磁场中带电粒子阻尼运动的分析力学表示

丁光涛†

(安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖 241000)

(2011 年 3 月 15 日收到; 2011 年 4 月 7 日收到修改稿)

研究带电粒子在磁场中作阻尼运动的分析力学表示. 首先, 求解运动微分方程的 Birkhoff 力学逆问题, 得到带电粒子的 4 个 Rirkhoff 表示; 其次, 导出 4 个状态空间中 Lagrange 表示和对应的 4 个位形空间中 Lagrange 表示; 第三, 构造出 4 个 Hamilton 函数; 最后, 从粒子运动的分析力学表示直接得到 4 个第一积分, 并求出运动方程的解.

关键词: 约化的 Lorentz-Dirac 方程, 分析力学表示, 逆问题

PACS: 02.30.Zz, 45.05.+x, 45.20. Jj, 03.50.De

1 引 言

分析力学的发展形成了一整套独特的研究动力学方程的方法, 这些方法对求解一般微分方程也是有效的, 为此, 先应将微分方程分析力学化, 即将微分方程表示成分析力学形式, 如 Lagrange 方程, Hamilton 方程或 Birkhoff 方程 [1]. 这种问题是分析力学逆问题, 其核心是从给出的微分方程构造出对应的系统特征函数, 如 Lagrange 函数、Hamilton 函数或 Birkhoff 函数和函数组, 关于这个热门课题已有很多成果 [2−12].

文献 [13] 和 [14] 中, 研究了约化的 Lorentz-Dirac 方程

$$\ddot{x}=\alpha\dot{x}-\beta\dot{y},\ \ddot{y}=\beta\dot{x}+\alpha\dot{y}, \tag{1}$$

该方程描述磁场中带电粒子作平面阻尼运动, 文献给出的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}\ln(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\dot{y}\arctan\frac{\dot{x}}{\dot{y}}+\alpha x-\beta y, \tag{2}$$

同时借助将方程 (1) 一阶化和引入辅助变量, 构造出比较复杂的 Hamilton 函数. 本文通过不同的路径继续研究方程 (1) 的分析力学化, 首先导出方程 (1) 的 Birkhoff 表示, 再变换得到 Lagrange 表示和 Hamilton 表示. 我们得到四组表示, 其中一组表示中 Lagrange 函数与 (2) 式 L 相同, 而其他三组则不同, 得到的 Hamiton 函数比文献 [13] 中简化. 最后, 从分析力学表示得到了方程 (1) 的解.

2 磁场中带电粒子阻尼运动的 Birkhoff 表示

方程 (1) 是坐标空间中粒子运动微分方程, 引入速度空间变量, 则可写成状态空间中方程

$$\begin{aligned}&\dot{x}=u,\quad \dot{y}=v,\\&\dot{u}=\alpha u-\beta v,\quad \dot{v}=\beta u+\alpha v.\end{aligned} \tag{3}$$

引入 Birkhoff 变量 [3,5]

$$a^1=x,\ a^2=y,\ a^3=u,\ a^4=v, \tag{4}$$

方程 (3) 写成

$$\begin{aligned}&\dot{a}^1=\sigma^1=a^3,\ \dot{a}^2=\sigma^2=a^4,\\&\dot{a}^3=\sigma^3=\alpha a^3-\beta a^4,\\&\dot{a}^4=\sigma^4=\beta a^3+\alpha a^4.\end{aligned} \tag{5}$$

设方程 (5) 的 Birkhoff 函数组为 $R_\mu(t,a)(\mu=1,2,3,4)$, Birkhoff 函数为 $B(t,a)$, Birkhoff 方程为

$$\omega_{\mu v}\dot{a}^v-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0\quad(\mu,v=1,2,3,4), \tag{6}$$

† E-mail: dgt@sina.com

　

式中 Birkhoff 张量为

$$\omega_{\mu\upsilon}=\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon}. \tag{7}$$

若方程 (6) 与方程 (5) 等价, 则 $\omega_{\mu\upsilon}$ 应满足下列方程 [7]:

$$\frac{\partial\omega_{\mu\upsilon}}{\partial t}+\frac{\partial\omega_{\mu\upsilon}}{\partial a^\rho}\sigma^\rho-\omega_{\upsilon\rho}\frac{\partial\sigma^\rho}{\partial a^\mu}+\omega_{\mu\rho}\frac{\partial\sigma^\rho}{\partial a^\upsilon}=0. \tag{8}$$

将方程 (5) 中 $\sigma_\mu(\mu=1,2,3,4)$ 代入方程, 得到确定 $\omega_{\mu\upsilon}$ 的 6 个独立分量的方程如下:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega_{12}}{\partial t}+\frac{\partial\omega_{12}}{\partial a^1}a^3+\frac{\partial\omega_{12}}{\partial a^2}a^4+\frac{\partial\omega_{12}}{\partial a^3}\times(\alpha a^3-\beta a^4)+\frac{\partial\omega_{12}}{\partial a^4}(\beta a^3+\alpha a^4)=0,\\
&\frac{\partial\omega_{13}}{\partial t}+\frac{\partial\omega_{13}}{\partial a^1}a^3+\frac{\partial\omega_{13}}{\partial a^2}a^4+\frac{\partial\omega_{13}}{\partial a^3}\times(\alpha a^3-\beta a^4)+\frac{\partial\omega_{13}}{\partial a^4}(\beta a^3+\alpha a^4)+\alpha\omega_{13}+\beta\omega_{14}=0,\\
&\frac{\partial\omega_{14}}{\partial t}+\frac{\partial\omega_{14}}{\partial a^1}a^3+\frac{\partial\omega_{14}}{\partial a^2}a^4+\frac{\partial\omega_{14}}{\partial a^3}\times(\alpha a^3-\beta a^4)+\frac{\partial\omega_{14}}{\partial a^4}(\beta a^3+\alpha a^4)+\omega_{12}-\beta\omega_{13}+\alpha\omega_{14}=0,\\
&\frac{\partial\omega_{23}}{\partial t}+\frac{\partial\omega_{23}}{\partial a^1}a^3+\frac{\partial\omega_{23}}{\partial a^2}a^4+\frac{\partial\omega_{23}}{\partial a^3}\times(\alpha a^3-\beta a^4)+\frac{\partial\omega_{23}}{\partial a^4}(\beta a^3+\alpha a^4)+\omega_{21}+\alpha\omega_{23}+\beta\omega_{24}=0,\\
&\frac{\partial\omega_{24}}{\partial t}+\frac{\partial\omega_{24}}{\partial a^1}a^3+\frac{\partial\omega_{24}}{\partial a^2}a^4+\frac{\partial\omega_{24}}{\partial a^3}\times(\alpha a^3-\beta a^4)+\frac{\partial\omega_{24}}{\partial a^4}(\beta a^3+\alpha a^4)-\beta\omega_{23}+\alpha\omega_{24}=0,\\
&\frac{\partial\omega_{34}}{\partial t}+\frac{\partial\omega_{34}}{\partial a^1}a^3+\frac{\partial\omega_{34}}{\partial a^2}a^4+\frac{\partial\omega_{34}}{\partial a^3}\times(\alpha a^3-\beta a^4)+\frac{\partial\omega_{34}}{\partial a^4}(\beta a^3+\alpha a^4)-\omega_{41}-\alpha\omega_{43}+\omega_{32}+\alpha\omega_{34}=0.
\end{aligned} \tag{9}$$

方程组 (9) 的解不是唯一的, 列出 4 组解如下:

$$\begin{aligned}
&\omega_{12}=-\omega_{21}=0,\\
&\omega_{13}=-\omega_{31}=\frac{a^3}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\omega_{14}=-\omega_{41}=\frac{a^4}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\omega_{23}=-\omega_{32}=\frac{a^4}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\omega_{24}=-\omega_{42}=-\frac{a^3}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\omega_{34}=-\omega_{43}=0;
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\omega'_{12}=-\omega'_{21}=0,\\
&\omega'_{13}=-\omega'_{31}=-\frac{a^4}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\omega'_{14}=-\omega'_{41}=\frac{a^3}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\omega'_{23}=-\omega'_{32}=\frac{a^3}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\omega'_{24}=-\omega'_{42}=\frac{a^4}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\omega'_{34}=-\omega'_{43}=0;
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\bar\omega_{12}=-\bar\omega_{21}=0,\\
&\bar\omega_{13}=-\bar\omega_{31}=-\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t,\\
&\bar\omega_{14}=-\bar\omega_{41}=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t,\\
&\bar\omega_{23}=-\bar\omega_{32}=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t,\\
&\bar\omega_{24}=-\bar\omega_{42}=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t,\\
&\bar\omega_{34}=-\bar\omega_{43}=0;
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&\bar\omega'_{12}=-\bar\omega'_{21}=0,\\
&\bar\omega'_{13}=-\bar\omega'_{31}=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t,\\
&\bar\omega'_{14}=-\bar\omega'_{41}=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t,\\
&\bar\omega'_{23}=-\bar\omega'_{32}=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t,\\
&\bar\omega'_{24}=-\bar\omega'_{42}=-\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t,\\
&\bar\omega'_{34}=-\bar\omega'_{43}=0.
\end{aligned} \tag{13}$$

为了导出 R_μ, 将 (10) 式中 $\omega_{\mu\upsilon}$ 代入 (7) 式, 得到如下方程:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial R_2}{\partial a^1}-\frac{\partial R_1}{\partial a^2}=0,\\
&\frac{\partial R_3}{\partial a^1}-\frac{\partial R_1}{\partial a^3}=\frac{a^3}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\frac{\partial R_4}{\partial a^1}-\frac{\partial R_1}{\partial a^4}=\frac{a^4}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\frac{\partial R_3}{\partial a^2}-\frac{\partial R_2}{\partial a^3}=\frac{a^4}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\frac{\partial R_4}{\partial a^2}-\frac{\partial R_2}{\partial a^4}=-\frac{a^3}{(a^3)^2+(a^4)^2},\\
&\frac{\partial R_4}{\partial a^3}-\frac{\partial R_3}{\partial a^4}=0.
\end{aligned} \tag{14}$$

方程组 (14) 的解也不是唯一的, 其中一组解为

$$\begin{aligned}
&R_1=-\frac{1}{2}\ln\Big((a^3)^2+(a^4)^2\Big),\\
&R_2=-\mathrm{arctan}\frac{a^3}{a^4},\ N\ R_3=R_4=0.
\end{aligned} \tag{15}$$

为了导出 B, 将方程 (5) 中 σ^μ, (10) 式 $\omega_{\mu\upsilon}$

和 (15) 式中 R_μ 代入 (6) 式, 得到

$$\frac{\partial B}{\partial a^1}=\alpha, \frac{\partial B}{\partial a^2}=-\beta, \frac{\partial B}{\partial a^3}=-1, \frac{\partial B}{\partial a^4}=0. \quad (16)$$

由此得到 B 的一个解为

$$B=\alpha a^1-\beta a^2-a^3. \quad (17)$$

(15) 式中 R_μ 和 (17) 式中 B, 是与 (10) 式中 $\omega_{\mu\upsilon}$ 对应的方程 (5) 的 Birkhoff 函数组和函数, 是带电粒子运动方程 (1) 或 (3) 的一个 Birkhoff表示.

类似的程序还可以导出与 (11), (12) 和 (13) 式中 $\omega_{\mu\upsilon}$ 对应的另外 3 组 Birkhoff 函数组和函数为

$$\begin{aligned}
R_1' &= -\arctan\frac{a^4}{a^3},\ R_2'=-\frac{1}{2}\ln\Big((a^3)^2+(a^4)^2\Big),\\
R_3' &= R_4'=0,\ B'=\beta a^1+\alpha a^2-a^4; \quad (18)\\
\bar{R}_1 &= \mathrm{e}^{-\alpha t}(a^3\sin\beta t-a^4\cos\beta t),\\
\bar{R}_2 &= -\mathrm{e}^{-\alpha t}(a^3\cos\beta t+a^4\sin\beta t),\\
\bar{R}_3 &= \bar{R}_4=0,\\
\bar{B} &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\Big[\frac{1}{2}\big((a^3)^2-(a^4)^2\big)\sin\beta t\\
&\quad -a^3a^4\cos\beta t\Big]; \quad (19)\\
\bar{R}'_1 &= -\mathrm{e}^{-\alpha t}(a^3\cos\beta t+a^4\sin\beta t),\\
\bar{R}'_2 &= -\mathrm{e}^{-\alpha t}(a^3\sin\beta t-a^4\cos\beta t),\\
\bar{R}_3' &= \bar{R}'_4=0,\\
\bar{B}' &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\Big[\frac{1}{2}\big((a^4)^2-(a^3)^2\big)\cos\beta t\\
&\quad -a^3a^4\sin\beta t\Big]. \quad (20)
\end{aligned}$$

综上所述, 我们导出了 4 组粒子运动微分方程 (1) 或 (3) 的 Birkhoff 表示, 事实上, 每一组表示还可以通过 Birkhoff 规范变换构成新的表示 [3], 然而, 本文对这样的表示不再引入.

3 从 Birkhoff 表示导出 Lagrange 表示和 Hamilton 表示

3.1 带电粒子运动的状态空间 Lagrange 表示

由 Birkhoff 函数组 R_μ 和函数 B, 可以得到系统的一阶 Lagrange 函数 [3,5]

$$L=-R_\mu\dot{a}^\mu+B, \quad (21)$$

对磁场中带电粒子阻尼运动, 作变换 (5) 的逆变换, 即将 Birkhoff 变量变换成坐标 - 速度状态变量, 就得到粒子状态空间 Lagrange 函数 [15]. 例如, 由 (15) 式 R_μ 和 (17) 式 B, 可得

$$\begin{aligned}
L_{\mathrm{s1}} &= \frac{1}{2}\dot{x}\ln(u^2+v^2)+\dot{y}\arctan\frac{u}{v}\\
&\quad +\alpha x-\beta y-u. \quad (22)
\end{aligned}$$

对应的状态空间 Lagrange 方程为

$$\begin{aligned}
&\frac{u\dot{u}+v\dot{v}}{u^2+v^2}-\alpha=0,\ \frac{v\dot{u}-u\dot{v}}{u^2+v^2}+\beta=0.\\
&-\frac{u\dot{x}+v\dot{y}}{u^2+v^2}+1=0,\ -\frac{v\dot{x}-u\dot{y}}{u^2+v^2}=0. \quad (23)
\end{aligned}$$

由方程 (23) 可以导出方程 (3), 换句话说, (22) 式中 L_{s1} 和方程 (23) 是粒子运动的状态空间 Lagrange 表示之一. 类似地, 由 (18), (19) 和 (20) 式还可得另外 3 个状态空间 Lagrange 函数

$$\begin{aligned}
L_{\mathrm{s2}} &= \dot{x}\arctan\frac{v}{u}+\frac{1}{2}\dot{y}\ln(u^2+v^2)\\
&\quad +\beta x+\alpha y-v, \quad (24)\\
L_{\mathrm{s3}} &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\big[(v\cos\beta t-u\sin\beta t)\dot{x}\\
&\quad +(u\cos\beta t+v\sin\beta t)\dot{y}\\
&\quad +\frac{1}{2}(u^2-v^2)\sin\beta t-uv\cos\beta t\big], \quad (25)\\
L_{\mathrm{s4}} &= \mathrm{e}^{-\alpha t}\big[(u\cos\beta t+v\sin\beta t)\dot{x}\\
&\quad +(u\sin\beta t-v\cos\beta t)\dot{y}\\
&\quad +\frac{1}{2}(v^2-u^2)\cos\beta t-uv\sin\beta t\big]. \quad (26)
\end{aligned}$$

对应的 Lagrange 方程不再列出.

3.2 带电粒子运动的位形空间 Lagrange 表示

文献 [15] 中给出了力学系统位形空间中 Lagrange 函数 L_{c} 和状态空间 (坐标 - 速度空间) 中 Lagrange 函数 L_{s} 之间的变换关系为

$$L_{\mathrm{s}}=\bar{L}_{\mathrm{c}}+\frac{\partial\bar{L}_{\mathrm{c}}}{\partial u_\alpha}(\dot{q}_\alpha-u_\alpha), \quad (27)$$

式中

$$\bar{L}_{\mathrm{c}}=\bar{L}_{\mathrm{c}}(q,u,t)=L_{\mathrm{c}}(q,\dot{q},t)|_{\dot{q}_\alpha\to u_\alpha}. \quad (28)$$

反过来, 当已知状态空间 Lagrange 函数

$$L_{\mathrm{s}}=A_\alpha(q,u,t)\dot{q}_\alpha+G(q,u,t). \quad (29)$$

将改写成

$$L_{\mathrm{s}}=A_\alpha(\dot{q}_\alpha-u_\alpha)+G', \quad (30)$$

其中

$$G'(q,u,t)=G(q,u,t)+A_\alpha u_\alpha. \quad (31)$$

如果 G' 满足下列条件:

$$A_\alpha = \frac{\partial G'}{\partial u_\alpha}, \tag{32}$$

则与 L_s 对应的位形空间中 Lagrange 函数为

$$L_c(q,\dot{q},t) = G'(q,u,t)|_{u_\alpha\to\dot{q}_\alpha}. \tag{33}$$

按照上述程序, 将 L_{s1} 改写成

$$\begin{aligned} L_{s1} = &\frac{1}{2}(\dot{x}-u)\ln(u^2+v^2) \\ &+(\dot{y}-v)\arctan\frac{u}{v}+\frac{1}{2}u\ln(u^2+v^2) \\ &+v\arctan\frac{u}{v}+\alpha x-\beta y-u, \end{aligned} \tag{34}$$

引入

$$\begin{aligned} G'(x,y,u,v,t) = &\frac{1}{2}u\ln(u^2+v^2)+v\arctan\frac{u}{v} \\ &+\alpha x-\beta y-u, \end{aligned} \tag{35}$$

直接就算可验证

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G'}{\partial u} = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2), \\ &\frac{\partial G'}{\partial v} = \arctan\frac{u}{v}. \end{aligned} \tag{36}$$

故与 L_{s1} 对应的位形空间 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} L_{c1} = &\frac{1}{2}\dot{x}\ln(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\dot{y}\arctan\frac{\dot{x}}{\dot{y}} \\ &+\alpha x-\beta y-\dot{x}. \end{aligned} \tag{37}$$

对比 (2) 式 L, L_{c1} 与 L 只相差一规范变换项 $\dot{x}$, 换句话, 我们导出了文献 [13] 的结果. 除此之外, 我们还可以得到另外 3 个分别与 L_{s2}, L_{s3} 和 L_{s4} 对应的位形空间 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} L_{c2} = &\dot{x}\arctan\frac{\dot{y}}{\dot{x}}+\frac{1}{2}\dot{y}\ln(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \\ &+\beta x+\alpha y-\dot{y}, \end{aligned} \tag{38}$$

$$L_{c3} = \mathrm{e}^{-\alpha t}\Big[\frac{1}{2}(\dot{y}^2-\dot{x}^2)\sin\beta t+\dot{x}\dot{y}\cos\beta t\Big], \tag{39}$$

$$L_{c4} = \mathrm{e}^{-\alpha t}\Big[\frac{1}{2}(\dot{x}^2-\dot{y}^2)\cos\beta t+\dot{x}\dot{y}\sin\beta t\Big]. \tag{40}$$

这 3 个 Lagrange 函数是文献 [13] 中未得到的结果, 其中 L_{c3} 和 L_{c4} 是速度的二次函数, 且不显含坐标 x 和 y, 可以直接得到 2 个独立的循环积分, 而 L_{c1} 和 L_{c2} 不显含时间 t, 可以直接得到 2 个 Jacobi 积分.

3.3 带电粒子运动的 Hamilton 表示

由粒子运动的 Birkhoff 表示, 状态空间 Lagrange 表示和位形空间 Lagrange 表示都可以导出 Hamilton 表示 [15,16]. 略去推导过程, 直接给出 4 个 Hamilton 函数以及对应的广义动量表达式如下:

$$P_{x1} = \frac{1}{2}\ln(\dot{x}^2+\dot{y}^2),\ p_{y1} = \arctan\frac{\dot{x}}{\dot{y}}, \tag{41}$$

$$H_1 = \mathrm{e}^{P_{x1}}\sin p_{y1}-\alpha x+\beta y; \tag{42}$$

$$P_{x2} = \arctan\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\ p_{y2} = \frac{1}{2}\ln(\dot{x}^2+\dot{y}^2), \tag{43}$$

$$H_2 = \mathrm{e}^{P_{y2}}\cos P_{x2}-\beta x-\alpha y; \tag{44}$$

$$\begin{aligned} P_{x3} &= \mathrm{e}^{-\alpha t}(\dot{y}\cos\beta t-\dot{x}\sin\beta t), \\ p_{x3} &= \mathrm{e}^{-\alpha t}(\dot{y}\sin\beta t+\dot{x}\cos\beta t), \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} H_3 = &\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha t}\Big[(P_{y3}^2-P_{x3}^2)\sin\beta t \\ &+2P_{x3}P_{y3}\cos\beta t\Big]; \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} P_{x4} &= \mathrm{e}^{-\alpha t}(\dot{x}\cos\beta t+\dot{y}\sin\beta t), \\ P_{y4} &= \mathrm{e}^{-\alpha t}(\dot{x}\sin\beta t-\dot{y}\cos\beta t), \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} H_4 = &\frac{1}{2}e^{\alpha t}\Big[(P_{x4}^2-P_{y4}^2)\cos\beta t \\ &+P_{x4}P_{y4}\sin\beta t\Big]. \end{aligned} \tag{48}$$

根据导出的 4 个 Hamilton 函数, 可以从 H_1 和 H_2 得到两个广义能量积分, 从 H_3 和 H_4 可以得到 4 个广义动量积分 (独立的只有 2 个). 此外, 文献 [13] 中指出得到 Hamilton 函数是带电粒子在磁场中阻尼运动量子化的第一步, 对比文献 [13] 中得到的 Hamilton 函数, 可以看出这里得到的 4 个 Hamilton 函数, 特别是 H_3 和 H_4 的结构简单, 更容易量子化.

4 带电粒子运动微分方程的解

在得到带电粒子运动微分方程 (1) 的分析力学表示后, 可以用分析力学方法求解. 例如, 由 (37)—(40) 式的 Lagrange 函数可以直接得到 4 个独立的第一积分

$$\dot{x}-\alpha x+\beta y = c_1, \tag{49}$$

$$\dot{y}-\beta x-\alpha y = c_2, \tag{50}$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}(\dot{x}\cos\beta t+\dot{y}\sin\beta t) = c_3, \tag{51}$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}(\dot{x}\sin\beta t-\dot{y}\cos\beta t) = c_4, \tag{52}$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为积分常数. 从 (49)—(52) 式直接用代数方法得到方程 (1) 的解

$$\dot{x} = (c_3\cos\beta t+c_4\sin\beta t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}, \tag{53}$$

$$\dot{y} = (c_3\sin\beta t-c_4\cos\beta t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}, \tag{54}$$

$$x = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\big\{c_3\,\mathrm{e}^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t+\beta\sin\beta t)$$

$$+c_4\,\mathrm{e}^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t-\beta\cos\beta t)$$
$$-\alpha c_1-\beta c_2\big\}, \qquad (55)$$
$$y=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\big\{c_3e^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t-\beta\cos\beta t)$$
$$-c_4\,\mathrm{e}^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t+\beta\sin\beta t)$$
$$+\beta c_1-\alpha c_2\big\}. \qquad (56)$$

[1] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯, 张永发 2008 约束系统动力学研究进展 (北京: 科学出版社)]

[2] Santilli R M 1976 *Foundations of Theoretical Mechanics* (I) (New York: Springer-Verlag)

[3] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* (II) (New York: Springer-Verlag)

[4] Lopuszanski J 1999 *The Inverse Variational Problems in Classical Mechanics* (Singapore: World Scientific)

[5] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京: 北京理工大学出版社)]

[6] Nucci M C, Leach P G L 2007 *J. Math. Phys.* **48** 123510

[7] Ding G T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7415 (in Chinese) [丁光涛 2008 物理学报 **57** 7415]

[8] Ding G T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3620 (in Chinese) [丁光涛 2009 物理学报 **58** 3620]

[9] Ding G T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6725 (in Chinese) [丁光涛 2009 物理学报 **58** 6725]

[10] Cieslinski J L, Nikiciuk T 2010 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **43** 17250

[11] Ding G T 2010 *J. Dynam. Contr.* **8** 305 (in Chinese) [丁光涛 2010 动力学与控制学报 **8** 305]

[12] Ding G T 2011 *J. Dynam. Contr.* **9** 102 (in Chinese) [丁光涛 2011 动力学与控制学报 **9** 102]

[13] Kupriyanov V G 2006 *Int. J. Theor. Phys.* **45** 1129

[14] Gitman D M, Kupriyanov V G 2007 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **40** 10071

[15] Ding G T 2009 *Sci. China* G **39** 785 (in Chinese) [丁光涛 2009 中国科学 G 辑 **39** 375]

[16] Ding G T 2010 *J. Dynam. Contr.* **8** 8 (in Chinese) [丁光涛 2010 动力学与控制学报 **8** 8]

Analytical mechanics representations of a moving charged particle in a magnetic field with radiation friction

Ding Guang-Tao†

(*College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu* 241000, *China*)

(Received 15 March 2011; revised manuscript received 7 April 2011)

Abstract

The anatylical mechanics representations of a charged particle moving in a uniform magnetic field with radiation friction are studied. First, by solving the inverse problem of Birkhoffian mechanics for the differential equations of motion the 4 Birkhoffian representations of the charged particle are obtained. Secondly, 4 Lagrangian representations in the state space and 4 Lagrangian representations in the configuration space are derived, and then 4 Hamiltonians are constructed. Lastly, 4 first integrals are obtained from the analytical mechanics representations of the moving particle, and the solutions of the equations of motion are presented.

Keywords: reduced Lorentz-Dirac equation, analytical mechanics representation, inverse problem

PACS: 02.30.Zz, 45.05.+x, 45.20.Jj, 03.50.De

† E-mail: dgt@sina.com