理意义在于其表征了系统状态变量随时间的增长 (收缩) 速率. 当系统状态变量不再改变时, 系统达到平衡态, 即 $\dot{x} = 0$ 时, $x_1 = 0, x_2 = \omega/\nu$ 为系统的两个平衡态. 值得注意的是这两个平衡态, 总有一个是暂时, 另一个是稳态^[15]. 该模型中系统初值和相关参数只能取正值, 为了便于讨论更为一般意义上的情况, 将 (1) 式进行如下代换, 令 $\mu = \omega/\kappa$, 在全空间取值, 得到 $\dot{x} = \kappa x(\mu - x)$.

2.1 模型的可行性分析

利用 (3) 式构造的差分格式求解该方程得到如图 1 所示的数值结果, 该模型控制下的系统状态变量若反向偏离平衡态则不能稳定存在, 很快发散, 系统状态变量趋向于无穷大, 反之则总是趋向于 $x_1 = 0, x_2 = \mu$ 这两个平衡态; 当控制参数 κ 取较小值, 且 > 0 时, 系统总是趋向于 $x = \mu$ 而稳定存在; $\kappa < 0$ 时, 系统总是趋向于 $x = 0$ 而稳定存在. 发现系统初始状态 $x_0 > \mu$ 系统总是趋向于 $x = \mu$; 而当 $x_0 < 0$ 时, 系统总是趋向于 $x = 0$; 但是当系统初值位于 0 和 μ 之间时, 不能准确地区分系统将趋向于哪一个平衡态, 但至少趋向于其中一个.

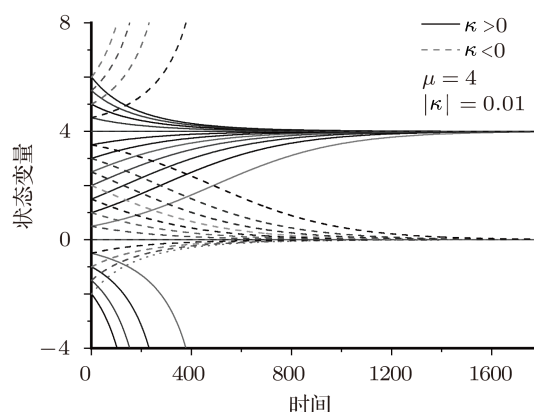


图 1 Logistic 动力学结构突变模型

上述方程求解参数及系统稳定性分析如表 1 所示.

表 1 Logistic 模型稳定性分析

κ	状态变量初值选取	系统状态
$\kappa > 0$	$x_0 < 0$	不稳定
	$x_0 > 0$	稳定: 平衡态 $x = \mu$
$\kappa < 0$	$x_0 < \mu$	稳定: 平衡态 $x = 0$
	$x_0 > \mu$	不稳定

表 1 中数值分析结果表明, 该模型存在两个平衡态, 状态变量总是在与系统自身状态相关的控制参数的影响下趋向于其中一个平衡态; 若不然, 则状态变量迅速变成无穷大, 系统不稳定, 这显然是需要舍弃的解. 本文主要考察系统由一个平衡态向另一个平衡态转移的过程, 即 $0 < x_0 < \mu$ 的情况. 这一过程中, 由于描述这一行为的参数取值不同使得系统突变的剧烈程度有着很大的差别, 这对前兆信号的预警能力也产生很大的影响.

2.2 模型的突变分析及其临界行为

对 Logistic 模型参数取值不同时分析该模型的突变情况如图 2 所示, 其中图 2(a) 是固定 $\kappa = 0.01$ 时, μ 分别取不同数值时的突变情况, 参数 μ 描述了系统的突变程度, 突变程度越大, 系统状态变量趋近于 μ 的时间越短; 图 2(b) 是固定 $\mu = 4$ 时, 参数 κ 分别取不同值时系统状态变量趋向于平衡态的情况, 参数 κ 值描述了系统趋向于平衡态的速率, 速率越大, 系统完成突变需要的时间越短. 一次突变过程, 突变程度越大, 突变时间越短造成的危害程度越大.

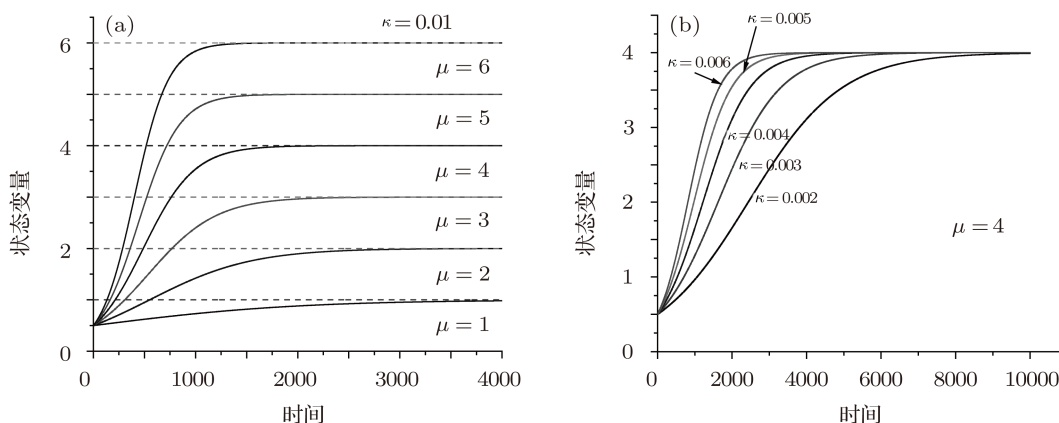


图2 参数取值不同时,系统的突变情况

为了进一步描述系统突变造成的危害,本文定义突变强度 $\eta = \frac{x_{0.95\mu} - x_{0.05\mu}}{t_{0.95} - t_{0.05}}$, 表征系统状态变量 x 由 0.05μ 变化到 0.95μ 时对该段时间的变化率, 其数值越大, 表明系统突变过程造成的危害越大, 反之则越小. 借助 (2) 式的解析解结果, 可以求解出 η 的函数表达式:

$$\eta = \frac{(\alpha - \beta)\mu^2\kappa}{\ln \chi}, \quad \chi = \frac{\alpha(1 - \beta)}{\beta(1 - \alpha)}, \quad (4)$$

其中 $\alpha = 0.95, \beta = 0.05$, 系统的突变强度由参数 μ, κ 共同确定.

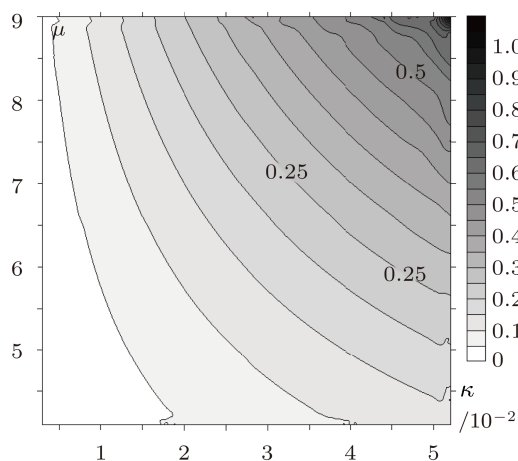


图3 突变变化强度与函数参数的定量关系

图3给出系统初值取 $x_0 = 0.01, t_0 = 0$, 参数 μ, κ 分别取不同值时, η 的数值计算结果, 系统突变强度随着控制参数取值的增大而变强, 且增长速度分别与 μ 的二次方、 κ 的一次方成正比.

方程 (1) 等号两边同时对时间求导数, 可以得

到系统回复力的函数表达式:

$$\ddot{x} = \mu\kappa\dot{x} - 2\kappa x\dot{x} = 2\kappa^2 x(x - \mu/2)(x - \mu), \quad (5)$$

在 $x = 0, x = \mu/2, x = \mu$ 处系统的回复力为零. 分析系统趋近临界阈值时的回复速率和回复力的临界行为, 如图4所示, 各参数取值分别为: $x_0 = 0.01, \mu = 4.0, \kappa = 0.001$.

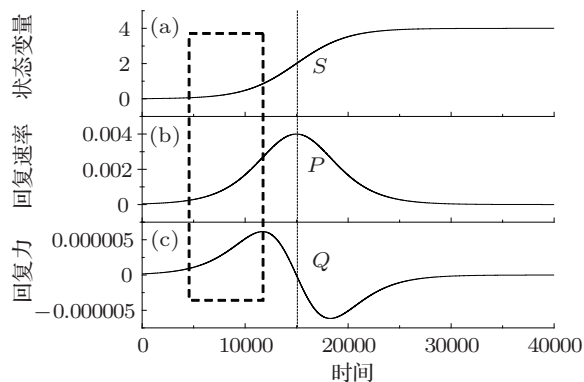


图4 Logistic模型中的临界行为 (a) 系统状态变量随时间的演化; (b), (c) 分别是对应的回复速率和回复力随时间的演化情况

图4(a)中系统状态变量随时间的变化, 由初始状态 (平衡态 $x = x_0$) 经过一段时间演化后趋向于平衡态 $x = \mu$, 当系统开始偏离平衡态并逐渐远离时, 如虚框所示, 系统的回复速率 (图4(b)) 开始逐渐增加, 且回复力 (图4(c)) 也开始增加, 增加的幅度远大于系统的状态变量. 当系统状态变量受到足够大的扰动, 穿过图4中竖线表示的位置时, 系统回复速率将达到极大值 (图4(b)中P点), 此时系统将以该速度迅速地穿过极限位置 (图4(a)中S点),

而回复力也将由正转为负(穿过图 4(c) 中 Q 点), 将系统拉向另一个平衡态. 大量数值计算结果表明(限于篇幅, 这里不再一一给出), 无论系统突变强度 η 取值多少, 回复速率和回复力总能很好地对系统偏离平衡态做出反应, 并能够在系统产生足够大的破坏之前(图 4(a) 中 S 点) 给出早期预警信号.

3 理想时间序列的构造与临界现象的识别

基于以上思想, 利用 Logistic 模型产生满足非

线性动力学结构突变的时间序列, 叠加随机数序列构造理想的气候突变时间序列 $y(i)$. 产生随机数序列时, 为了避免计算机系统内部两个相邻的随机数之间存在相互作用, 初次产生 m 个随机数, 然后从这 m 个数中随机筛选出 n 个数构成新随机数序列 $r(i)$, 序列 $r(i)$ 在区间 $[-0.5, 0.5]$ 内均匀分布, 使用 (6) 式线性叠加在序列 $x(i)$ 上构成新的序列.

$$y(i) = x(i) + \zeta \cdot r(i), \quad (6)$$

式中的 ζ 是叠加的随机数序列的增益系数. 计算 $y(i)$ 序列的回复速率和回复力, 结果如图 5 所示.

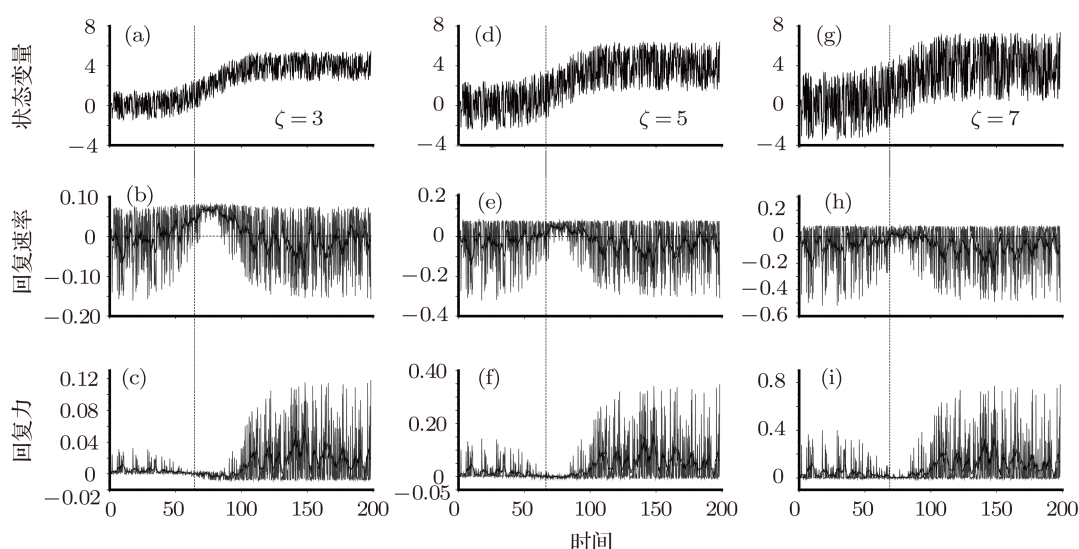


图 5 理想时间序列的构造及其临界现象检验, 粗黑线是 13 点滑动平均的结果 (a), (d), (g) 分别是叠加随机数增益取值分别为 3, 5, 7 的时候构造的理想时间序列; (b), (e), (h) 是对应理想时间序列的回复速度检测结果; (c), (f), (i) 是对应理想时间序列的回复力检测结果

图 5 给出增益系数分别取 3, 5, 7 时的理想时间序列及其回复速率和回复力的检测结果. 对理想时间序列 $y(i)$, 系统在临界阈值附近的回复速率和回复力波动较大. 在系统偏离临界阈值时, 回复速率向偏离平衡态移动, 逐渐变大, 穿过极值点后逐渐减小; 回复力逐渐减小, 并由正相位变为负相位.

图 6 给出系统的回复速率、回复力和状态变量之间的关系相图, 系统处于平衡态时系统的回复速率为零(图 6(b) 中 P_1, P_3 点对应的虚线标记的位置), 回复力也为零. 当系统受到较小扰动时, 系统偏离平衡态, 使系统回复到平衡态需要的回复力和回复速率均较小. 当系统受到较大扰动时, 系统回复速率逐渐增大, 回复力也增大, 若系统向平衡点 P_1, P_3 以外移动, 则系统的回复速率和回复力将

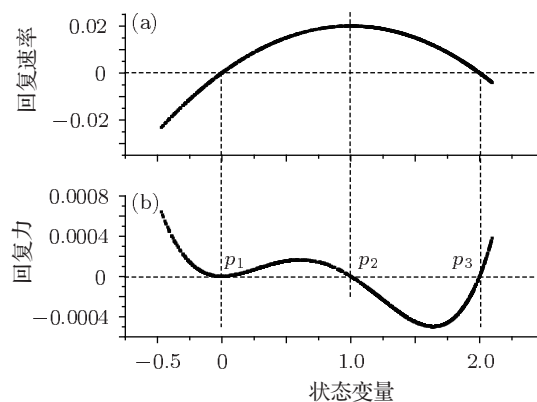


图 6 系统回复速率、回复力和状态变量之间的相图 (a) 系统的回复速率与状态变量的关系; (b) 系统回复力与状态变量之间的关系

趋向于无穷, 系统不稳定(表 1 中不稳定解); 若系

统在两个平衡态之间运动时, 系统状态变量受到足够大的扰动, 将穿过吸引域的边界 (图 4(a) 中 S 点/图 6(b) 中 P_2 点), 回复速率将穿过极大值向另一边移动, 此时系统回复力穿过不稳定点 (P_2 点), 系统向另一个平衡态跳转.

4 不同噪声信号对临界现象识别的影响

实际气候系统中往往会存在各种各样的噪声扰动, 这对系统预警信号的识别会产生很大的影响. 为了研究本文预警信号对噪声影响下的突变的预警效果, 分别对理想时间序列添加不同的噪声信号并进行检测.

图 7 对理想时间序列 $y(i)(\zeta = 3)$ 添加不同强度的随机噪声信号, 并检测系统临界现象. 序列 $y(i)$

中添加的噪声个数为 20 个, 占整个序列 $y(i)$ 长度的 2%, 噪声幅度 λ 分别为 3, 5, 7. 图 7(b), (e), (h) 和图 7(c), (f), (i) 分别给出系统的回复速率和回复力的检测结果, 当系统偏离平衡态的时候, 回复速率和回复力均给出早期预警 (图 7 中虚线标记位置), 可以认为噪声信号的幅度对于早期预警几乎没有影响.

图 8 给出了向理想时间序列 $y(i)(\zeta = 3)$ 中添加不同信噪比噪声扰动, 同时检测回复速率和回复力对系统突变的预警效果. 图 8(a), 8(d) 所示的是对 $y(i)(\zeta = 3)$ 分别添加了 20 个、40 个噪声扰动时理想时间序列随时间的演变情况, 分别占序列总长度的 2% 和 4%, 系统的回复速率 (图 8(b), (e)) 和回复力 (图 8(c), (f)) 在系统偏离平衡态的时候均清晰地给出了预警信号. 对应于噪声扰动的位置, 系统回复速率和回复力出现一个较大的扰动, 但是并不会影响系统整体预警信号的识别.

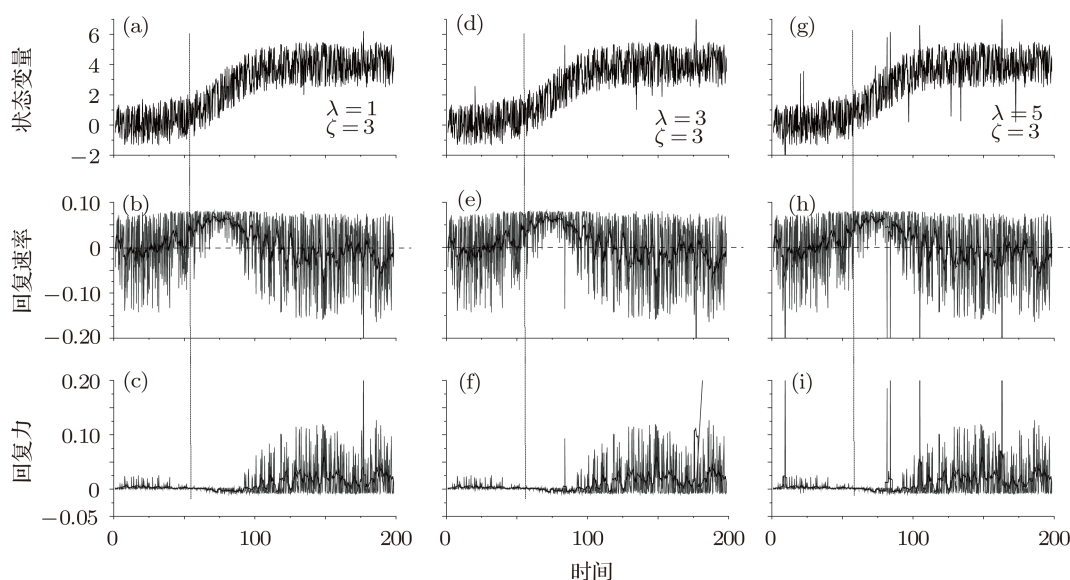


图 7 添加不同强度随机噪声对临界现象的检验结果 (a), (d), (g) 添加不同幅度噪声信号的理想时间序列; (b), (e), (h) 回复速率检测结果; (c), (f), (i) 回复力检测结果

5 PDO 指数临界现象的检测

PDO 是揭示年代际气候变率的强信号 [19], PDO 指数的冷暖相位是交替出现的, 与全球温度变化具有很好的一致性. 研究表明, 在近百年里面出现两次较大的相位反转, 一次在 1946/1947 年前后

由暖相位向冷相位转变, 一次在 1976/1977 年前后由冷相位向暖相位转变.

本文选取 1951—2009 年逐月 PDO 指数序列, 初始时刻 PDO 指数序列处于负相位, 在计算过程中需要对数据进行整体平移, 使初始值为零, 以满足动力学结构方程 (1) 的需求. 平移前后时间序列

分别标记为 $x(i)$, $z(i)$, 则有关系 $z(i) = x(i) - \mu(i)$ 成立, 平移量的大小由 (7) 式决定:

$$\mu(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=i-n}^{i-1} x(j), \quad (7)$$

(7) 式表征的物理意义是第 i 个数据的偏移量是其之前的 n 个数据构成的子序列的平均, $\mu(i)$ 同时也被认为是系统正在偏离的和即将达到的平衡态, 于是参数 $\mu = \mu(i)$, κ 确定为整个数据序列的线性趋势, 即斜率. 则系统回复速率和回复力方程可

以写为

$$\dot{x} = \kappa(\mu(i) - z(i))z(i), \quad (8a)$$

$$\ddot{x} = \kappa^2(\mu(i) - 2z(i))(\mu(i) - z(i))z(i). \quad (8b)$$

图 9 给出了当子序列长度 n 分别取 3 和 5 时, 对回复速率和回复力的检测结果. 虚线标记的位置是 1973 年, 此时系统的回复速率为零 (图 9(b), (e)), 回复力也减小为零, 并向负相位转变 (图 9(c), (f)), 这对此后 1976/1977 年的 PDO 指数由负相位向正相位转变给出了早期预警信号.

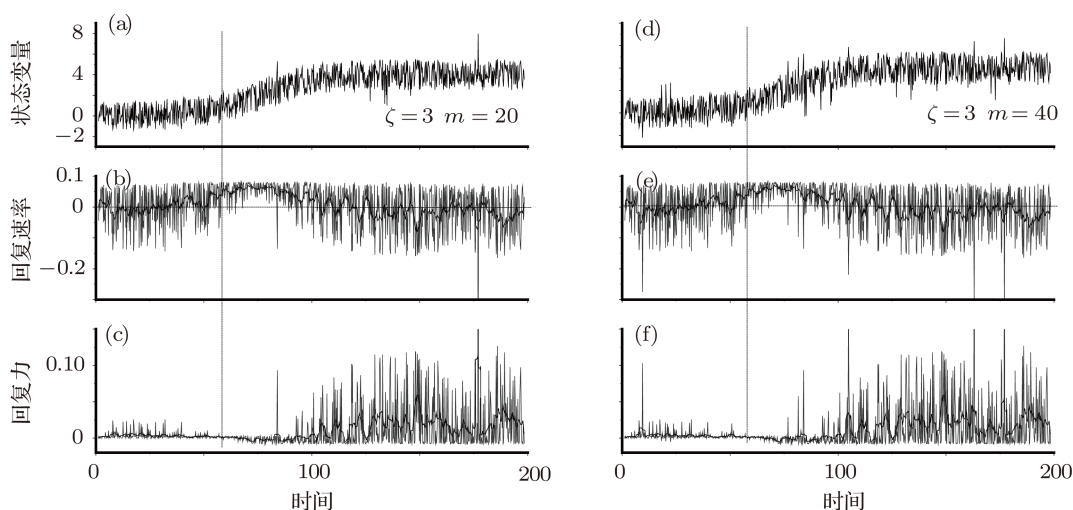


图 8 添加不同信噪比随机噪声对临界现象的检验结果 (a), (d) 添加不同噪声数目的理想时间序列; (b), (e) 回复速率检测结果; (c), (f) 回复力检测结果

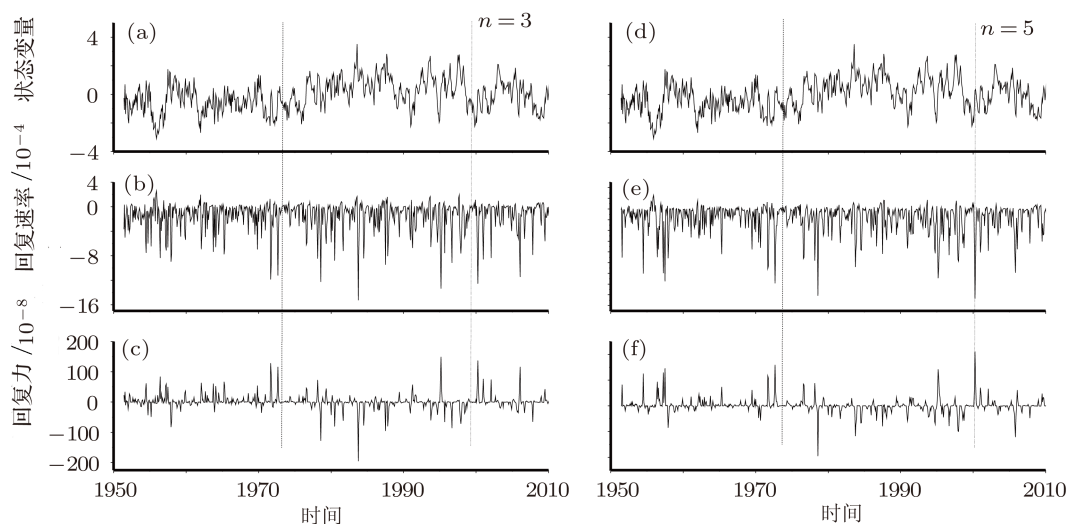


图 9 PDO 指数序列临界现象的检验结果 (a), (d) PDO 指数序列; (b), (e) 子序列长度分别取 3 和 5 时的系统回复速率检测结果; (c), (f) 对应回复速率的回复力检测结果

值得注意的是, 在 2000 年左右 (图中虚点标记的位置), 系统回复力逐渐减小, 并由负相位向正相位转变, 可能在接下来较长的一段时间, PDO 指数序列将面临由暖相位向冷相位转变, 全球温度下降. 这与 Victoria 大学的 Gedalof 在 2000 年通过树轮的研究结果基本是相一致的, Gedalof 的研究^[20]表明 PDO 指数序列的波动存在着 23—26 年的周期性冷暖相位的转变, 这一研究结果已经在文献 [21, 22] 中得到验证. 最近的一次转变被认为是在 1976/1977 年, 2000 年之后 PDO 指数正面临一次暖相位向冷相位的转变.

综合考察系统回复速率和回复力在系统发生突变之前的临界行为, 即系统出现回复速率为零并增大, 回复力的相位发生反转这一临界现象时, 系统正面临着状态变量将偏离现有的平衡态, 向另一个平衡态跳转的情况. 因此说, 系统的回复速率和回复力可以作为系统突变的早期预警信号.

6 结论与展望

本文借助物理学中的非线性方程 (Logistic 方程), 构造满足动力学结构的突变模型, 模拟气候系统中均值突变时间序列, 定义了能够反映突变破坏性的突变强度指数, 并发现突变强度与突变程度的二次方、突变速度的一次方成正比. 同时, 研究了当系统靠近临界阈值时的回复速率和回复力的变化情况, 发现当系统处于平衡态时, 受到小扰动后,

系统总要向平衡态靠拢, 所需回复力小, 回复速率较慢; 当受到的扰动足够大时, 系统将加速偏离平衡态, 系统所需回复力较大, 并且一旦系统穿过吸引域边界后, 系统受到相反方向的作用力, 不可恢复地从一个平衡态向另一个平衡态跳转.

对构造的几条符合均值突变类型的理想时间序列进行回复速率和回复力检测时, 发现在系统回复速率为零, 并逐渐增大; 回复力由正相位向负相位转换能够作为系统状态变量偏离平衡态的预警信号. 又对理想时间序列添加不同强度和不同信噪比的噪声信号并进行预警信号检测, 发现这些噪声信号对检测结果产生一定的干扰, 但是不影响对预警信号的识别. 最后对实际气候要素 PDO 指数序列比较公认的一次突变 (1976/1977 年) 进行预警信号检测, 发现在序列发生突变前 (1973 年), 回复速率和回复力就准确地给出早期预警信号, 提示可能发生突变. 可以认为, 系统的回复速率和回复力在一定程度上能够为均值突变提供一定的早期预警.

值得注意的是, 限于资料的长度, 本文仅对 PDO 指数序列的一次突变个例进行了预警信号检验, 对其他点的突变以及其他气象要素的突变是否同样具有预警意义, 还需要进一步的验证. 另外, 对于实际的气象背景下的突变, 往往是多种气象要素耦合作用下产生的, 在这样一种情况下, 如何能够确定早期预警信号, 将是在今后的工作中亟需面对并解决的.

- [1] Thom R 1972 *Stability Structural and Morphogenesis* (Sichuan: Sichuan Education Press) 73 105 (in Chinese) [雷内·托姆 1972 结构稳定性与形态发生学 (四川: 四川教育出版社) 73 105]
- [2] Fu C B, Wang Q 1992 *Scientia Atmospherica Sinica* 4 482 (in Chinese) [符淙斌, 王强 1992 大气科学 4 482]
- [3] Wei F Y 1999 *Modern Climatic Statistical Diagnosis and Forecasting Technology* (Beijing: China Meteorological Press) pp62–76 (in Chinese) [魏凤英 1999 现代气候统计诊断与预测技术 北京: 气象出版社第 62—76 页]
- [4] Feng G L, Gong Z Q, Dong W J 2005 *Acta Phys. Sin.* 54 5494 (in Chinese) [封国林, 龚志强, 董文杰 2005 物理学报 54 5494]
- [5] Wan S Q, Feng G L, Dong W J 2005 *Acta Phys. Sin.* 54 5487 (in Chinese) [万仕全, 封国林, 董文杰 2005 物理学报 54 5487]
- [6] Gong Z Q, Feng G L, Dong W J, Li J P 2006 *Acta Phys. Sin.* 55 3180 (in Chinese) [龚志强, 封国林, 董文杰, 李建平 2006 物理学报 55 3180]
- [7] Gong Z Q, Feng G L 2007 *Acta Phys. Sin.* 56 3619 (in Chinese) [龚志强, 封国林 2007 物理学报 56 3619]
- [8] Feng G L, Gong Z Q, Zhi R 2008 *Acta Meteorol. Sin.* 66 892 (in Chinese) [封国林, 龚志强, 支容 2008 气象学报 66 892]
- [9] He W P, Wu Q, Zhang W, Wang Q G, Zhang Y 2009 *Acta Phys. Sin.* 58 2862 (in Chinese) [何文平, 吴琼, 张文, 王启光, 张勇 2009 物理学报 58 2862]
- [10] He W P, Deng B S, Wu Q, Zhang W, Cheng H Y 2010 *Acta Phys. Sin.* 59 8264 (in Chinese) [何文平, 邓北胜, 吴琼, 张文, 成海英 2010 物理学报 59 8264]
- [11] He W P, Wu Q, Cheng H Y, Zhang W 2011 *Acta Phys. Sin.* 60 029203 (in Chinese) [何文平, 吴琼, 程海英, 张文 2011 物理学报 60 029203]
- [12] He W P, Feng G L, Wu Q, He T, Wan S Q, Chou J F 2011 *Int. J. Climatology* DOI: 10.1002/joc.2367
- [13] He W P, Feng G L, Wu Q, Wan S Q, Chou J F 2008 *Nonlinear Processes in Geophysics* 15 601
- [14] Alley R B, Marotzke J, Nordhaus W D 2005 *Science* 299 5615

- [15] Scheffer M, Bascompte J, William A 2009 *Nature* **461** 53
[16] Carpenter S R, Brook W A 2006 *Ecology Letters* **9** 311
[17] Guttal V, Jayaprakash C 2008 *Ecology Letters* **11** 450
[18] May R 1976 *Nature* **261** 459
[19] Mantua N J, Mantua S R, Zhang H Y 1997 *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **78** 1069-1080
[20] Gedalof Z, Smith D <http://ring.uvic.ca/00feb18/treering.html>
[2000-3-2]
[21] Gu D J, Wang D X, Li C H 2003 *Journal of Tropical Meteorology* **19** 136 (in Chinese) [谷德军, 王东晓, 李春辉 2003 热带气象学报 **19** 136]
[22] Gu W, Li C Y 2010 *Transactions of Atmospheric Sciences* **33** 401 (in Chinese) [顾薇, 李崇银 2010 大气科学学报 **33** 401]

The critical warning research of the mean time series mutations based on Logistic model*

Yan Peng-Cheng^{1)3)†} Hou Wei²⁾ Hu Jing-Guo¹⁾

1) (Department of Physics, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China)

2) (National Climate Center, China Meteorological Administration, Beijing 100081, China)

3) (College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 14 January 2012; revised manuscript received 22 February 2012)

Abstract

In this paper, we analyze the stability of solution of the nonlinear function of physics, the Logistic function. It is found that the solution has a special character that it can change abruptly from one stable state to another when the initial value and parameters of function are selected. Abrupt change level and abrupt change rate are related to parameters of function, which can be described by defining the abrupt change intensity index. By using the character of solution, we build an ideal time series to imitate climate abrupt change in mean of climate system, investigate what behaviors the recovery rate and recovery force can have when the system approaches to a critical threshold, and to ascertain how it warns the abrupt change of the system early. Besides, we also find that even the system is disturbed by some noise signals, the recovery rate and recovery force also make an early response to the arrival of the abrupt change of system. Finally, the result of testing the Pacific Decadal Oscillation (PDO) index shows that the early warning of the abrupt change appeared in 1973, much more early than the abrupt change of PDO index happening in 1976/1977, which means that the recovery rate and recovery force can be used as the early warning signals of the abrupt change in mean.

Keywords: nonlinear, changes in mean, recovery rate, recovery force

PACS: 92.70.Aa

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41175067, 41105033) and the Global Change Research of the National Basic Research Program of China (Grant No. 2012CB955902).

† E-mail: 491900551@qq.com