

# 具有色散系数的 (2+1) 维非线性 Schrödinger 方程的有理解和空间孤子\*

马正义<sup>1)2)†</sup> 马松华<sup>1)</sup> 杨毅<sup>1)</sup>

1) (丽水学院理学院, 丽水 323000)

2) (宁波大学理学院, 宁波 315211)

(2012年2月24日收到; 2012年3月31日收到修改稿)

非线性 Schrödinger 方程是物理学中具有广泛应用的非线性模型之一. 本文采用相似变换, 将具有色散系数的 (2+1) 维非线性 Schrödinger 方程简化成熟知的 Schrödinger 方程, 进而得到原方程的有理解和一些空间孤子.

**关键词:** 非线性 Schrödinger 方程, 相似变换, 有理解, 孤子结构

**PACS:** 05.45.Yv, 03.65.Ge

## 1 引言

近年来, 非线性科学有代表性的课题之一——孤立子理论, 已经越来越广泛地应用在线性介质中的光学<sup>[1]</sup>, 等离子体<sup>[2]</sup>, 波色-爱因斯坦凝聚的平均场理论<sup>[3]</sup>, 凝聚态物理学<sup>[4]</sup>和其他许多领域中. 其中, 为了描述非线性物理现象, 人们常用非线性 Schrödinger 方程 (NLSE) 作为基本模型. 例如, 在以前一些非线性光学的研究中, (1+1) 维 NLSE 不仅被用来描述孤子的控制<sup>[5,6]</sup>, 而且还被用来描述其相互作用<sup>[7-9]</sup>. 当然, 解中主要是含有稳定的双曲函数解脉冲或雅可比椭圆函数周期解. 然而, 迄今尚较少在高维 NLSE 中讨论有关孤子的结构. 本文采用相似变换, 讨论具有色散系数的 (2+1) 维非线性 Schrödinger 方程的有理解和空间孤子.

## 2 (2+1) 维非线性 Schrödinger 方程的相似解

在体光学介质中, (2+1) 维变系数空间孤子在笛卡尔坐标下的传播可以由下面的广义 NLSE 来

表示<sup>[10-12]</sup>:

$$i u_z + \frac{1}{2} \beta(z)(u_{xx} + u_{yy}) + \chi(z)|u|^2 u = i\gamma(z)u, \quad (1)$$

其中  $u \equiv u(x, y, z)$  表示运动系中电场的复波包,  $z$  是传播的归一距离,  $x$  和  $y$  是横平面的归一坐标. 函数  $\beta(z)$  表示色散系数,  $\chi(z)$  表示非线性系数,  $\gamma(z)$  是增益 ( $\gamma > 0$ ) 或损耗 ( $\gamma < 0$ ) 系数. 因此, 方程 (1) 描述的是光束在类克尔介质中具有变色散、非线性和增益或损耗的传播.

首先, 将方程 (1) 转换成如下典型的 NLSE:

$$i\Phi_\tau(\xi, \tau) + \varepsilon\Phi_{\xi\xi}(\xi, \tau) + \sigma|\Phi(\xi, \tau)|^2\Phi(\xi, \tau) = 0, \quad (2)$$

这里  $\tau \equiv \tau(z)$ ,  $\xi \equiv \xi(x, y, z)$ , 在  $\varepsilon\sigma > 0$  和  $\varepsilon\sigma < 0$  时, 分别对应于方程 (2) 的亮孤子和暗孤子解.

作相似变换<sup>[7,8,13-18]</sup>

$$u(x, y, z) = \rho(z)\Phi(\xi, \tau)e^{i\varphi(x, y, z)}, \quad (3)$$

其中  $\rho(z)$ ,  $\varphi(x, y, z)$  是相应变量的实函数,  $\Phi(\xi, \tau)$  是满足方程 (2) 的复函数. 将 (3) 式代入方程 (1), 并与方程 (2) 的系数相比较, 可以得到如下的偏微分

\* 应用非线性科学与技术浙江省重中之重学科开放基金和浙江省自然科学基金 (批准号: Y606049, Y6100257) 资助的课题.

† E-mail: ma-zhengyi@163.com

方程组:

$$\rho\tau_z = 1, \quad \chi\rho^3 = \sigma, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}\beta\rho(\xi_x^2 + \xi_y^2) = \varepsilon, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}\beta(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + \varphi_z = 0, \quad (6)$$

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad (7)$$

$$\beta(\xi_x\varphi_x + \xi_y\varphi_y) + \xi_z = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}\beta\rho(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) - \gamma\rho + \rho_z = 0. \quad (9)$$

由方程 (4), (5) 和 (7) 可以得到

$$\xi = p\alpha(z)x + q\alpha(z)y + s(z), \quad (10)$$

$$\rho = \frac{\sqrt{2\varepsilon\sigma(p^2 + q^2)\alpha\beta\chi}}{2\varepsilon\chi},$$

$$\tau = \frac{(p^2 + q^2) \int_0^z \alpha^2 \beta dt}{2\varepsilon} + c_0, \quad (11)$$

其中  $p, q, c_0$  是任意常数, 而  $\alpha(z), s(z)$  是传播距离  $z$  的待定函数.

由方程 (8) 和 (11) 式, 得到

$$\varphi = -\frac{(x^2 + y^2)\alpha_z + (\frac{x}{p} + \frac{y}{q})s_z}{2\alpha\beta} + \varphi_0(z), \quad (12)$$

其中  $\varphi_0(z)$  是  $z$  的待定函数.

将 (12) 式代入方程 (6), 解得

$$\alpha = -\frac{1}{c_1 \int_0^z \beta dt + c_2}, \quad (13)$$

$$s = -\frac{c_4}{c_1(c_1 \int_0^z \beta dt + c_2)} + c_3,$$

$$\varphi_0 = \frac{c_4^2(p^2 + q^2)}{8c_1p^2q^2(c_1 \int_0^z \beta dt + c_2)} + c_1, \quad (14)$$

这里,  $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$  是任意常数. 最后, 将上述解代入方程 (9), 得到的约束条件是

$$\frac{\chi_t}{\chi} - \frac{\beta_t}{\beta} + 2\gamma = 0. \quad (15)$$

根据文献 [19, 20], 在  $\varepsilon = 1/2, \sigma = 1$  时, (2+1) 维非线性 Schrödinger 方程 (1) 的一阶有理解为

$$u(x, y, z) = \rho \left( 1 - 4 \frac{1 + 2i\tau}{1 + 4\xi^2 + 4\tau^2} \right) e^{i\tau + \varphi}, \quad (16)$$

而二阶有理解为

$$u(x, y, z) = \rho \left( 1 - \frac{G + iH}{D} \right) e^{i\tau + \varphi}, \quad (17)$$

这里的  $G, H, D$  分别为

$$G = -\frac{3}{16} + \frac{3}{2}\xi^2 + \xi^4 + \frac{9}{2}\tau^2 + 6\xi^2\tau^2 + 5\tau^4,$$

$$H = \left( -\frac{15}{8} - 3\xi^2 + 2\xi^4 + \tau^2 + 4\xi^2\tau^2 + 2\tau^4 \right) \tau,$$

$$D = \frac{3}{64} + \frac{9}{16}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^4 + \frac{1}{3}\xi^6 + \frac{33}{16}\tau^2 - \frac{3}{2}\xi^2\tau^2 + \xi^4\tau^2 + \frac{9}{4}\tau^4 + \xi^2\tau^4 + \frac{1}{3}\tau^6.$$

解 (16), (17) 中的  $\rho, \xi, \tau$  和  $\varphi$  由 (10)—(12) 式决定.

上述解结构可见, 孤子的速度、相移等主要由于色散系数  $\beta(z)$ 、非线性系数  $\chi(z)$  及有关常数来控制. 因此, 对具体问题, 可以通过选择合适的参数  $\beta(z)$  和  $\chi(z)$  来进行. 在 Akhmediev<sup>[19,20]</sup> 和 Yan<sup>[21,22]</sup> 的文献中, 针对不同的变系数非线性 Schrödinger 方程, 利用一阶和二阶有理解描述了非线性极值波的传播, 本文则利用解 (16) 来描述 (光) 孤子的一些典型结构.

1) 为简便起见, 选取常数  $c_i (i = 0, 1, \dots, 4) = p = q = 1$ , 此时一阶有理解 (16) 的强度

$$U \equiv |u|^2 = \frac{2\alpha^2\beta(9 - 24\xi^2 + 16\xi^4 + 32\xi^2\tau^2 + 40\tau^2 + 16\tau^4)}{\chi(1 + 4\xi^2 + 4\tau^2)^2}. \quad (18)$$

令  $\beta(z) = \chi(z) = z$ , 则在  $\gamma(z) = 0$  时, 约束条件 (15) 自然满足, 而相关参数为

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= -\frac{2}{2 + z^2}, \\ s(z) &= \frac{z^2}{2 + z^2}, \\ \xi &= -\frac{2x + 2y - z^2}{2 + z^2}, \\ \tau(z) &= \frac{4 + 8z^2 + z^4}{(2 + z^2)^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

图 1(a) 给出的是  $U$  在区间  $\{L = -5-5, z = -5-5\}$  上亮孤子背景下的 dromion 结构图 (这里  $L \equiv x + y$ ). 图 1(b) 给出的是当  $\beta(z) = 0.01\text{sech}(z)$ ,  $\chi(z) = 0.01e^z$ ,  $\gamma(z) = -0.5(1 + \tanh(z))$  时, 在区间  $\{L = -5-5, z = -10-10\}$  上  $U$  的扭结型孤子背景下的 solitoff 解.

2) 若选取常数  $c_0 = c_1 = c_2 = c_4 = p = q = 1, c_3 = 0$ , 令  $\beta(z) = \sin(z)$ ,  $\chi(z) = 1 + e^{(1-\sin(z))}$ ,  $\gamma(z) = \frac{1}{2}(\cot(z) + \frac{\cos(z)e^{1-\sin(z)}}{1 + e^{1-\sin(z)}})$  时, 相关参数为

$$\begin{aligned} \alpha(z) = s(z) &= \frac{1}{\cos(z) - 2}, \\ \xi &= \frac{x + y + 1}{\cos(z) - 2}, \\ \tau(z) &= \frac{6 - 6\cos(z) + \cos^2(z)}{(\cos(z) - 2)^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

图 2(a) 给出的是  $U$  在区间  $\{L = -10 \sim -9, z = -7 \sim -12\}$  上周期波背景下的 dromion 结构图, 图 2(b) 相应的截面图 ( $L = 0$  实线,  $L = 4$  虚线). 图 3 若选取常数  $c_0 = 0.001, c_1 = 0.1, c_2 = 2, c_3 = 0, c_4 = p = q = 1$ , 令  $\beta(z) = \sin(z), \chi(z) = \cos(0.5z)$ ,

$$\gamma(z) = \frac{0.25(\sin(z) \sin(0.5z) + 2 \cos(z) \cos(0.5z))}{\sin(z) \cos(0.5z)}$$

时, 图 3(a) 给出的是  $U$  在区间  $\{L = -14 \sim -6, z = -25 \sim 25\}$  上周期波背景下的孤子结构图, 图 3(b) 相应的截面图 ( $L = -10$  实线,  $L = -4$  虚线). 从图 2 和图 3 可见, 虽然非线性系数  $\chi(z)$  和增益或损耗系数  $\gamma(z)$  是周期函数的复合函数, 只要色散系数  $\beta(z)$  是传播距离  $z$  的周期函数, 那么强度  $U$  作周期振动.

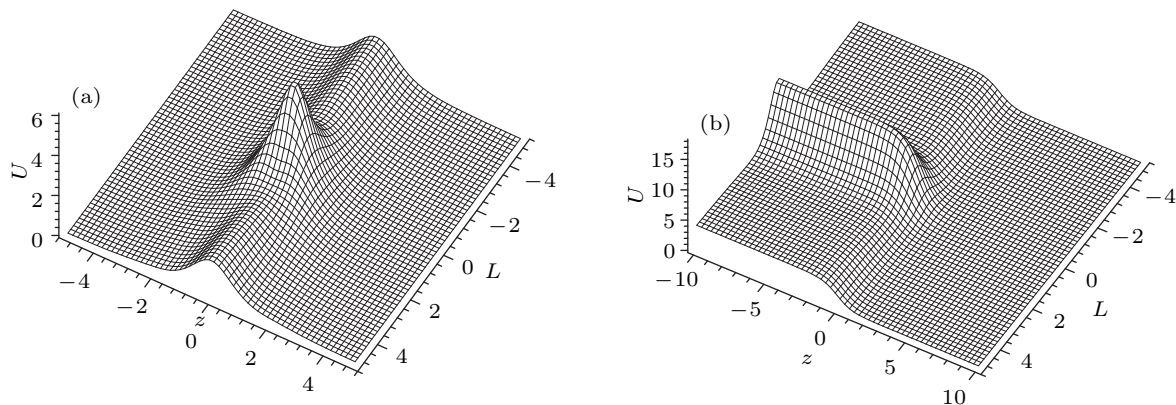


图 1 由 (18) 式给出的强度  $U \equiv |u|^2$  的结构图 (a) 亮孤子背景下的 dromion 结构图; (b) 扭结型孤子背景下的 soliton 结构图

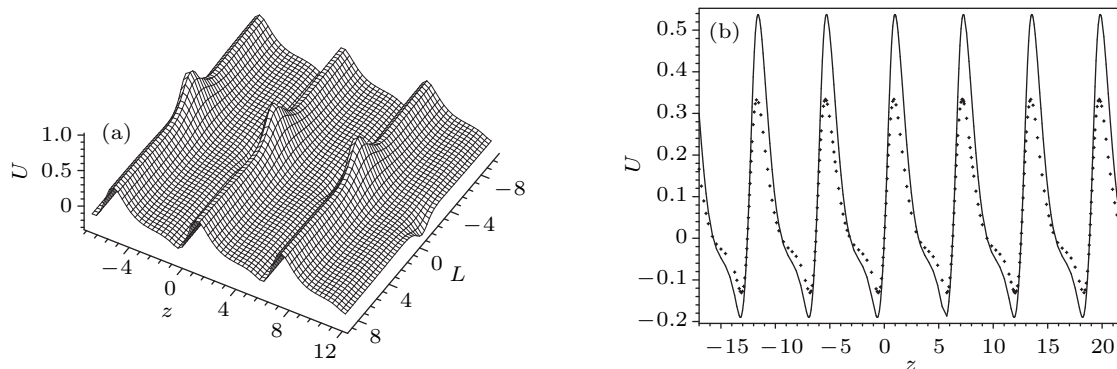


图 2 由 (18) 式给出的强度  $U \equiv |u|^2$  的结构图 (a) 周期波背景下的 dromion 结构图; (b) 截面图 ( $L = 0$  实线,  $L = 4$  虚线)

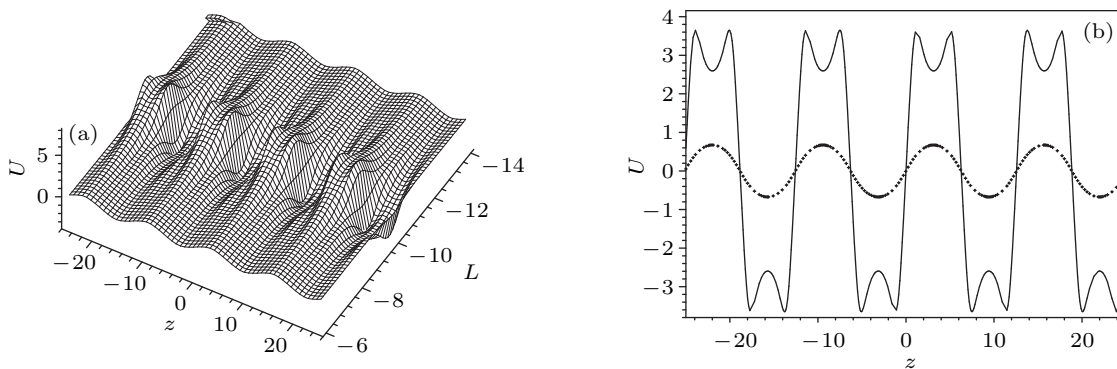


图 3 由 (18) 式给出的强度  $U \equiv |u|^2$  的结构图 (a) 周期波背景下的孤子结构图; (b) 截面图 ( $L = -10$  实线,  $L = -4$  虚线)

3) 众所周知, 典型的 NLSE 的基本孤子在光纤中可以传播无限长的距离而不会有信息失真和波形畸变, 具有很高的传输码率 [9]. 但对变系数 NLSE 而言, 由于非线性和色散效应之间的平衡会遭到破坏, 光脉冲功率沿光纤指数衰减. 如若选取常数  $c_0 = c_2 = c_4 = p = q = 1, c_1 = 0.1, c_3 = 0$ , 色散系数  $\beta(z) = \sin(10z)$  时, 从图 4 和图 5 可见, 在色散系数  $\beta(z)$  仍然是传播距离  $z$  的周期函数, 非线性系数  $\chi(z)$  是双曲函数时, 交替呈现的亮暗孤子的速度和时移随色散的改变而衰减, 而孤子脉冲宽度保持不变 (图 4 (a)  $\chi(z) = 0.1 \tanh(z) \cosh(0.5z)$ , (b)  $\chi(z) = \cosh(z)$ ). 但若非线性系数  $\chi(z)$  含周期函数时 (图 4 (c)  $\chi(z) = -0.01 \tanh(z) \cos(0.5z)$ , (d)  $\chi(z) = 0.1 \cos(0.5z)$ ), 其强度  $U$  将作周期振动.

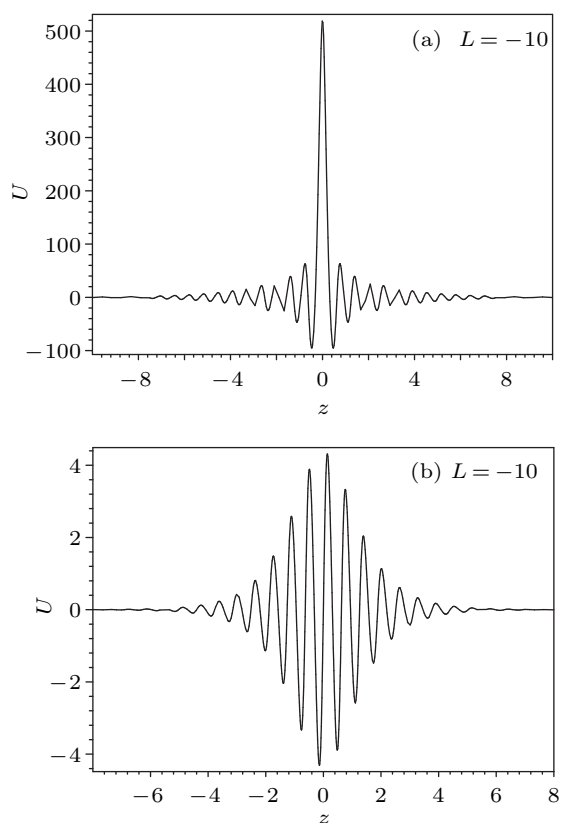


图 4 由 (18) 式给出的强度  $U \equiv |u|^2$  的随色散改变而衰减的两种情形

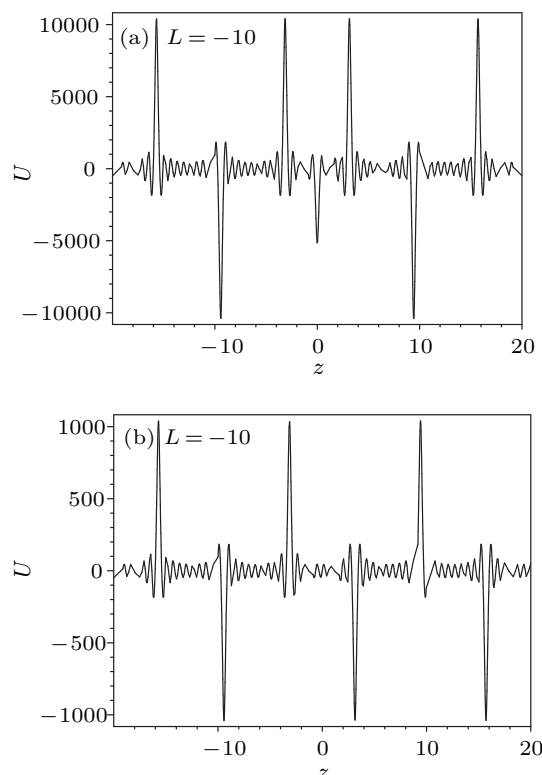


图 5 由 (18) 式给出的强度  $U \equiv |u|^2$  的随色散改变而作周期振动的两种情形

### 3 结论

本文采用 (2+1) 维的相似变换 (3), 将具有色散系数的 (2+1) 维非线性 Schrödinger 方程 (1) 简化成熟知的 Schrödinger 方程 (2), 从中得到了 (2+1) 维非线性 Schrödinger 方程 (1) 的一阶、二阶有理解. 在选取了特定的色散系数  $\beta(z)$ 、非线性系数  $\chi(z)$  及有关常数以后, 利用解 (16) 描述的是一些典型的孤子结构, 如亮孤子背景下的 dromion 结构、扭结型孤子背景下的 solitoff 结构和周期波背景下的孤子结构, 同时, 展示了在非线系数  $\chi(z)$  为不同函数时, 强度  $U$  作衰减和周期振动的情形. 上述结果为构造孤子的复合结构及其在光纤中的传播方式等方面提供了有益的尝试.

作者感谢张解放教授、戴朝卿博士提供的资料和有益的启发、指导.

[1] Kivshar Y, Agrawal G P 2003 *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (New York: Academic Press)  
 [2] Dodd R K, Eilbeck J C, Gibbon J D, Morris H C 1982 *Solitons and nonlinear wave equations* (New York: Academic Press)

[3] Pitaevskii L P, Stringari S 2003 *Bose-Einstein Condensation* (Oxford: Oxford University Press)  
 [4] Scott A 1999 *Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures* (Vol. 1) (Oxford: Oxford University Press)

- [5] Zhang J F, Dai C Q, Yang Q, Zhu J M 2005 *Opt. Commun.* **252** 408
- [6] Zhao L H, Dai C Q 2010 *Eur. Phys. J. D* **58** 327
- [7] Dai C Q, Wang Y Y, Zhang J F 2010 *Opt. Express* **35** 17548
- [8] Dai C Q, Wang X G, Zhang J F 2011 *Ann. Phys.* **326** 645
- [9] Zong F D, Dai C Q, Yang Q, Zhang J F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3805 (in Chinese) [宗丰德, 戴朝卿, 杨琴, 张解放 2006 物理学报 **55** 3805]
- [10] Chen S, Yi L, Guo D S, Lu P 2005 *Phys. Rev. E* **72** 016622
- [11] Kruglov V I, Peacock A C, Harvey J D 2005 *Phys. Rev. E* **71** 056619
- [12] Zhong W P, Xie R H, Belić M, Petrović N, Chen G, Yi L 2008 *Phys. Rev. A* **78** 023821
- [13] Dai C Q, Zhang J F 2010 *Opt. Lett.* **35** 2651
- [14] Dai C Q, Zhu S Q, Zhang J F 2010 *Opt. Commun.* **283** 3784
- [15] Kruglov V I, Peacock A C, Harvey J D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 113902
- [16] Chen S H, Dudley J M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 233903
- [17] Qian C, Wang L L, Zhang J F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 064214 (in Chinese) [钱存, 王亮亮, 张解放 2011 物理学报 **60** 064214]
- [18] Yan Z Y, Konotop V V, Akhmediev 2010 *Phys. Rev. E* **82** 036610
- [19] Akhmediev N, Soto-Crespo J M, Ankiewicz A 2009 *Phys. Lett. A* **373** 2137
- [20] Akhmediev N, Ankiewicz A, Soto-Crespo J M 2009 *Phys. Rev. E* **80** 026601
- [21] Yan Z Y 2010 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) **54** 947
- [22] Yan Z Y 2010 *Phys. Lett. A* **374** 672

## Rational solutions and spatial solitons for the (2+1)-dimensional nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients\*

Ma Zheng-Yi<sup>1)2)†</sup> Ma Song-Hua<sup>1)</sup> Yang Yi<sup>1)</sup>

1) (College of Science, Lishui University, Lishui 323000, China)

2) (College of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

(Received 24 February 2012; revised manuscript received 31 March 2012)

### Abstract

The nonlinear Schrödinger equation is one of the most important nonlinear models with widely applications in physics. Based on a similarity transformation, the (2+1)-dimensional nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients is transformed into a traceable nonlinear Schrödinger equation, and then two types of rational solutions and several spatial solitons are derived.

**Keywords:** nonlinear Schrödinger equation, similarity transformation, rational solution, soliton structure

**PACS:** 05.45.Yv, 03.65.Ge

---

\* Project supported by the Applied Nonlinear Science and Technology from the most important among all the top priority disciplines of Zhejiang Province and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y606049, Y6100257).

† E-mail: ma-zhengyi@163.com