

一类高维相对转动非线性动力系统的 Lyapunov-Schmidt 约化与奇异性分析*

时培明^{1)†} 韩东颖²⁾ 李纪召¹⁾ 蒋金水¹⁾ 刘彬¹⁾

1) (燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

2) (燕山大学车辆与能源学院, 秦皇岛 066004)

(2011年12月27日收到; 2012年3月19日收到修改稿)

研究一类高维相对转动非线性动力系统的降维与分岔特性. 在考虑转动系统中间隙非线性影响因素的基础上, 基于广义耗散系统拉格朗日原理, 建立了一类高维相对转动非线性系统动力学模型. 采用 Lyapunov-Schmidt (LS) 约化方法, 通过对高维非线性动力系统进行降维处理, 得到能够揭示系统非线性动力特性与系统参数之间规律的低维等价分岔方程. 运用奇异性理论对分岔方程进行普适开折, 分析了系统的分岔特性. 结合实例参数, 对分岔特性进行仿真分析, 得到相对转动非线性动力系统发生动力失稳的参数区域及系统参数对动力失稳的影响规律.

关键词: 相对转动, 高维系统, LS 约化, 奇异性

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

1 引言

转动运动是自然界中最普遍的运动之一. 在研究转动运动的过程中, Carmeli 于 1985 年提出了转动相对论力学理论^[1,2], Luo 于 1996 年建立了转动相对论分析力学理论, 并构建了转动相对论系统分析力学的基本理论框架^[3-5]. 近年来相对论分析力学和转动相对论分析力学的研究得到了发展^[6]. 基于相对性原理, 建立了弹性转轴两横截面间的相对转动动力学方程^[7]. 研究了含非线性刚度和非线性阻尼的相对转动系统的混沌运动^[8]及其在谐波激励下的动力学特性^[9,10]. 对于大型传动系统一般建立高维转动动力学模型更接近实际物理结构. 对于高维动力系统, 首先考虑的是降维问题, Redkar 和 Cao 等^[11,12]对周期激励高维非线性动力系统的降维问题进行了研究. AL-Shudeifat 和 Butcher 等^[13]应用修正局部等价线性刚度模型结合新 RITZ 向量研究了受迫高维非线性动力系

统的降维问题. 王繁珍等^[14]应用中心流形理论将一类三维混沌系统降为一维系统, 并分析了该系统的叉式分岔特性及同步控制问题. 查晓明等^[15]利用微分同调原理和混沌分析对集成三相电路系统的降阶问题进行了研究, 得到了降阶化简的判定条件和系统参数与不同条件的关系. LS 约化方法是研究高维非线性动力系统的有效方法. 邓集祥等^[16]应用 LS 方法对高维非线性向量场进行了约化, 分析了次同步谐振中的分岔现象. 王玉新等^[17]采用 LS 约化方法对多自由度并联机构的构型分岔与保持性进行了研究. 目前相对转动系统的研究主要集中在低维方面, 在高维相对转动动力系统降维及分岔特性方面还少有报道.

大型旋转机械动力传动系统是电力、冶金、石化等大型企业中的关键核心设备, 将其抽象为转动动力学模型研究其动力特性. 本文在考虑非线性间隙对该类系统非线性动力特性影响的基础上, 基于 Lagrange 原理, 以转角、转速和角加速度为变量, 建立了一类高维相对转动系统非线性扭振动力

* 国家自然科学基金 (批准号: 51005196) 和河北省自然科学基金 (批准号: F2010001317) 资助的课题.

† E-mail: spm@ysu.edu.cn

学模型. 为研究其动力特性, 采用 LS 约化方法将高维非线性方程组进行降维分解, 求出能够揭示系统非线性动力特性与系统参数之间规律的低维等价方程. 运用奇异性理论, 对系统的分岔特性进行分析. 结合实例参数, 进行仿真分析, 得到系统发生动力失稳的参数区域并分析各种参数对系统稳定性的影响.

2 高维非线性相对转动系统动力学建模

考虑一类具有间隙非线性, 可简化为四自由度的高维相对转动非线性动力系统, 如图 1 所示.

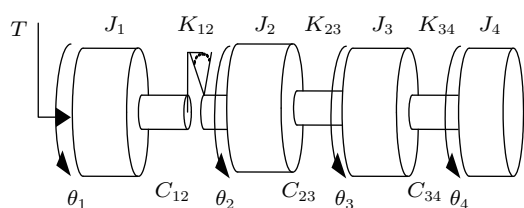


图 1 相对转动非线性系统动力学模型

图 1 中 J_1, J_2, J_3, J_4 分别表示为相对转动系统的转动惯量, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 分别表示四个集中惯量的转角, $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4$ 分别表示四个集中惯量的角频率, $C_{12}, K_{12}, C_{23}, K_{23}, C_{34}, K_{34}$ 分别为四个轴盘之间的阻尼系数和刚度系数, 考虑 J_1 与 J_2 之间存在的非线性间隙, 对该四自由度耦合系统进行动力学分析, 系统的动能为

$$E = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}J_4\dot{\theta}_4^2. \quad (1)$$

考虑间隙非线性因素下系统的势能为

$$U = \frac{1}{2}K_{12}(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{4}K_{12}\delta(\theta_1 - \theta_2)^4 + \frac{1}{2}K_{23}(\theta_2 - \theta_3)^2 + \frac{1}{2}K_{34}(\theta_3 - \theta_4)^2. \quad (2)$$

广义力 (广义力矩) 为

$$Q_r = \sum_{i=1}^4 F_i^{(j)} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_r}, \quad (r = 1, 2, 3, 4), \quad (3)$$

其中, δ 为间隙非线性因素的系数.

$F_i^c = F_i + F_i^c$, F_i 为广义外力, F_i^c 为系统广义阻尼力. q_j ($j = 1, 2, 3, 4$) 为广义坐标.

考虑一端具有广义摩阻力, 令

$$\begin{aligned} F_1^c &= -f_{12}(\theta_1 - \theta_2), \\ F_2^c &= -f_{12}(\theta_2 - \theta_1) - f_{23}(\theta_3 - \theta_2), \\ F_3^c &= -f_{23}(\theta_3 - \theta_2) - f_{34}(\theta_4 - \theta_3), \\ F_4^c &= -f_{34}(\theta_3 - \theta_4). \end{aligned} \quad (4)$$

将代入耗散系统的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial q_r} - \frac{\partial E}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = Q_r, \quad (r = 1, 2), \quad (5)$$

得到

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 + C_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K_{12}f_{12}(\theta_1 - \theta_2) &= T_1, \\ J_2\ddot{\theta}_2 - C_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - K_{12}f_{12}(\theta_1 - \theta_2) \\ + C_{23}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) + K_{23}f_{23}(\theta_2 - \theta_3) &= T_2, \\ J_3\ddot{\theta}_3 - C_{23}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) - K_{23}f_{23}(\theta_2 - \theta_3) \\ + C_{34}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) + K_{34}f_{34}(\theta_3 - \theta_4) &= T_3, \\ J_4\ddot{\theta}_4 - C_{34}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) - K_{34}f_{34}(\theta_3 - \theta_4) &= T_4. \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4$ 为系统集中惯量的角加速度.

令 (6) 式中的 1、2、3 式分别乘以 $1/J_1, 1/J_2, 1/J_3$, 减去 2、3、4 式分别乘以 $1/J_2, 1/J_3, 1/J_4$, 且 $F_1 = \frac{T_1}{J_1} - \frac{T_2}{J_2}, F_2 = \frac{T_2}{J_2} - \frac{T_3}{J_3}, F_3 = \frac{T_3}{J_3} - \frac{T_4}{J_4}$, 则 (6) 式可化为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + b_1f_{12}(x_1) - c_1\dot{x}_2 \\ - d_1f_{23}(x_2) &= F_1, \\ \ddot{x}_2 - \hat{c}_1\dot{x}_1 - \hat{d}_1f_{12}(x_1) + a_2\dot{x}_2 \\ + b_2f_{23}(x_2) - c_2\dot{x}_3 - d_2f_{34}(x_3) &= F_2, \\ \ddot{x}_3 - \hat{c}_2\dot{x}_2 - \hat{d}_2f_{23}(x_2) + a_3\dot{x}_3 \\ + b_3f_{34}(x_3) &= F_3, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2, \quad \ddot{x}_2 = \ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_3, \quad \ddot{x}_3 = \ddot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_4, \\ \dot{x}_1 &= \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \quad \dot{x}_2 = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3, \quad \dot{x}_3 = \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4, \\ x_1 &= \theta_1 - \theta_2, \quad x_2 = \theta_2 - \theta_3, \quad x_3 = \theta_3 - \theta_4, \\ a_1 &= \frac{(J_1 + J_2)}{J_1J_2}C_{12}, \quad b_1 = \frac{(J_1 + J_2)}{J_1J_2}K_{12}, \\ c_1 &= \frac{C_{23}}{J_2}, \quad d_1 = \frac{K_{23}}{J_2}, \quad \hat{c}_1 = \frac{C_{12}}{J_2}, \quad \hat{d}_1 = \frac{K_{12}}{J_2}, \\ a_2 &= \frac{(J_2 + J_3)}{J_2J_3}C_{23}, \quad b_2 = \frac{(J_2 + J_3)}{J_2J_3}K_{23}, \\ c_2 &= \frac{C_{34}}{J_3}, \quad d_2 = \frac{K_{34}}{J_3}, \quad \hat{c}_2 = \frac{C_{23}}{J_3}, \quad \hat{d}_2 = \frac{K_{23}}{J_3}, \\ a_3 &= \frac{(J_3 + J_4)}{J_3J_4}C_{34}, \quad b_3 = \frac{(J_3 + J_4)}{J_3J_4}K_{34}. \end{aligned}$$

(7) 式中, $f_{12}(x_1) = (x_1 - e_c) + \delta(x_1 - e_c)^3$, 为间隙的非线性表达式, e_c 为间隙量, $f_{23}(x_2) = x_2$, $f_{34}(x_3) = x_3$.

则 (7) 式可以化为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + b_1[(x_1 - e_c) + \delta(x_1 - e_c)^3] \\ - c_1\dot{x}_2 - d_1x_2 = F_1, \\ \ddot{x}_2 - \hat{c}_1\dot{x}_1 - \hat{d}_1[(x_1 - e_c) + \delta(x_1 - e_c)^3] \\ + a_2\dot{x}_2 + b_2x_2 - c_2\dot{x}_3 - d_2x_3 = F_2, \\ \ddot{x}_3 - \hat{c}_2\dot{x}_2 - \hat{d}_2x_2 + a_3\dot{x}_3 \\ + b_3x_3 = F_3, \end{aligned} \quad (8)$$

只考虑一端具有外扰的情形, 令 $F_2 = F_3 = 0$, 则 (8) 式可化为六个耦合的一阶非线性常微分方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = -a_1y_1 - b_1((x_1 - e_c) + \delta(x_1 - e_c)^3) \\ + c_1y_2 + d_1x_2 + F_1, \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \hat{c}_1y_1 + \hat{d}_1((x_1 - e_c) + \delta(x_1 - e_c)^3) \\ - a_2y_2 - b_2x_2 + c_2y_3 + d_2x_3, \\ \dot{x}_3 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \hat{c}_2y_2 + \hat{d}_2x_2 - a_3y_3 - b_3x_3, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ 为动力系统的状态变量, 式中 x_1, x_2, x_3 表示相对转角, y_1, y_2, y_3 表示相对角频率.

将 (9) 式简写为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}), \quad (10)$$

其中, $\mathbf{X} = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)^T$, 为高维系统矩阵的列向量, $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T$, 是对应的非线性列向量函数.

3 高维相对转动非线性动力系统的 LS 约化

高维系统 (10) 在其平衡点 $\bar{\mathbf{X}}$ 处满足

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{X}}) = \mathbf{0}, \quad (11)$$

在平衡位置处状态向量 \mathbf{X}_0 的坐标为

$$x_1 = \frac{\frac{-d_1\hat{d}_1b_3F_1}{b_1d_2\hat{d}_2 + d_1\hat{d}_1b_3 - b_1b_2b_3} + F_1}{b_1(1 + 3\delta e_c^2)} + e_c + \delta e_c^3,$$

$$\begin{aligned} y_1 = 0, \\ x_2 = \frac{-\hat{d}_1b_3F_{12}}{b_1d_2\hat{d}_2 + d_1\hat{d}_1b_3 - b_1b_2b_3}, \\ y_2 = 0, \\ x_3 = \frac{-\hat{d}_1\hat{d}_2F_1}{b_1d_2\hat{d}_2 + d_1\hat{d}_1b_3 - b_1b_2b_3}, \\ y_3 = 0. \end{aligned}$$

由此可以求出系统稳态运行状态 $\bar{\mathbf{X}}$. 设 $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{X}})$ 为 $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ 在 $\bar{\mathbf{X}}$ 处的 Jacobi 矩阵, 即

$$\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{X}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial y_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial y_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial y_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial y_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial y_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial y_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial y_3} \end{bmatrix}.$$

则平衡点 $\bar{\mathbf{X}}$ 的 Lyapunov 稳定性由 $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{X}})$ 的特征值所决定.

为了计算 $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{X}})$ 的特征值, 研究动力系统的静态分岔特性. 则 $\bar{\mathbf{X}}$ 处系统的 Jacobi 矩阵 $\mathbf{Df}(\bar{\mathbf{X}}_0)$ 可表示为下式:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 - 3b_1\delta(x_1 - e_c)^2 & -a_1 - \lambda & d_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \hat{d}_1 + 3\hat{d}_1\delta(x_1 - e_c)^2 & \hat{c}_1 & -b_2 & -a_2 - \lambda & d_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \hat{d}_2 & \hat{c}_2 & -b_3 & -a_3 - \lambda \end{bmatrix},$$

它是一个 6×6 方阵, 其行列式的值为

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{L}) \\ = \lambda^6 + (a_1 + a_2 + a_3)\lambda^5 + \{b_1[1 + 3\delta(x_1 - e_c)^2] \\ + a_1(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3 + a_2a_3) - \hat{c}_2c_2 - c_1\hat{c}_1\}\lambda^4 \\ + a_1(b_2 + b_3 + a_2a_3) + (a_3b_2 + a_2b_3) - a_1\hat{c}_2c_2 \\ - (\hat{d}_2c_2 + d_2\hat{c}_2) - c_1\hat{d}_1[1 + 3\delta(x_1 - e_c)^2] \\ - \hat{c}_1(d_1 + a_3c_1)\}\lambda^3 - \left\{ [1 + 3\delta(x_1 - e_c)^2](-b_1b_2 \right. \\ - b_1b_3 - b_1a_2a_3 + b_1c_2\hat{c}_2 + d_1\hat{d}_1 + a_3c_1\hat{d}_1) \\ - a_1(a_3b_2 + a_2b_3) - b_2b_3 + a_1(\hat{d}_2c_2 + d_2\hat{c}_2) \\ \left. + d_2\hat{d}_2 + \hat{c}_1(d_1a_3 + c_1b_3) \right\}\lambda^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ [1 + 3\delta(x_1 - e_c)^2](-b_1 a_3 b_2 - b_1 a_2 b_3 \right. \\
 & + b_1 \hat{d}_2 c_2 + b_1 d_2 \hat{c}_2 + a_3 d_1 \hat{d}_1 + c_1 b_3 \hat{d}_1) - a_1 b_2 b_3 \\
 & + a_1 d_2 \hat{d}_2 + \hat{c}_1 d_1 b_3 \left. \right\} \lambda - (-b_1 b_2 b_3 + b_1 d_2 \hat{d}_2 \\
 & + d_1 \hat{d}_1 b_3) [1 + 3\delta(x_1 - e_c)^2] = 0.
 \end{aligned}$$

由上式可知, 当 $e_c = x_1 - \sqrt{-\frac{1}{3\delta}}$ ($\delta < 0$) 时, 矩阵有 1 个 0 特征值, L 为奇异矩阵.

可知 $\dim N(L) = 1$, 设 v_0 为零空间 $N(L)$ 的一个基向量, 则有

$$v_0 = \left(-\frac{d_1}{-b_1[1 + 3\delta(x_1 - e_c)^2]}, 0, 1, 0, \frac{\hat{d}_2}{b_3}, 0 \right)^T.$$

L 伴随算子表示的矩阵为它的共轭转置阵 L^* . 因为 L 是一个实矩阵, 故其共轭转置矩阵也是一个实矩阵, 且有 $L^* = L^T$, 显然 L 是具有零指标的 Fredholm 型算子, 所以有 $\dim N(L^*) = 1$. 经过推导可得 $N(L^*)$ 的一个基向量为

$$v_1 = \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1, \frac{\hat{d}_1}{b_1}, a_2 - \frac{c_1 \hat{d}_1}{b_1} - \frac{\hat{c}_2 d_2}{b_3}, \right. \\
 \left. 1, \frac{a_3 d_2}{b_3} - c_2, \frac{d_2}{b_3} \right)^T,$$

于是, 六维 Euclid 空间 R^6 可以作如下分解:

$$R^6 = N(L) \oplus M = R(L) \oplus N(L^*).$$

定义投影算子

$$P: R^6 \rightarrow R(L),$$

与补投影算子

$$I - P: R^6 \rightarrow N(L^*) = \text{span}\{v_1\}$$

于是方程

$$f(x, e_c) = 0, \quad (12)$$

等价于以下两式:

$$\begin{aligned}
 Pf(v + w, e_c) &= 0, \\
 (I - P)f(v + w, e_c) &= 0,
 \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $v \in N(L) = \text{span}\{v_0\}$, $w \in M$. 根据 Euclid 空间中内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的定义, 式 $(I - P)f(v + w, e_c) = 0$ 等价于下式:

$$\langle f(v + w, e_c), v_1 \rangle = 0, \quad (14)$$

得到

$$\begin{aligned}
 & (\hat{d}_1 - b_1) \left[\delta e_c^3 + 3\delta \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1 \right) e_c^2 \right. \\
 & - \left. \left(3\delta \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1 \right)^2 + 1 \right) e_c \right] \\
 & + (\hat{d}_1 - b_1) \left[\delta \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1 \right)^3 \right. \\
 & + \left. \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1 \right) \right] \\
 & + (d_1 - b_2 + \hat{d}_2) \left(a_2 - \frac{c_1 \hat{d}_1}{b_1} - \frac{\hat{c}_2 d_2}{b_3} \right) + \frac{c_2 d_2}{b_3} \\
 & + (d_2 - b_3) \left(\frac{a_3 d_2}{b_3} - c_2 \right) + \frac{\hat{d}_1}{b_1} - \frac{a_1 \hat{d}_1}{b_1} + c_1 \\
 & + F_1 + 1 + \frac{\hat{c}_1 \hat{d}_1}{b_1} - a_2 + \frac{d_2}{b_3} + \hat{c}_2 - \frac{a_3 d_2}{b_3} = 0,
 \end{aligned}$$

又 $e_c = x_1 - \sqrt{-\frac{1}{3\delta}}$, 则可以将上式写为

$$a^3 - \lambda a + m + n a^2 = 0, \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{1}{\delta} \left[1 + 6\delta \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1 \right) \sqrt{-\frac{1}{3\delta}} \right. \\
 & + \left. \left(3\delta \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1 \right)^2 + 1 \right) \right], \\
 n &= \frac{\left[-3\delta \sqrt{-\frac{1}{3\delta}} + 3\delta \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1 \right) \right]}{\delta},
 \end{aligned}$$

$x_1 = a$,

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{\delta} \left\{ \delta \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1 \right)^3 \right. \\
 & + \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1 \right) + \frac{1}{3} \sqrt{-\frac{1}{3\delta}} \\
 & - \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1 \right) \\
 & + \left. \left[3\delta \left(\frac{a_1 b_2 b_3 - a_1 \hat{d}_2 d_2}{d_1 b_3} - \hat{c}_1 \right)^2 + 1 \right] \sqrt{-\frac{1}{3\delta}} \right\} \\
 & + \frac{1}{(\hat{d}_1 - b_1)\delta} \left\{ (d_1 - b_2 + \hat{d}_2) \left(a_2 - \frac{c_1 \hat{d}_1}{b_1} \right. \right. \\
 & - \left. \frac{\hat{c}_2 d_2}{b_3} \right) + \frac{c_2 d_2}{b_3} + (d_2 - b_3) \left(\frac{a_3 d_2}{b_3} - c_2 \right) \\
 & + \left. \frac{\hat{d}_1}{b_1} - \frac{a_1 \hat{d}_1}{b_1} + c_1 + F_1 + 1 + \frac{\hat{c}_1 \hat{d}_1}{b_1} - a_2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{d_2}{b_3} + \hat{c}_2 - \frac{a_3 d_2}{b_3} \Big\}.$$

4 奇异性分析

利用奇异性理论研究方程 (15) 的拓扑结构. 方程 (15) 等号左边为 GS 范式 $f = x^3 - \lambda x$ 的普适开折, 且余维数为 2, 根据转迁集的定义, 可得转迁集如下:

根据方程 (15), 有

$$G(a, \lambda, m, n) = a^3 - \lambda a + m + na^2, \quad (16)$$

$$G_a = 3a^2 - \lambda + 2na, \quad (17)$$

$$G_{aa} = 6a + 2n, \quad (18)$$

$$G_\lambda = a. \quad (19)$$

根据转迁集的定义, 可以得到:

1) 分岔点集: $B = \{(m, n) | G = G_a + G_\lambda = 0\} = \{m = 0\}$;

2) 滞后点集: $H = \{(m, n) | G = G_a = G_{aa} = 0\} = \{27m - n^3 = 0\}$;

3) 双极限点集: $D = \phi$;

4) 转迁集: $\Sigma = B \cup H \cup D$.

由图 2 可知, 系统具有 9 种不同的分岔形式如图 3—图 9. 其中, H^+, H^-, O, B^+, B^- 为系统转迁集上的分岔曲线, 区域 (1), (2), (3), (4) 为转迁集划分出的 4 个不同分岔区域. 在这 4 个分岔区域中均存在幅值跳跃现象, 这对于转动系统的稳定性是不利的. 拓扑结构图中的虚线部分是不稳定部分. 在实际生产中, 应尽量避免参数出现在这些区域.

以某实际相对转动系统为对象, 参数取值如下: $J_1 = 9895.6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, J_2 = 1013.8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, J_3 = 2330.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, J_4 = 3916.3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, C_{12} = 1593 \text{ N/m}\cdot\text{s}, C_{23} = 1602 \text{ N/m}\cdot\text{s}, C_{34} = 1593 \text{ N/m}\cdot\text{s}, K_{12} = 3.14 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{m/rad}, K_{12} = 7 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{m/rad}, K_{12} = 6.03 \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$.

经计算, $m < 0, n < 0$ 且位于区域 (2) 中, 因此该转动系统的稳定性以图 6 进行分析. 由于振动幅值 $a > 0$, 故从图 6 中可以看出, 当参数发生变化时, 系统会发生鞍结分岔, 这对转动系统的稳定性是非常不利的, 应加以抑制.

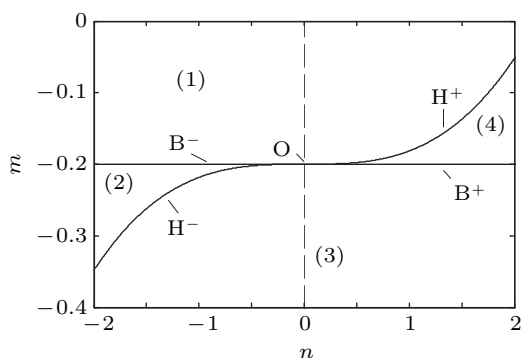


图 2 转迁集图

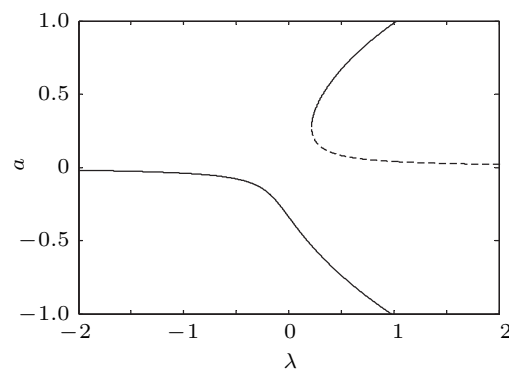


图 4 区域 (1) 分岔曲线的拓扑结构

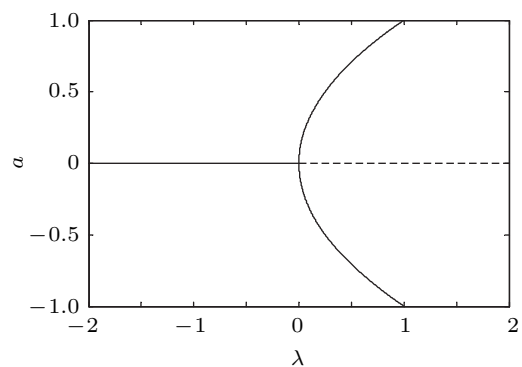


图 3 O 点处分岔曲线的拓扑结构

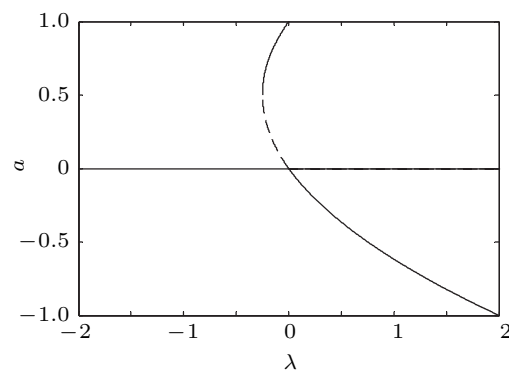


图 5 B- 处分岔曲线的拓扑结构

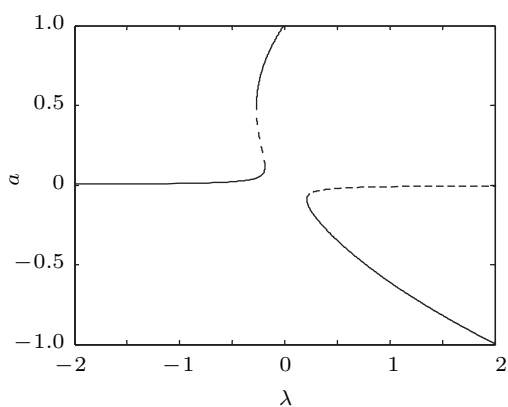


图6 区域(2)分岔曲线的拓扑结构

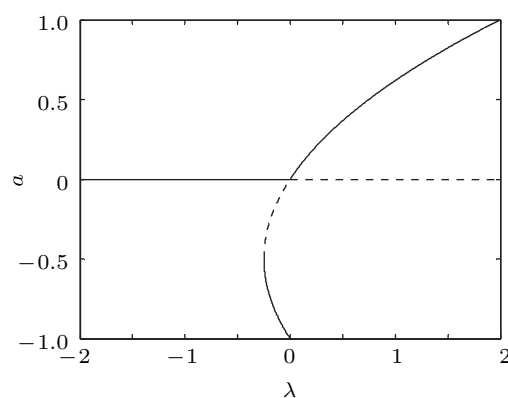


图9 B⁺处分岔曲线的拓扑结构

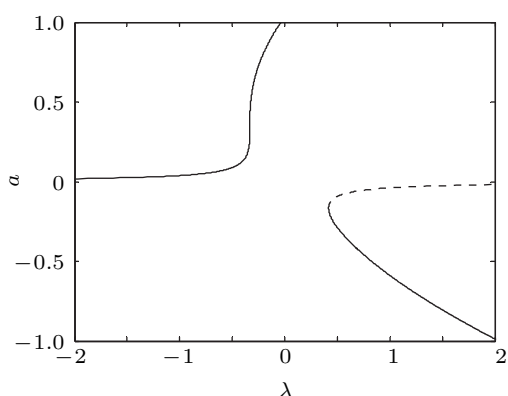


图7 H⁻处分岔曲线的拓扑结构

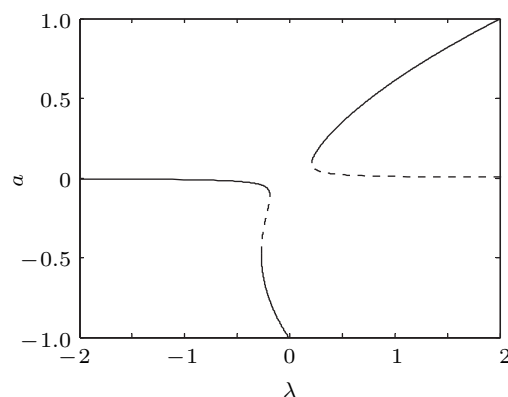


图10 区域(4)分岔曲线的拓扑结构

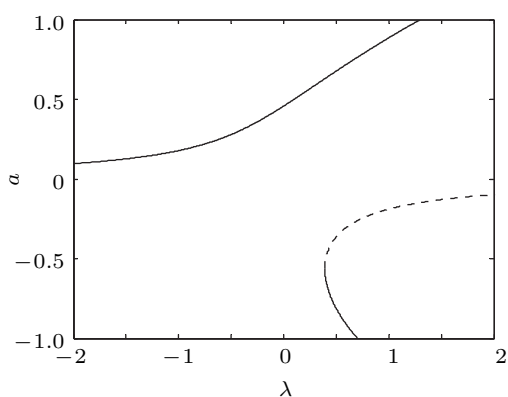


图8 区域(3)分岔曲线的拓扑结构

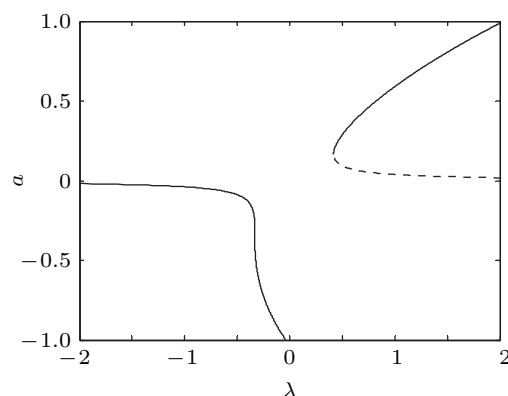


图11 H⁺分岔曲线的拓扑结构

5 结论

本文研究了一类高维相对转动非线性动力系统的降维问题及分岔特性. 考虑具有非线性间隙对传动系统动力特性的影响, 基于 Lagrange 原理, 建

立了一类高维相对转动非线性系统的动力学方程组. 采用 LS 约化方法对该类高维非线性系统进行了降维约化, 得到能够反映系统动力特性与系统参数之间一般规律的等效分岔方程. 运用奇异性理论对分岔方程进行开折处理, 并分析了系统的分岔特性, 得到系统的转迁集及 9 种分岔曲线的拓扑结

构. 结合实例参数, 进行仿真分析, 得到该系统发生扭振时的分岔曲线的拓扑结构, 通过对其分岔曲线进行分析, 得到发生动力失稳的系统参数取值区间.

这对研究工程中广泛存在的该类高维相对转动系统的动力失稳现象具有理论意义.

-
- [1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
[2] Carmeli M 1986 *Inter. J. Theor. Phys.* **15** 89
[3] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
[4] Fu J L, Chen X W, Luo S K 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 549
[5] Luo S K, Guo Y X, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯, 郭永新, 陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]
[6] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523
[7] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董全林, 刘彬 2002 物理学报 **51** 2191]
[8] Shi P M, Liu B, Hou D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1321 (in Chinese) [时培明, 刘彬, 侯东晓 2008 物理学报 **57** 1321]
[9] Shi P M, Liu B, Hou D X 2009 *Chinese Journal of Mechanical Engineering* **22** 132
[10] Shi P M, Han D Y, Liu B 2009 *Chin. Phys. B* **19** 090306
[11] Redkar S, Sina S C 2008 *ASME J. Comput Nonlinear Dyn.* **3** 1
[12] Cao D Q, Wang J L, Huang W H 2010 *Sci. China Tech. Sci.* **53** 684
[13] AL-Shudeifat M A, Butcher E A 2010 *Nonlinear Dyn.* **62** 821
[14] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Zhang Y H, Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 (in Chinese) [王繁珍, 齐国元, 陈增强, 张宇辉, 袁著社 2006 物理学报 **55** 4005]
[15] Zha X M, Zhang Y, Sun J J, Fan Y P 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 020505 (in Chinese) [查晓明, 张扬, 孙建军, 樊友平 2012 物理学报 **61** 020505]
[16] Dong J X, Hua Y, Wei C H. 2001 *Automation of Electric Power Systems* **28** 24 (in Chinese) [邓集祥, 华瑶, 韦春华 2001 电力系统自动化 **28** 24]
[17] Wang Y X, Wang Y M, Liu X S 2003 *Science in China (Series E)* **33** 56 (in Chinese) [王玉新, 王仪明, 刘学深 2003 中国科学 (E 辑) **33** 56]

Lyapunov-Schmidt reduction and singularity analysis of a high-dimensional relative-rotation nonlinear dynamical system*

Shi Pei-Ming^{1)†} Han Dong-Ying²⁾ Li Ji-Zhao¹⁾ Jiang Jin-Shui¹⁾ Liu Bin¹⁾

1) (College of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

2) (College of Vehicles and Energy, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(Received 27 December 2011; revised manuscript received 19 March 2012)

Abstract

The dimensionality reduction and bifurcation of some high-dimensional relative-rotation nonlinear dynamical system are studied. Considering the nonlinear influence factor of a relative-rotation nonlinear dynamic system, the high-dimensional relative-rotation torsional vibration global dynamical equation is established based on Lagrange equation. The equivalent low-dimensional bifurcation equation, which can reveal the low-dimensional equivalent bifurcation equation between the nonlinear dynamics and parameters, can be obtained by reducing the dimensionality system using the method of Lyapunov-Schmidt reduction. On this basis, the bifurcation characteristic is analyzed by taking universal unfolding on the bifurcation equation through using the singularity theory. The simulation is carried out with actual parameters. The parameter region of torsional vibration and the effect of the parameters on the vibration are discussed.

Keywords: relatively rotation, high-dimensional system, L-S reduction, singularity

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51005196), and the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. F2010001317).

† E-mail: spm@ysu.edu.cn