

谐振管内非线性驻波的有限体积数值算法*

宁方立[†] 董梁 张文治 王康

(西北工业大学机电学院, 西安 710072)

(2012年3月19日收到; 2012年7月3日收到修改稿)

为了扩展谐振管内非线性驻波在工程中的应用, 以及克服现有数值计算方法仅局限于求解直圆柱形和指数形谐振管内非线性驻波的问题. 根据变截面的非稳态可压缩热黏性流体 Navier-Stokes 方程和空间守恒方程, 并基于求解压力速度耦合方程的半隐式算法和交错网格技术, 构建一种能够计算任意形状轴对称谐振管受活塞驱动时内部非线性驻波的有限体积算法. 分别对圆柱形、指数形和圆锥形谐振管内的非线性驻波进行仿真计算. 通过与现有试验结果以及数值仿真结果的对比, 验证了该方法的正确性. 并获得除驻波声压之外的另外一些新的物理结果, 包括速度、密度、温度的瞬时变化. 在直圆柱形谐振管内产生冲击声压波, 速度波形中出现钉状结构. 而在指数形和圆锥形谐振管内产生高声压幅值的驻波, 没有出现冲击波, 速度波形中均未发现钉状结构. 计算结果表明谐振管内非线性驻波的物理属性与谐振管形状之间有密切关系.

关键词: 活塞, 谐振管, 非线性驻波, 有限体积法

PACS: 02.70.-c, 43.25.+y, 47.10.ad, 47.11.Df

1 引言

为了将在活塞驱动下谐振管内非线性驻波扩展应用于微型装置、微流体装置^[1,2]等工程应用中, 须对谐振管内的非线性驻波的各类物理性质进行研究. 如果采用实际物理试验的方法研究谐振管内非线性驻波, 需要对不同形状和不同尺寸的谐振管进行设计、制造和试验. 由于谐振管的加工及其试验装备和设施费用比较昂贵, 因此数值计算方法成为研究谐振管内非线性驻波的主要方法.

多年来, 研究人员通过多种数值计算方法对活塞驱动下谐振管内非线性驻波进行了计算, 并且结合物理试验对计算结果进行了验证. Coppens 等^[3]扩展了 Keck-Beyer^[4]扰动方法, 用此方法来求解一维横截面沿谐振管轴向方向不发生变化的谐振管(简称直圆柱形谐振管)内的非线性驻波问题, 理论上预测了简谐波分量幅值的大小和在基频和倍频处每一幅值之间的依赖关系; Saenger 等^[5]

建立了一种气体运动理论, 分析了直圆柱形谐振管内周期性冲击波现象和有限幅值的压力波形. Van Buren^[6]建立了直圆柱形谐振管的数值模型来描述谐振管内非线性驻波的特性, 并采用亥姆霍兹-克希霍夫方程 (Helmholtz-Kirchhoff equation) 进行求解. 同时他们还提供了一套基于这种数值模型的数值计算程序, 但这种数值计算方法仅局限于出现冲击波前期条件下; Yano^[7]利用有限差分格式中的总变差减小原理 (total variation diminishing) 求解直圆柱形谐振管内不连续冲击波问题, 理论上分析了声学雷诺数和冲击波之间的关系; Vanhille 等^[8]通过有限差分法对直圆柱形谐振管内无冲击波的有限幅值驻波进行了数值计算, 计算过程在时域内进行求解; 综上所述, 这些数值计算方法都是只能求解直圆柱形谐振管内的非线性驻波. 然而随着激励源强度的增加, 直圆柱形谐振管内的声压将趋向于饱和, 这种声学现象称为声饱和现象. 由于声饱和现象的存在, 谐振管内的驻波声压峰值存在极限值, 声饱和现象的存在严重制约了非线性驻波在工程

* 国家自然科学基金 (批准号: 51075329)、国家留学基金委访问学者出国研修项目、西北工业大学基础研究基金 (批准号: NPU-FFR-JC200932) 和西北工业大学研究生创业种子基金资助项目 (批准号: Z2011077) 资助的课题.

[†] E-mail: ningfl@nwpu.edu.cn

中的应用. Lawrenson 等^[9,10], 在一系列的试验和数值仿真研究中发现使用线性马达驱动两端封闭的特殊形状谐振管(横截面沿谐振管轴向方向发生变化的轴对称谐振管, 为了与直圆柱形谐振管进行区分, 将这种特殊形状谐振管简称: 非直圆柱形谐振管) 沿轴向整体振动, 能够在谐振管内产生无冲击强声驻波, 抑制了声饱和现象的出现. Luo 等^[11] 利用伽辽金方法(Galerkin method) 在频域内获得了在活塞驱动下指数形谐振管内无冲击强声驻波声压幅值的分布情况, 并实现了非线性驻波在微机电中的应用. 但是伽辽金方法仅局限于声场特征函数具有解析解的直圆柱形和指数形谐振管.

为了能够求解任意形状的非直圆柱形谐振管内非线性驻波, 本文提供了一种谐振管内非线性驻波的一维数值算法——有限体积法. 此数值算法结合了求解压力速度耦合问题的半隐式算法(semi-implicit method for pressure-linked equations-consistent, SIMPLEC) 和交错网格技术. 所提出的有限体积数值算法有三个明显的优势: 1) 求解过程是在时域内进行的, 能够一次求解出非线性驻波形成的瞬态变化. 2) 对于活塞驱动方式, 根据空间守恒方程和非稳态可压缩热粘性流体的 Navier-Stokes 方程建立了求解谐振管内非线性驻波的方程, 没有截断误差. 同时利用流体的动力粘度和边界剪切力代替其他数值算法中的有效黏度, 避免了其他数值计算方法中有效黏度必须通过试验获得的不足. 3) 应用这种数值算法还可以获得谐振管内一些新的物理结果, 从而为非直圆柱形谐振管内的非线性驻波的工程应用奠定了理论基础.

2 基本理论

采用单边振动驱动方式, 谐振管须满足空间守恒方程

$$\frac{d}{dt} \int_V dV = \int_A u_b dA, \quad (1)$$

其中, V 为控制单元体的体积, A 为控制单元体的截面积, u_b 为网格面的速度.

谐振管内的流体满足变截面 Navier-Stokes 方程, 包括质量守恒方程和动量守恒方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A(u - u_b))}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho Au)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Au(u - u_b))}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$= A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{A} \frac{\partial(Au)}{\partial x} \right) - A \frac{\partial p}{\partial x} + AS_{\text{wall}}, \quad (3)$$

其中, ρ 为流体密度, t 为时间, x 为谐振管的轴向坐标, u 为流体沿着谐振管轴向的速度, S_{wall} 为壁面剪切力引起的源项, p 为声压, μ 为动力黏度.

当谐振管内产生非线性驻波时, 须将谐振管内的流体考虑为可压缩流体, 因此采用理想气体的状态方程

$$P = \rho RT, \quad (4)$$

其中, R 为流体常数, T 为流体温度, P 为绝对压力. 绝对压力 P 为声压 p 与流体初始压力之和.

当非线性驻波产生时, (1)–(4) 式不足以求解声压 p 、速度 u 、流体温度 T 和流体密度 ρ 等四个物理场量. 为此, 引入理想气体的另一状态方程

$$P = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (5)$$

其中, ρ_0 为流体初始密度, p_0 为流体初始压力, γ 为流体的比热容比.

流体初始状态完全静止, 在频率为 f 的内嵌活塞驱动下作单边运动, 活塞的驱动速度为

$$u(t) = u_0 \sin(2\pi ft), \quad (6)$$

其中, u_0 为速度的幅值.

谐振管两端速度边界条件可以描述为

$$u = 0 \quad \text{在 } x = 0 \text{ 处}, \quad (7)$$

$$u = u(t) \quad \text{在 } x = l \text{ 处}, \quad (8)$$

其中, l 为谐振管的长度.

3 有限体积法

采用交错网格技术将求解域划分为主控制容积和 u 控制容积, 如图 1 所示. 将压力、密度和温度存储在以节点 I 为中心的主控制容积中; 而将速度存储在与主控制容积相差半个网格步长的 u 控制容积中.

采用全隐格式, 在 u 控制容积上对动量守恒方程, (3) 式, 进行积分离散化处理:

$$\begin{aligned} & \left[(\rho Au)_i - (\rho Au)_i^0 \right] \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ & + \left[(\rho Au(u - u_b))_I - (\rho Au(u - u_b))_{I-1} \right] \\ & = \mu \left(\left(\frac{\partial(Au)}{\partial x} \right)_I - \left(\frac{\partial(Au)}{\partial x} \right)_{I-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\mu \left(\frac{1}{A} \frac{\partial(Au)}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \right)_i \Delta x \\
 & + (p_{I-1} - p_I) A_i + (S_{\text{wall}} A)_i \Delta x, \quad (9)
 \end{aligned}$$

其中, 上标 0 表示前一时刻, 其他均为当前时刻, Δt 和 Δx 分别为时间步长和空间步长, $(S_{\text{wall}} A)_i \Delta x$ 为边界剪切力.

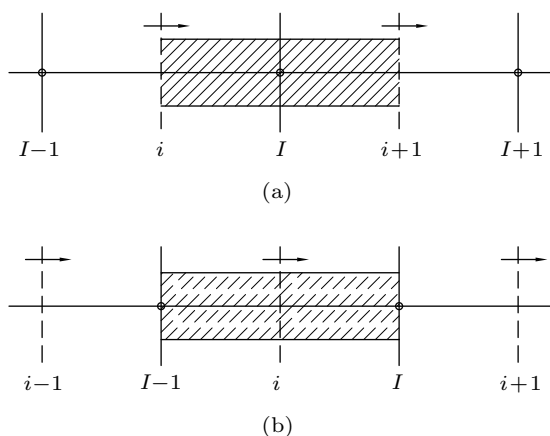


图 1 交错网格 (a) 主控制容积; (b) u 控制容积

采用 Patankar^[12] 描述的乘方格式计算 u 控制容积中心的速度, 并对 (9) 式中的系数进行组合处理后, 可以得到关于 u 控制容积中心速度的最终离散化方程

$$\begin{aligned}
 a_{Pi} u_i &= a_{W(i-1)} u_{i-1} + a_{E(i+1)} u_{i+1} \\
 &+ (p_{I-1} - p_I) A_i + b_i, \quad (10)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 a_{E(i+1)} &= D_I \max \left(0, (1 - 0.1 |P_I|)^5 \right) \\
 &+ \max(-F_I, 0), \\
 a_{W(i-1)} &= D_{I-1} \max \left(0, (1 - 0.1 |P_{I-1}|)^5 \right) \\
 &+ \max(F_{I-1}, 0), \\
 a_{Pi} &= a_{E(i+1)} + a_{W(i-1)} + F_I - F_{I-1} \\
 &+ \frac{(\rho_I + \rho_{I-1}) \Delta x A_i}{2\Delta t} + \mu \frac{A_{\text{cell}}}{\Delta y_i}, \\
 b_i &= \frac{(\rho_I^0 + \rho_{I-1}^0) \Delta x A_i u_i^0}{2\Delta t} \\
 &- \frac{\mu}{A_i} [(uA)_I - (uA)_{I-1}] \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_i,
 \end{aligned}$$

A_{cell} 为 u 控制容积的截面积, r_i 为谐振管的半径, Δy_i 定义为 $\Delta y_i = 0.1 \times r_i$. 定义通过 u 控制容积界面 (如 I) 的对流质量通量 F_I 和扩散传率 D_I 分

别为 $F_I = (\rho A (u - u_b))_I$, $D_I = \frac{\mu A_I}{\Delta x}$. 定义 u 控制容积面上的贝克列数为 $P_I = \frac{F_I}{D_I}$, $P_{I-1} = \frac{F_{I-1}}{D_{I-1}}$.

只有当压力场已知时, (10) 式才能被正确求解. 但由于谐振管内流场为压力速度耦合问题, 只能给定一个假设分布的压力估计值 p^* , 通过 (10) 式计算得到的速度也是一个估计值. 因此需要对压力估计值 p^* 和速度估计值 u^* 进行迭代修正.

把压力估计值 p^* 和速度估计值 u^* 代入 (10) 式可以得到

$$\begin{aligned}
 a_{Pi} u_i^* &= a_{W(i-1)} u_{W(i-1)}^* + a_{E(i+1)} u_{E(i+1)}^* \\
 &+ (p_{I-1}^* - p_I^*) A_i + b_i. \quad (11)
 \end{aligned}$$

设正确的压力值和速度值分别为 $p = p^* + p'$, $u = u^* + u'$, 其中, p' 和 u' 分别为压力修正值和速度修正值.

用 (10) 式减去 (11) 式可以得到压力修正值 p' 和速度修正值 u' 之间的关系

$$\begin{aligned}
 a_{Pi} u_i' &= a_{W(i-1)} u_{W(i-1)}' + a_{E(i+1)} u_{E(i+1)}' \\
 &+ (p_{I-1}' - p_I') A_i. \quad (12)
 \end{aligned}$$

基于 SIMPLEC 算法, 速度修正值 u' 可被描述为

$$u_i' = d_i (p_{I-1}' - p_I'), \quad (13)$$

其中

$$d_i = \frac{A_i}{a_{pi} - a_{W(i-1)} - a_{E(i+1)}}.$$

在主控制容积上积分质量守恒方程, (2) 式, 得到离散化质量守恒方程

$$\begin{aligned}
 & \left((\rho A)_I - (\rho A)_I^0 \right) \frac{\Delta x}{\Delta t} \\
 & + [(\rho A (u - u_b))_{i+1} - (\rho A (u - u_b))_i] = 0. \quad (14)
 \end{aligned}$$

对于可压缩热粘性流体, 基于状态方程, (4) 式, 密度修正值可表达为 $\rho' = \frac{1}{RT} p'$.

将密度修正值表达式代入 (14) 式, 并对密度值和密度修正值采用迎风差分格式处理后, 可以获得关于压力修正值 p' 的离散化方程

$$a_{PI} p_I' = a_{E(I+1)} p_{I+1}' + a_{W(I-1)} p_{I-1}' + b_I, \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned}
 a_{E(I+1)} &= (\rho^* A d)_{i+1} \\
 &- \frac{A_{i+1}}{RT_{I+1}} \max(-(u^* - u_b)_{i+1}, 0), \\
 a_{W(I-1)} &= (\rho^* A d)_i + \frac{A_i}{RT_{I-1}} \max((u^* - u_b)_i, 0),
 \end{aligned}$$

$$a_{PI} = (\rho^* Ad)_{i+1} + \frac{A_{i+1}}{RT_I} \max((u^* - u_b)_{i+1}, 0) + (\rho^* Ad)_i - \frac{A_i}{RT_I} \max(-(u^* - u_b)_i, 0) + \frac{A_I \Delta x}{RT_I \Delta t},$$

$$b_I = (\rho^* A (u^* - u_b))_i - (\rho^* A (u^* - u_b))_{i+1} - \frac{[(\rho^* A)_I - (\rho^0 A)_I] \Delta x}{\Delta t}.$$

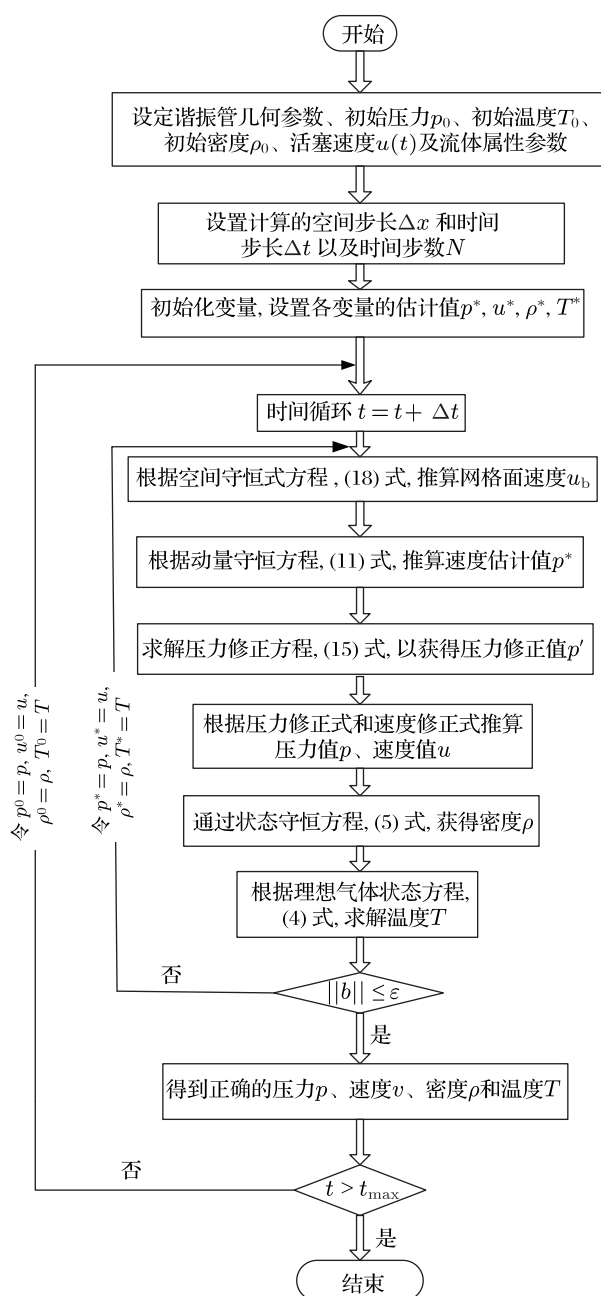


图2 计算流程图

由于活塞驱动而引入新的未知变量网格面速

度 u_b , 将空间守恒方程, (1) 式, 进行离散化处理

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = (u_{b,i+1} - u_{b,i}) A_I, \quad (16)$$

其中, ΔV 是由于边界运动所引起的控制容积单元体积的变化, $u_{b,i+1}$ 和 $u_{b,i}$ 分别为控制容积面 $i+1$ 和 i 上的速度.

ΔV 又可由活塞运动位移进行计算:

$$\Delta V = \frac{[x_{\text{vib}}(t + \Delta t) - x_{\text{vib}}(t)] A_{\text{vib}}}{N}, \quad (17)$$

其中, x_{vib} 为活塞运动的位移, A_{vib} 为活塞的截面积, N 为沿着谐振管轴向方向控制容积单元的数目.

将 (17) 式代入 (16) 式中, 得到

$$u_{b,i+1} = u_{b,i} + \frac{[x_{\text{vib}}(t + \Delta t) - x_{\text{vib}}(t)] A_{\text{vib}}}{N \cdot \Delta t A_I}. \quad (18)$$

当 (15) 式中的 b_I 趋于 0 时, ρ^* 和 u^* 满足质量守恒方程, 即

$$\|\mathbf{b}\| \leq \varepsilon, \quad (19)$$

其中, ε 为趋于 0 的常数, \mathbf{b} 为所有主控制容积中心的 b_I 所组成的向量.

据此, 构建了非直圆柱形谐振管内非线性驻波求解的有限体积算法. 其计算流程如图 2 所示.

4 数值计算结果

根据图 2 计算流程图, 编写 Matlab 程序求解非直圆柱形谐振管内非线性驻波.

4.1 直圆柱形谐振管

为了与文献 [5] 中的物理试验结果进行对比, 在直圆柱形谐振管内填充空气作为工作媒质. 流体属性为: 初始压力 101 kPa, 初始温度 273 K, 声速 $c_0 = 342.39$ m/s, 密度 $\rho_0 = 1.29$ kg/m³, 比热容比 $\gamma = 1.4$.

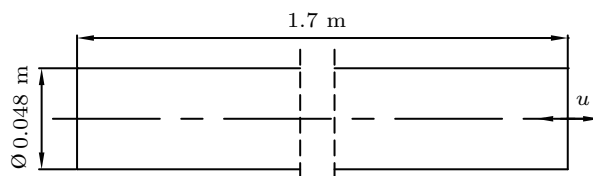


图3 直圆柱形谐振管

直圆柱形谐振管几何形状参数为: 长度 $L_x = 1.7$ m, 半径 $r_0 = 0.024$ m, 形状如图 3 所示. 根

据直圆柱形谐振管内声场基频计算公式 $\omega_0 = \pi c_0/L_x$ [10], 选择活塞的驱动频率为基频 100.7 Hz. 根据文献 [5] 所给出的活塞驱动位移幅值 $X = 1/8$ in (0.003175 m), 可以计算出活塞的运动速度幅值 $u_0 = 2.0089$ m/s.

取谐振管临近左端口的主控制容积中心位置 (左端) 和临近右端口的主控制容积中心位置 (右端) 作为观察点, 观察声压波形变化, 如图 4 和图 5 所示. 两端稳定后的声压波形和幅值相同, 并且瞬态声压幅值从初始静止状态一直增长直到活塞激励的能量与耗散平衡时达到稳态为止. 将左端声压波形与文献 [5] 的声压波形进行了比较, 如图 6 所示. 声压波形形态与幅值与试验结果 (在文献 [5] 中声压的冲击强度为 216 mm Hg, 约: 28797 Pa) 均比

较吻合, 从而验证了所提出的有限体积算法的正确性. 通过傅里叶变换对谐振管左端声压波形进行分解以研究其频谱特性, 如图 7 所示. 所有的倍频都被激励, 倍频所对应的压力幅值随着频率的增大而减小. 由于高次谐波的产生, 声压波形发生了畸变, 出现了冲击波现象, 如图 6 所示. 傅里叶分解中出现了常数项的声压幅值为 577.4 Pa, 因此导致整个声压波形向上偏移, 如图 4 和图 5 所示.

图 8 为谐振管左端、中间和右端三个位置的速度波形, 可以清楚地看到在谐振管左端位置出现了明显的钉状波形, 中间位置的速度波形有所畸变, 但没有出现钉状波形.

图 9 为温度的瞬态进程, 可以看出温度的幅值变化超过 10 K, 在稳态阶段也出现了冲击波现象.

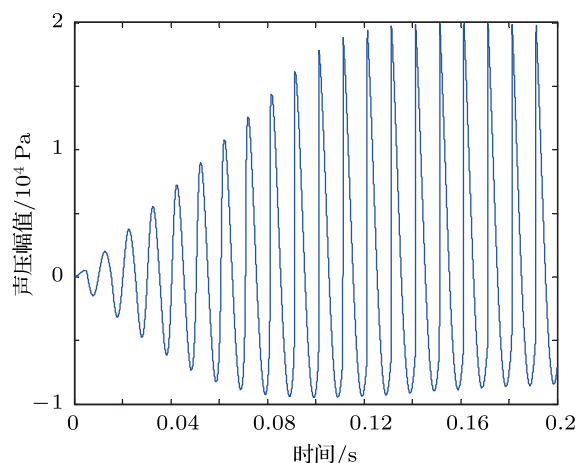


图 4 直圆柱形谐振管左端的声压变化

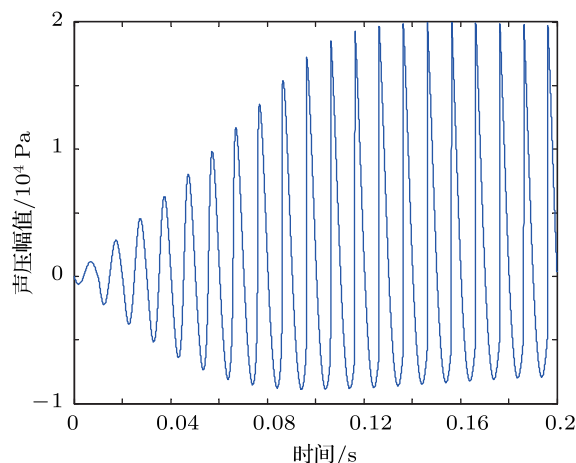


图 5 直圆柱形谐振管右端的声压变化

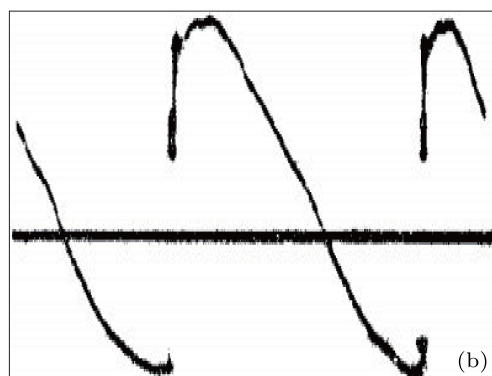
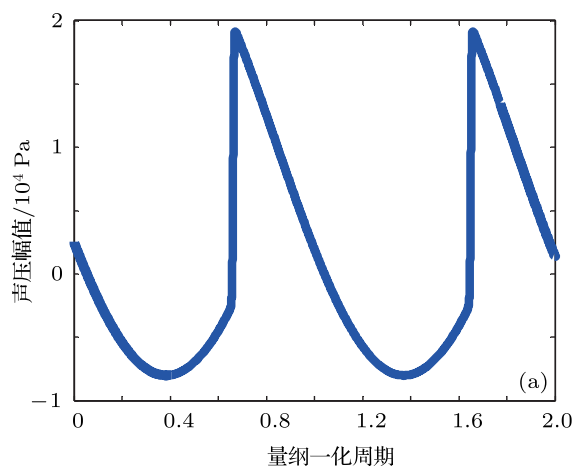


图 6 直圆柱形谐振管左端声压 (a) 有限体积法仿真结果; (b) 文献 [5] 中试验结果

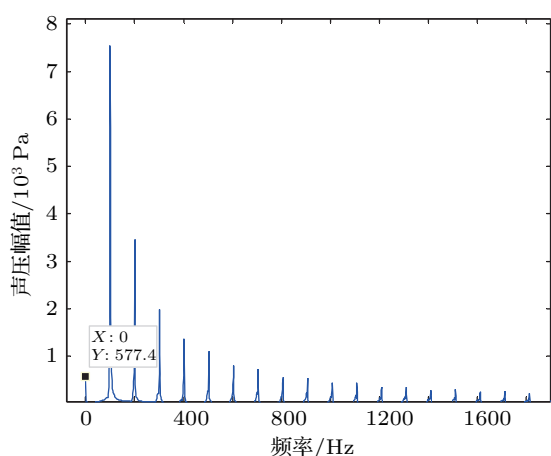


图7 直圆柱形谐振管声压频谱特性

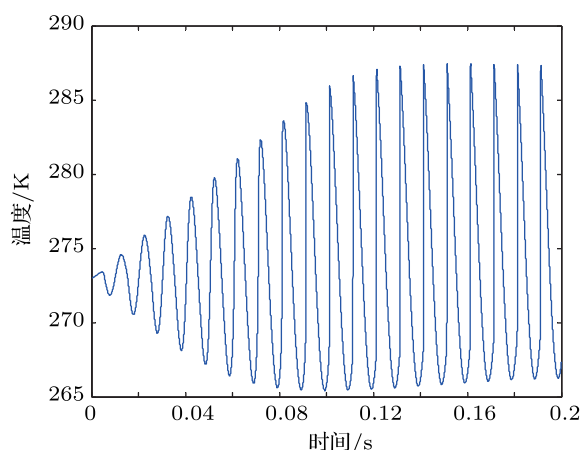


图9 直圆柱形谐振管左端的温度变化

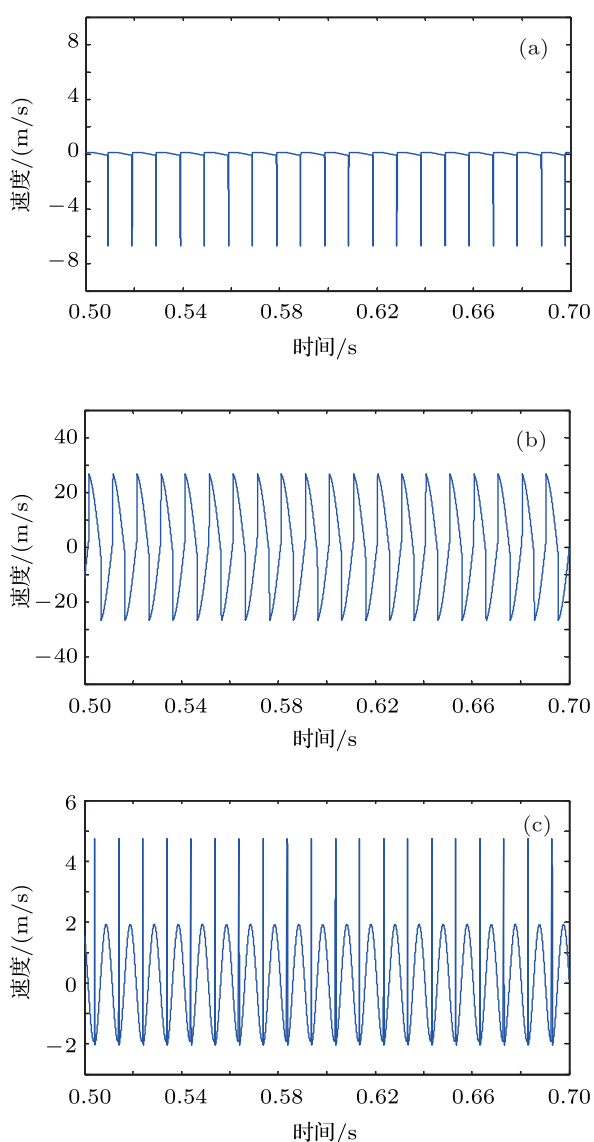


图8 直圆柱形谐振管不同位置的速度变化 (a) 左端速度; (b) 中间速度; (c) 右端速度

4.2 指数形谐振管

为了验证所提出的有限体积法还能计算非直圆柱形谐振管内填充其他流体时的非线性驻波, 在指数形谐振管内填充 R-12 作为工作介质. R-12 流体属性为: 初始压力 306 kPa, 初始温度 300 K, 声速 $c_0 = 153.09$ m/s, 密度 $\rho_0 = 14.74$ kg/m³, 比热容比 $\gamma = 1.129$.

谐振管截面积沿谐振管的轴向发生如下变化:

$$A(x) = A_0 \exp\left(\alpha \frac{x}{L_x}\right), \quad 0 \leq x \leq L_x, \quad (20)$$

其中, 谐振管小端口面积为 $A_0 = 5.0265 \times 10^{-5}$ m², 指数形谐振管的长度为 $L_x = 0.2$ m, 蜿蜒系数为 $\alpha = 5.75$, 形状如图 10 所示.

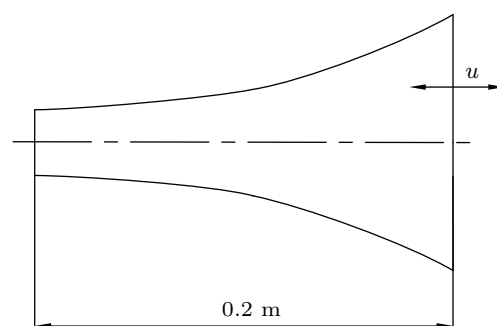


图10 指数形谐振管

根据文献 [11] 中所给的波数计算公式,

$$k_n^2 = \left(\frac{\omega_n}{c_0}\right)^2 = \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{L_x}\right)^2, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

取活塞驱动频率取为基频 518 Hz. 根据文献 [11]

提供的无量纲化速度计算公式 $U^* = u_0 / (L_x \omega_0)$ 和波数计算公式, 进而计算出活塞的速度幅值 $u_0 = 0.0354 \text{ m/s}$.

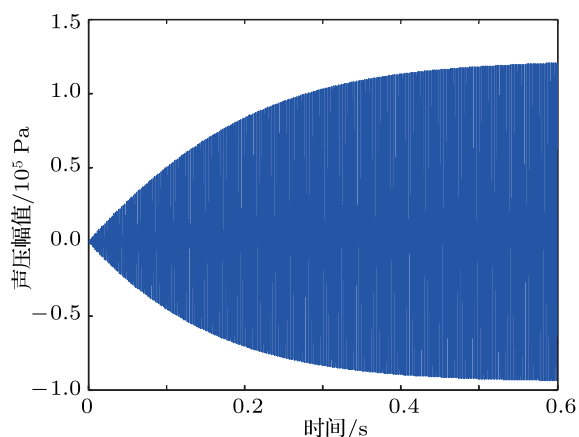


图 11 指数形谐振管左端的声压变化

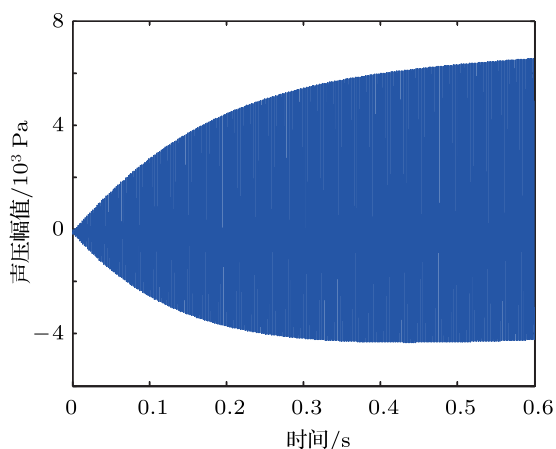


图 12 指数形谐振管右端的声压变化

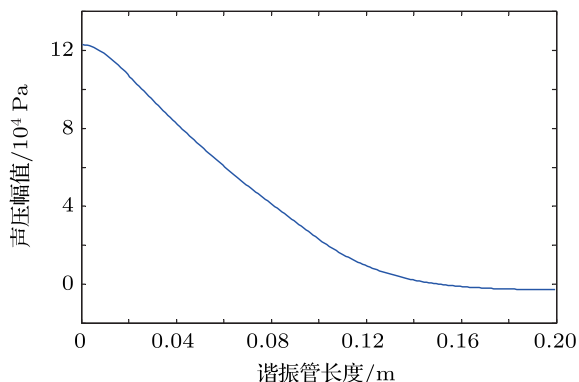


图 13 指数形谐振管轴向方向的空间声压幅值分布

在活塞驱动下, 得到指数形谐振管左端和右端的声压波形, 如图 11 和图 12 所示. 左端的声压波形已达到稳定, 而右端声压波形尚未达到稳定, 另外右端的声压幅值远小于左端的声压幅值. 谐振管

内声压幅值沿轴线的分布如图 13 所示. 从左端到右端沿轴线方向声压幅值逐渐降低. 左端声压幅值达到稳定状态值为 $4.705 \times 10^5 \text{ Pa}$, 明显要高于直圆柱形谐振管内达到饱和的声压幅值 $1.914 \times 10^5 \text{ Pa}$, 为工程应用中获得高压力幅值提供了良好的基础. 同时, 通过傅里叶变换对左端声压波形进行分解以研究其频谱特性, 如图 14 所示. 从频谱特性上可以看出, 在基频位置出现了较大的声压, 而高次谐波处的声压得到了抑制. 这也能够解释为何在非直圆柱形谐振管内能够产生较高幅值非线性驻波, 并且有效抑制了冲击波的产生. 同时也与文献 [11] 中提出伽辽金方法进行了对比, 如图 15 所示. 需要说明的是, 文献 [11] 所给出的量纲一化压力幅值超过了 1.5, 但是我们编写了相同的伽辽金程序, 所得到的量纲一化压力幅值仅接近于 1.5. 为了验证所编写程序的正确性, 我们还将所编制的伽辽金程序的结果与文献 [13] 中的结果进行了对比, 验证了程序的正确性, 说明文献 [11] 中所给出的结果有误.

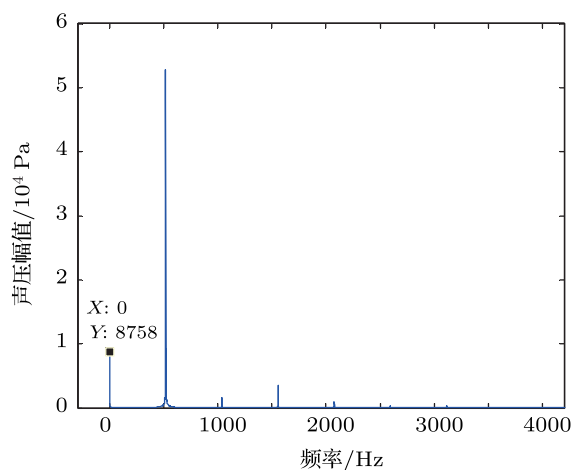


图 14 指数形谐振管声压频谱特性

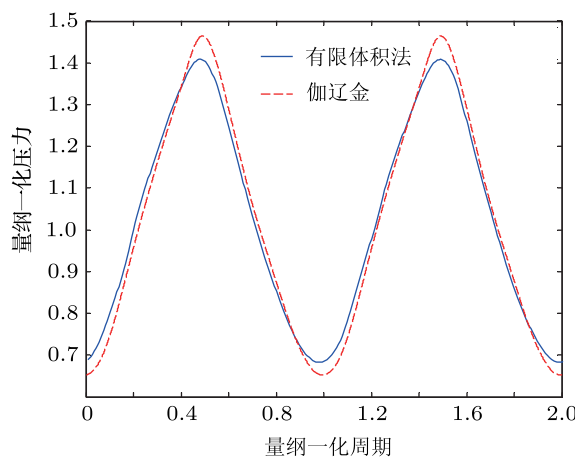


图 15 有限体积法与伽辽金方法对比

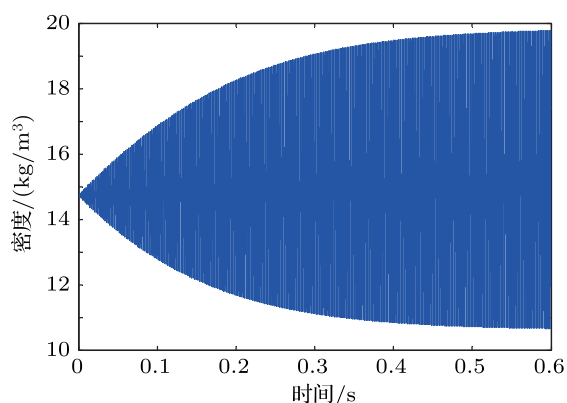


图 16 指数形谐振管左端的密度变化

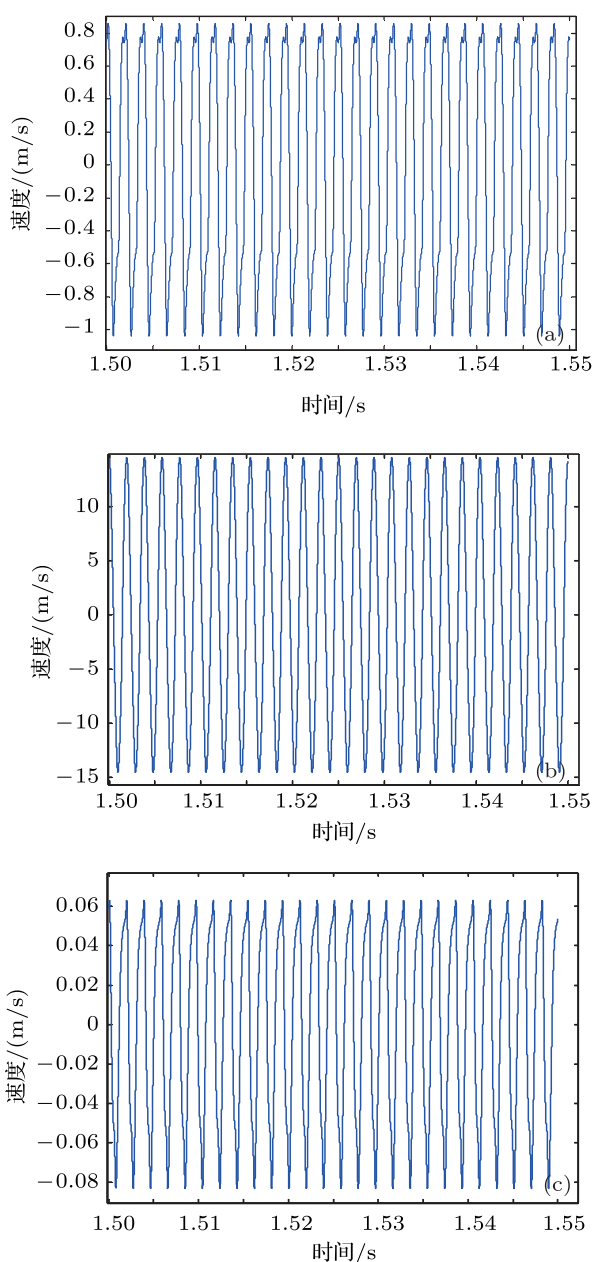


图 17 指数形谐振管不同位置的速度变化 (a) 左端速度; (b) 中间速度; (c) 右端速度

图 16 为指数形谐振管左端密度的变化, 可以看出工作媒质的密度变化幅值为 4.8 kg/m^3 , 说明活塞驱动下谐振管内流体密度有显著的变化。

图 17 为指数形谐振管左端、中间和右端三个位置的速度波形, 在指数形谐振管内并没有发现钉状结构的速度波形。

4.3 圆锥形谐振管

通过在直圆柱形和指数形谐振管内非线性驻波的计算和对比, 验证了所提出的有限体积数值算法的正确性. 为了验证所提出的有限体积数值算法能够求解任意形状的非直圆柱形谐振管内的非线性驻波, 还进行了圆锥形谐振管内非线性驻波的数值计算。

圆锥形谐振管几何形状参数为长度 $L_x = 0.2 \text{ m}$, 小端口半径 $r_0 = 0.005 \text{ m}$, 斜率 $\alpha = 0.2$, 形状如图 18 所示. 根据文献 [14], 取活塞驱动的驱动激励频率为 $f = 491 \text{ Hz}$. 为了与指数形谐振管结果进行对比, 在圆锥形谐振管内填充与指数形谐振管内相同的流体, 并将活塞驱动的速度幅值也取为 $u_0 = 0.0354 \text{ m/s}$.

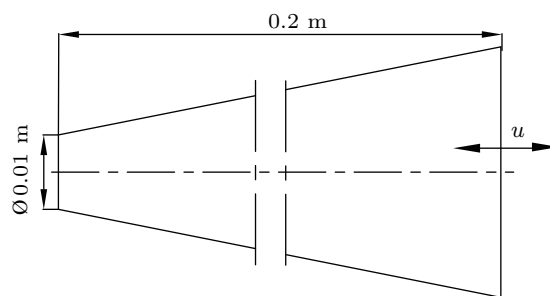


图 18 圆锥形谐振管

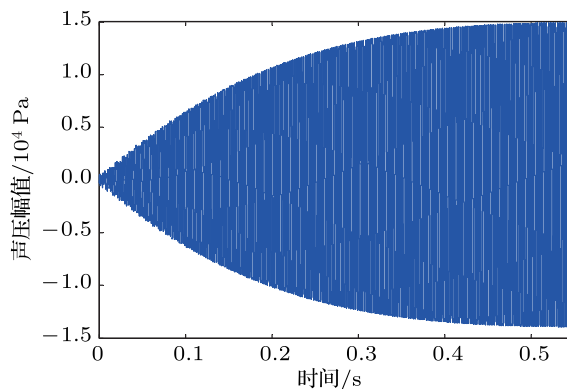


图 19 圆锥形谐振管左端的声压变化

图 19 为圆锥形谐振管内左端声压分布, 与指数形谐振管的结果进行对比, 发现圆锥形谐振管内的声压幅值远小于指数形谐振管内的声压幅值. 图 20 为左端声压的两个波形, 图 21 为左端声压的频谱特性. 从图中可以发现, 在圆锥形谐振管也同样抑制了冲击波的出现.

图 22 为圆锥形谐振管左端、中间和右端三个

位置的速度波形, 从中可以发现, 速度波形也未出现类似于直圆柱形谐振管内的钉状结构.

同时, 给出了圆锥形谐振管内密度和温度变化的波形图, 如图 23 和图 24 所示. 达到稳态时谐振管内密度的变化幅值为 0.6 kg/m^3 , 温度的变化幅值在 1.5 K 左右.

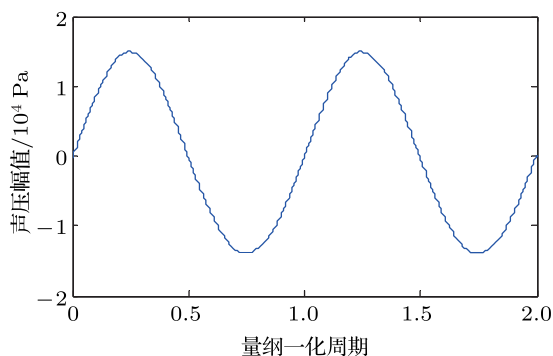


图 20 圆锥形谐振管左端声压的两个周期波形

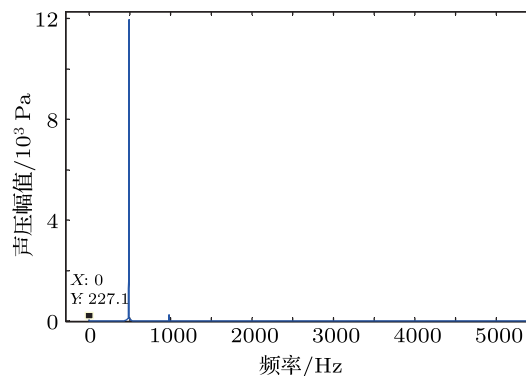


图 21 圆锥形谐振管左端声压频谱特性

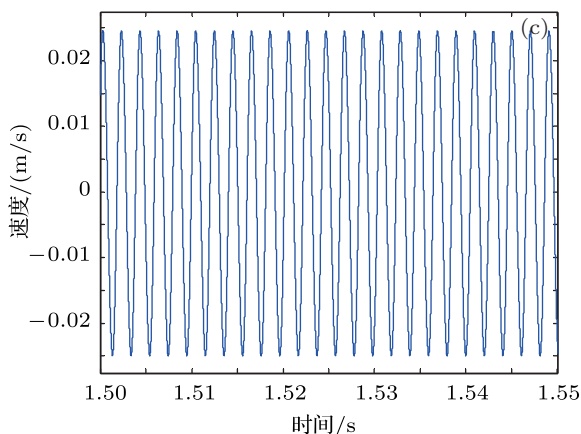
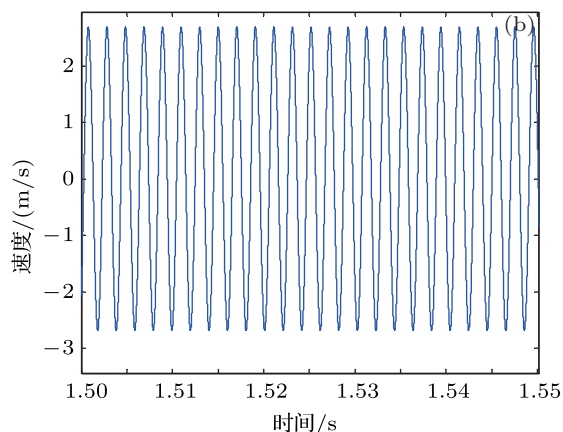
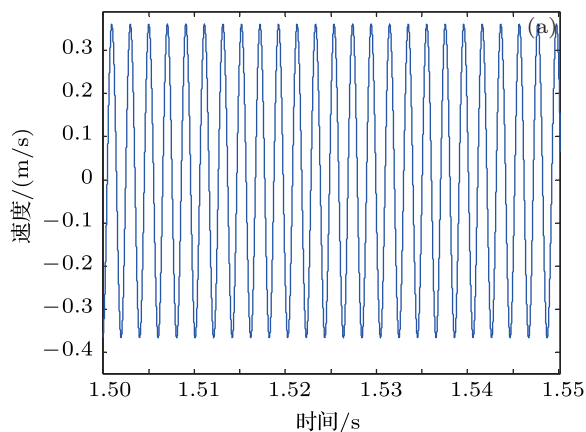


图 22 圆锥形谐振管不同位置的速度变化 (a) 左端速度; (b) 中间速度; (c) 右端速度

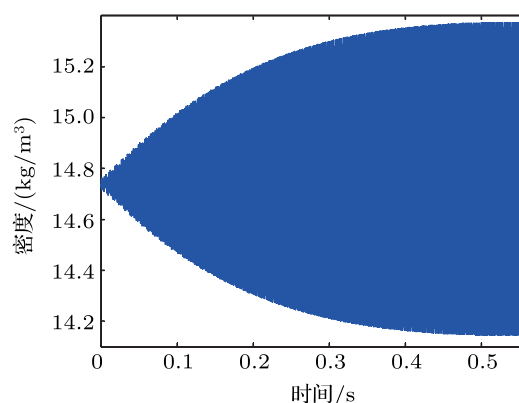


图 23 圆锥形谐振管左端的密度变化

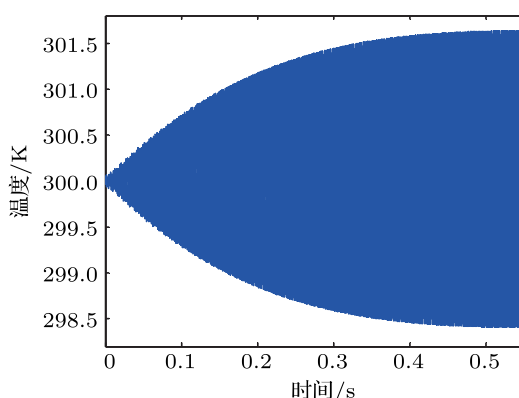


图 24 圆锥形谐振管左端的温度变化

将上述结果与指数形谐振管对应结果进行对比, 可以发现在圆锥形谐振管内所获得各种物理属性幅值都小于指数形谐振管内所获得的对应幅值, 但是圆锥形谐振管却更好地抑制了高频分量 (如

图 21 所示), 从而获得了更好的驻波声压波形 (如图 20 所示).

5 结论

提出了在活塞驱动情况下时域内求解谐振管内非线性驻波的有限体积数值算法. 利用所建立的有限体积法求解了直圆柱形和指数形谐振管内的非线性驻波问题, 并将有限体积法所得到的结果与伽辽金方法以及已有文献中的试验结果做了对比, 验证了有限体积数值算法的正确性. 对圆锥形谐振管内非线性驻波进行了数值计算, 验证了本方法能够应用于求解任意形状非直圆柱形谐振管内非线性驻波的能力. 同时, 获得了除了声压之外的新的物理属性, 包括速度、密度、温度的瞬时变化情况. 在直圆柱形谐振管内温度如同声压一样也出现了冲击波现象, 并发现钉状结构的速度分布. 在指数形和圆锥形谐振管内, 能够获取到无冲击的非线性驻波. 并且速度没有出现钉状结构的分布, 而是呈现对称分布. 无冲击的非线性驻波和对称的速度分布, 确定了指数形和圆锥形谐振管更适合应用于工程实际. 并对指数形谐振管和圆锥形谐振管内的驻波的物理属性进行了对比, 发现了两种谐振管的各自优缺点. 因此, 为了满足工程中的需要, 可以结合两种谐振管的优点, 通过优化方法对形状参数进行优化. 有限体积数值算法开辟了一种求解非直圆柱形谐振管内非线性驻波的方法, 为谐振管内非线性驻波的工程应用奠定了良好的基础.

[1] Nguyen N T, Huang X Y, Chuan T K 2002 *J. Fluids Eng.* **124** 384
 [2] Wang S S, Jiao Z J, Huang X Y, Yang C, Nguyen N T 2009 *Microfluid. and Nanofluid.* **6** 847
 [3] Coppens A B, Sanders J V 1968 *J. Acoust. Soc. Am.* **43** 516
 [4] Keck W, Beyer R T 1960 *Phys. Fluids.* **3** 346
 [5] Saenger R A, Hudson G E 1960 *J. Acoust. Soc. Am.* **32** 961
 [6] Van Buren A L 1975 *J. Sound Vibration* **42** 273
 [7] Yano T 1999 *J. Acoust. Soc. Am.* **106** L7
 [8] Vanhille C, Campos-Pozuelo C 2001 *J. Acoust. Soc. Am.* **109** 2660

[9] Lawrenson C C, Lipkens B, Lucas T S, Perkins D K, Van Doren T W 1998 *J. Acoust. Soc. Am.* **104** 623
 [10] Ilinskii Y A, Lipkens B, Lucas T S, Van Doren T W, Zabolotskaya E A 1998 *J. Acoust. Soc. Am.* **104** 2664
 [11] Luo C, Huang X Y, Nguyen N T 2007 *J. Acoust. Soc. Am.* **121** 2515
 [12] Patankar S V 1980 *Numerical heat transfer and fluid flow* (New York: McGraw-Hill) p90-92.
 [13] Erickon R R, Zinn B T 2003 *J. Acoust. Soc. Am.* **113** 1863
 [14] Chun Y D, Kim Y H 2000 *J. Acoust. Soc. Am.* **108** 2765

A finite volume algorithm for solving nonlinear standing waves in acoustic resonators*

Ning Fang-Li[†] Dong Liang Zhang Wen-Zhi Wang Kang

(School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 19 March 2012; revised manuscript received 3 July 2012)

Abstract

In order to expand the engineering application area of nonlinear standing waves in acoustic resonators, a new numerical algorithm is proposed for simulating nonlinear standing waves in resonators. It also can be used to overcome the shortages of the existing numerical methods, which restrict the solution to the nonlinear standing waves in cylindrical resonators and exponential resonators. The numerical algorithm is constructed based on the Navier-Stokes equations in the resonators with variable cross-section for an unsteady compressible thermoviscous fluid without truncation, and the space conservation law. The numerical algorithm-finite volume method for solving the nonlinear standing waves in acoustic resonators by piston driving is built based on the semi-implicit method for pressure-linked equations-consistent algorithm and staggered grid technique. Simulations for solving the nonlinear standing waves in cylindrical resonators, exponential resonators and conical resonators are carried out. By comparison with the existing experimental results and numerical simulation results, the accuracy of the developed finite volume algorithm is verified. Some new physical results are obtained, including unsteady velocity, density and temperature. The shock-like pressure wave shapes are found in cylindrical resonators, simultaneously, and the results show that the sharp velocity spikes appear in the cylindrical resonators. High amplitude acoustic pressures are generated in exponential resonators and conical resonators. Shock-like pressure waves and the sharp velocity spikes are not found. The strong dependence of the physical properties of nonlinear standing waves on resonator shape is demonstrated through the simulative results.

Keywords: pistons, resonators, nonlinear standing waves, finite volume method

PACS: 02.70.-c, 43.25.+y, 47.10.ad, 47.11.Df

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51075329), the State Scholarship Fund of China Scholarship Council, NPU Foundation for Fundamental Research (Grant No. NPU-FFR-JC200932), and the Graduate Starting Seed Fund of Northwestern Polytechnical University (Grant No. Z2011077).

[†] E-mail: ningfl@nwpu.edu.cn