

非光滑热曲线的分数阶次可微性研究*

吴国成[†] 石祥超[‡]

(四川大学水利水电学院, 土木工程博士后流动站, 成都 610065)

(2011年11月26日收到; 2012年4月10日收到修改稿)

自然界存在诸多的非光滑现象, 如海岸线、岩石的裂隙和截面形貌等. 经典的微积分理论和欧氏几何中的常用方法无法用来刻画其可微性. 局部分数阶导数是局部化的分数阶导算子, 是潜在的研究非光滑曲线微尺度性态的工具之一. 本文首先回顾了基于分数阶积分和类 Cantor 集生成的阶梯曲线, 然后利用一般的二项式展开, 从分数阶可微函数的角度得到了非光滑热曲线的分数阶次可微性.

关键词: 分形, 分数阶次可微性, 不光滑曲线, 全局行为

PACS: 05.45.Df, 05.30.Pr

1 引言

分形是 20 世纪 80 年代一门新兴的学科, 分形几何克服了欧氏空间对于规整几何的要求, 使得人们对于复杂系统有了更客观的认识^[1]. 发展至今, 分形在金融、物理、生物、材料等学科具有广泛的应用, 如表面形貌^[2]、织物表征^[3]、岩石裂隙^[4]、基因序列^[5]、分形孤子^[6] 等方向, 解决了一系列的实际应用问题.

当前, 非光滑函数主要可以分为两大类: 传统意义下的非光滑函数和分数阶可微函数. 传统意义下的非光滑函数以分形曲线为代表, 如 Weierstrass 曲线, 阶梯曲线等. 它们是定义在分形上的处处连续、处处非可微函数. 目前研究这类函数的方法以 IFS 方法为主^[7-9].

最近, Kolwankar 和 Gangal 提出了分数阶可微函数的概念, 利用局部分数阶导数^[10,11] 描述其分数阶次可微性. 由于分数阶可微函数具有分形理论支撑, 物理意义明确, 是分析这类非可微函数性态的重要工具. 但 Kolwankar 等的工作只局限于对初

始点的刻画, 本文基于分数阶可微函数的二项式展开, 研究了类 Cantor 集上非可微函数的分数阶次可微性表征.

2 分数阶可微函数的生成

为研究分数阶可微函数的性态, 我们首先需要回顾一下这类非可微函数是如何生成的. 假设 A 为闭区间 $[0, 1]$ 上的类 Cantor 集, 其 Hausdorff 维数为 α , $0 < \alpha < 1$, 定义 $A \cap [0, 1]$ 的分数阶测度为^[10]

$$F^\alpha(A \cap [0, 1]) = {}_0I_x^\alpha 1_A(x), \quad (1)$$

其中

$${}_0I_x^\alpha 1_A(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{d^{-\alpha} 1_{d x_i}}{d(x_{i+1} - x_i)^{-\alpha}},$$

$[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-1$, $x_0 = 0, \dots, x_{N-1} = 1$ 是闭区间 $[0, 1]$ 的分割, $\frac{d^{-\alpha}}{d(x_{i+1} - x_i)^{-\alpha}}$ 表示闭区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的 Riemann-Liouville 积分. $1_A(x)$ 为标记函数, 当且仅当 x 属于集合 A , 其取值为 1; 当 x 不属于集合 A 时, 其取值为零. Kolwankar 得

* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 51134018)、四川省青年科技基金 (批准号: 2012JQ0031) 和水力学与山区河流开发保护国家重点实验室开放基金 (批准号: 1112) 资助的课题.

[†] E-mail: wuguocheng2002@yahoo.com.cn

[‡] E-mail: sxcdream@163.com

到闭区间 $[0, x]$ 上 α 维 Cantor 集的分数量度为 $\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$, 其中 Γ 为伽马函数. Kolwankar 利用计算机编程, 得到了如下随分形尺度变化的分数量阶可微曲线.

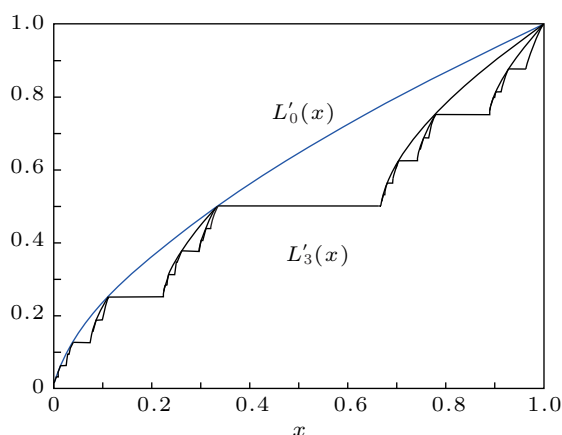


图 1 分数量阶可微函数 x^α 的图像 [12]

Kolwankar 指出当且仅当测度 (1) 的阶数为类 Cantor 集的 Hausdorff 维数 α 时, 分数量阶测度 (1) 才为非零的有限值. 由于类 Cantor 集具有多尺度性, 从而基于类 Cantor 集生成的函数也具有这种多尺度结构, 这也启发我们探索新的非线性技巧 [13-15], 对类似于图 1 的分形初边界值问题进行多尺度模拟.

在已知原函数 $f(x)$ 的情形下, 需求其反函数以此表示非可微函数在类 Cantor 集上的分布取值. 基于上述分数量阶测度 (1), Kolwankar 等诱导出局部化的分数量阶导算子

$${}_x D_{\text{KG}}^\alpha f(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^y \frac{f(\xi) - f(x)}{(y-\xi)^\alpha} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2)$$

为简化起见, 本文仅考虑上述定义的右极限情形. 陈等推导出上述导算子的等价形式 [16]

$${}_x D_{\text{KG}}^\alpha f(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{\Gamma(1+\alpha)[f(y) - f(x)]}{(y-x)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3)$$

如果方程 (2) 极限形式存在, 且和 (3) 对应的左极限存在且相等, 函数 $f(x)$ 称为在点 x 处 α 阶可微. 采用测度 (1) 的优点在于非可微曲线上的每一点皆为分数量阶可微. 如 Canpinteri 等在研究分形上的热扩散时, 得到了分形上的反常热扩散方程 [17].

3 非光滑热曲线的分数量阶可微性

在过去的几十年中, 不断有研究人员探索分形和分数量阶微积分之间的关系, 力图阐述分数量阶微积分物理意义 [18-27]. Kolwankar 等提出的局部分数量阶导数, 是目前为止和分形几何结合得最好的一种分数量阶导数 (详细的相关评论可参考文献 [17]).

假设函数 $f(x)$ 为 α 阶可微函数, 则满足如下关系 [10]:

$$f(x+h) = f(x) + f^{(\alpha)}(x) \frac{h^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + o(h^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4)$$

其中 $o(h^\alpha)$ 为 h^α 的高阶无穷小量.

3.1 前人的工作

目前对于分数量阶可微函数 $f(x)$ 的计算都只局限于初始点 $x = 0$ 处. 以分数量阶可微函数 $f(x) = x^\alpha$ 为例, 假设 $f(x)$ 按分数量阶测度 (1) 的方式产生, 直接从 (2) 或 (3) 式出发仅能得到非光滑曲线在初始点的局部分数量阶导数值为 $\Gamma(1+\alpha)$

$${}_0 D_{\text{KG}}^\alpha f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(1+\alpha)[y^\alpha - 0]}{(y-0)^\alpha} = \Gamma(1+\alpha), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (5)$$

当 $x \neq 0$ 时, 对于大都数函数而言, 上述导数计算是无法进行的. 换言之, 已有的工作只研究了非光滑曲线在初始点处的分数量阶可微性.

3.2 推广

受倪 [28] 计算分数量阶导数的启发, 我们考虑了分数量阶可微函数在 $x = 0$ 处的二项式展开 [29], 将分数量阶可微性从初始点推广至任意点处, 从而可以进一步研究非可微系统的全局行为.

类似地, 假设函数 $(1+x)^\beta$ 通过方程 (1) 产生, 有如下近似关系成立:

$$(1+x)^\beta = 1 + \binom{\beta}{\alpha} x^\alpha + o(x^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6)$$

利用分数量阶可微函数的中值定理 [16,30], 我们可以通过定义 (2) 验证上述二项式展开的正确性和合理性.

值得指出的是, $(1+x)^\beta$ 是通过分数量阶测度产生, 不同于通常意义下的解析函数. 因此, 即便

函数 x^β 从其表达式上来看是可微函数, 若不论其产生背景而进行求导计算或用通常意义下的二项式展开, 会产生诸多谬误. 依测度 (1) 产生的函数 $(1+x)^\beta$ 只能求其 α 阶局部分数阶导数. 这是局部分数阶导数与经典的 Caputo 导数和 Riemann-Liouville 导数的区别之一.

假设函数 $f(x) = x^\alpha$ 仅为 α 阶可微, 利用上述二项式展开 (6), 我们可以得到 $f^{(\alpha)}(x)$ 在 Cantor 集上的分布. 对于曲线上其他任意的非可微点, 用二项式展开可以得到

$$\begin{aligned} {}_x D_{\text{KG}}^\alpha f(x) &= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{\Gamma(1+\alpha)[y^\alpha - x^\alpha]}{(y-x)^\alpha} \\ &= \Gamma(1+\alpha)1_A, \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned} \quad (7)$$

同时以 $\Gamma(1+\alpha)1_A$ 为被积函数, 可以验证得到其原函数为 x^α .

更一般地, 对于依测度 (1) 产生的分数阶可微函数 x^β , 可以求得其在 α 维的 Cantor 集上的分布为

$$\begin{aligned} {}_x D_{\text{KG}}^\alpha x^\beta &= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{\Gamma(1+\alpha)[y^\beta - x^\beta]}{(y-x)^\alpha} \\ &= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{\Gamma(1+\alpha)[(x^+ + y - x^+)^\beta - x^\beta]}{(y-x^+)^\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{\Gamma(1+\alpha) \left[x^\beta \left(1 + \frac{y-x^+}{x^+} \right)^\beta - x^\beta \right]}{(y-x)^\alpha} \\ &= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{\Gamma(1+\alpha) \left[x^\beta \left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{y-x^+}{x^+} \right)^\alpha \right) - x^\beta \right]}{(y-x^+)^\alpha} \\ &= \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{\Gamma(1+\alpha) \left[x^\beta + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) (y-x^+)^\alpha x^{\beta-\alpha} - x^\beta \right]}{(y-x^+)^\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} 1_A(x^+), \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

反之, 我们亦可验证如果 $\frac{\Gamma(1+\beta)x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}$ 分布在 α 维的类 Cantor 集上, 依测度 (1) 也可得 α 阶可微函数 x^β . 值得指出的是, 上述二项式展开和分数阶可微函数的泰勒展开 [31] 类似.

4 结论

分数阶可微函数在分数阶初边界值问题的物理解释、依赖于分形尺度演化的生物种群、分形多尺度模拟方面具有非常广阔的应用前景. 本文从分数阶可微函数产生的角度, 利用一般的二项式展开, 表征了这类非光滑曲线任意点处的分数阶可微性. 本文方法同样可以用来计算其他分数阶可微函数的局部分数阶导数.

- [1] Mandelbrot B B 1983 *The Fractal Geometry of Nature* (WH Freeman)
- [2] Sun X, Wu Z Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2126 (in Chinese) [孙霞, 吴自勤 2001 物理学报 **50** 2126]
- [3] Yu B M, Li J H 2001 *Fractals* **9** 365
- [4] Xie H P, Gao F 2000 *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **37** 477
- [5] Yu Z G, Anh V, Lau K S 2001 *Phys. Rev. E* **64** 031903
- [6] Zhu J M, Ma Z Y, Zheng C L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3248 (in Chinese) [朱加民, 马正义, 郑春龙 2004 物理学报 **53** 3248]
- [7] Barnsley M F, Demko S 1985 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **399** 243
- [8] Feng Z G, Xie H P 1998 *Fractals* **6** 269
- [9] Xie H P, Sun H Q 1997 *Fractals* **5** 625
- [10] Kolwankar K M, Gangal A D 1996 *Chaos* **6** 505
- [11] Kolwankar K M, Gangal A D 1997 *Pramana-J. Phys.* **48** 49
- [12] Kolwankar K M 2004 *Fractals* **12** 375
- [13] Wu G C 2011 *Math. Comput. Model.* **54** 2104
- [14] Wu G C, Lee E W M 2010 *Phys. Lett. A* **374** 2506
- [15] Wu G C, Zhang S 2011 *Phys. Lett. A* **375** 5
- [16] Chen Y, Yan Y, Zhang K W 2010 *J. Math. Anal. Appl.* **362** 17
- [17] Carpinteri A, Sapora A 2010 *ZAMM-Z. ANGEW. MATH. ME.* **90** 203
- [18] Podlubny I 2001 Arxiv preprint math/0110241
- [19] Qiu W Y, Lu J 2000 *Phys. Lett. A* **272** 353
- [20] Ren F Y, Liang J R, Wang, X T, Qiu, W Y 2003 *Chaos, Soliton. Fractal.* **16** 107
- [21] Ruan H J, Su W Y, Yao K 2009 *J. Approx. Theory.* **161** 187
- [22] Yao K, Su W Y, Zhou S P 2004 *Chin. Annal. Math.* **25** 711
- [23] Yao K, Su W Y, Zhou S P 2006 *Acta. Math. Sin.* **22** 719
- [24] Liang Y S, Su W Y 2007 *Chaos, Soliton. Fract.* **34** 682
- [25] Liang Y S 2007 *Anal. Theory Appl.* **23** 354
- [26] Rutman R S 1995 *Theor. Math. Phys.* **105** 1509
- [27] Tarasov V E 2005 *Ann. Phys-New York* **318** 286
- [28] Ni Z X 2001 *J. Fuyang Teach. Coll.* **18** 40
- [29] Wu G C 2011 *Commun. Frac. Calc.* **2** 27
- [30] Yang X J 2009 *World Sci. Tech. R & D* **31** 920
- [31] Jumarie G 2006 *Comput. Math. Appl.* **51** 1367

Fractional differentiability of the non-smooth heat curve*

Wu Guo-Cheng[†] Shi Xiang-Chao[‡]

(College of Water Resources and Hydropower, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

(Received 26 November 2011; revised manuscript received 10 April 2012)

Abstract

There are many non-smooth objects in nature, such as coastline, rock fracture, cross section, whose differentiabilitys cannot be described by ordinary calculus and methods in Euclidean geometry. The local fractional derivative is one of the potential tools to investigate the non-smooth problems. This study revisits the non-smooth curves generated from the fractional integrals and Cantor-like set. From the view of the fractional differentiable functions, the differentiabilitys of the non-smooth curves are derived by using a binomial expansion.

Keywords: fractals, fractional differentiability, non-smooth curves, global behaviors

PACS: 05.45.Df, 05.30.Pr

* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51134018), the Sichuan Youth Science and Technology Foundation (Grant No. 2012JQ0031), and the Key Laboratory of Hydraulics and Mountain River Engineering Sichuan Univeristy of China (Grant No. 1112).

[†] E-mail: wuguocheng2002@yahoo.com.cn

[‡] E-mail: sxdream@163.com