

三能级混合态的量子几何相位*

饶黄云^{1)†} 刘义保¹⁾ 江燕燕²⁾ 郭立平³⁾ 王资生^{4)‡}

1) (东华理工大学核工程技术学院, 抚州 344000)

2) (安庆师范学院物理系, 安庆 246011)

3) (武汉大学物理科学与技术学院, 武汉 430027)

4) (江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌 330022)

(2011年1月27日收到; 2011年4月23日收到修改稿)

把三能级开放系统的密度矩阵按照 Gellmann 矩阵展开, 然后将展开系数和 Bloch 球中的方位角对应, 从而获得了 Poincaré 球内部点和复三维 Hilbert 空间的非单位矢量即波函数的映射. 进一步建议用该非单位矢量来定义混合态的量子几何相位. 结果显示该几何相位仅仅与复 Hilbert 投影空间的几何结构有关, 与开放系统具体的演化路径无关; 并且该混合态的几何相位依赖于开放系统的反转粒子数, 也是描述开放系统混合度的单值光滑曲线, 这个结果意味着混合态的演化的确按照几何相位保持其运动记忆. 此外, 在纯态的限制下, Berry 相位是本文定义的几何相位极限情况.

关键词: 纯态, 混合态, 三能级开放系统, 几何相位

PACS: 03.65.Vf, 03.65.Yz

1 引言

Aharonov-Bohm(AB) 效应和 Berry 几何相位被发现^[1,2], 促使人们对量子力学几何相位问题展开深入且广泛的研究^[3-8], 量子力学波函数中的相位的重要性及其客观意义被人们重新认识. 由于几何相位与系统状态在 Hilbert 空间中的演化路径无关, 且和参数空间引发的路径所围成的面积成正比, 因此可以用来实现容错法的几何量子门和几何量子计算^[9-11], 且具有抗干扰能力.

在真实的物理世界中, 量子系统不可避免同周围环境的相互作用. 这种退相干效应使得量子超位置衰变成统计混合, 将导致系统信息的损失. 因此退相干一直是棘手的问题, 是最重要的限制量子计算的因素之一. 更多的是退相干强烈影响量子门的速度和量子门的误差率. 这样, 环境诱发的退相干是影响量子计算机实际应用的主要障碍. 因此研究

开放体系中几何相位的行为成为物理学最为关心的热点问题之一.

封闭体系的物理状态称为纯态, 开放体系的状态称为混合态. 目前, 开放系统的量子几何相位仍然是一个争论的课题, 人们做了各种尝试^[12-22]: 1) 引入一个辅助系统的方法, 将混合态进行纯化并定义混合态的几何相位, 即混合态的纯化解; 2) 混合态几何相定义为密度矩阵本征态的几何相的加权求和, 权重同样为本征值, 即动能解; 3) 通过量子跃迁方法, 把混合态问题转化为纯态问题, 即量子跃迁解法. 混合态的纯化解, 量子跃迁解法^[12]和动能解法^[17]可以给出开放系统的量子几何相位. 混合态纯化解法, 量子跃迁解法和动能解法可以给出开放系统的量子几何相位. 但不同的解法, 给出不同的结果, 不具有唯一性, 特别是在公式中不包含明显的几何结构. 但是人们的普遍信仰是几何相位具有几何结构^[20,21], 即与参数空间的区域的面积成

* 国家自然科学基金(批准号:10775108), 江西省自然科学基金(批准号:2010GZWX0026)和江西省教育厅科技项目(批准号:GJJ10404)资助的课题.

† E-mail: rao18@163.com

‡ E-mail: zishengwang@yahoo.com

比例, 在复映射希尔伯特空间中可以用几何结构形式完美表述.

事实上, 纯态和混合态本质上来源于 Poincaré 球表示的应用. 纯态, 相对应于 Poincaré 球面上的点; 而混合态相对应于 Poincaré 球内部的点. 纯态的几何相位用 Poincaré 球表示特别简单, Pancharatnam 相位对应于 Poincaré 球面上的一段弧线, 而 Berry 相位对应于 Poincaré 球面上的封闭弧线, 动力学相位自然消失了 [20-22]. 基于对称性和微分几何, 纯态系统的量子几何相位的数学表述非常优美. 因此, 可把开放量子系统几何相位完全按照几何结构去定义. 通过 Poincaré 球内部点和复 Hilbert 空间的非归一化矢量的映射, 建立混合态波函数和该非单位矢量的一一对应关系, 使定义

混合态的几何相位的唯一性得到明确证明, 并可以直接用密度矩阵来表示 [20-22]. 本文把该方法拓展到三能级开放系统.

2 三能级混合态的量子几何相位

由于高维复 Hilbert 空间可以在量子通信中提供更多的信息, 例如, 量子密码学和量子计算. 因此激起了人们研究三能级开放系统量子几何相位的兴趣. 类似于二能级混合态, 单位矩阵和八个 Gellmann 矩阵构成了一个任意 3×3 矩阵的完全基矢. 因而任何一个 3×3 密度矩阵 ρ 可以由下式获得:

$$\rho = c + \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\lambda}, \quad (1)$$

这里 Gellmann 矩阵为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

通过使用 Gellman 矩阵对易关系 $[\lambda_i, \lambda_j] = if_{ijk}(\lambda_k)$ 和反对易关系 $\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{1}{3}\delta_{ij} + d_{ijk}\lambda_k$, 其中 f_{ijk} 是 $SU(3)$ 群反对称结构常数, d_{ijk} 是群对称结构常数, 方程 (1) 中的展开系数为

$$c = \text{tr}\rho, \quad (3a)$$

$$d_i = \frac{1}{2}\text{tr}(\rho\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (3b)$$

这意味着展开系数是唯一的. 这样三能级系统混合态的密度矩阵可以写成

$$\rho = \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt{3} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\lambda} \right), \quad (4)$$

这里 \mathbf{n} 具有明确的物理意义, 即 Bloch 矢量. 它和展开系数 \mathbf{d} 具有下列关系:

$$n_i = \sqrt{3}d_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{tr}(\rho\lambda_i), \quad (5)$$

并且构成一个八维球结构, 满足 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = r^2 \leq 1$, 其中

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{3}{4} [(\rho_{12} + \rho_{21})^2 - (\rho_{12} - \rho_{21})^2 + (\rho_{11} - \rho_{22})^2 \\ &\quad + (\rho_{13} + \rho_{31})^2 - (\rho_{13} - \rho_{31})^2 + (\rho_{23} + \rho_{32})^2 \\ &\quad - (\rho_{23} - \rho_{32})^2] + \frac{1}{4} (\rho_{11} + \rho_{22} - 2\rho_{33})^2, \end{aligned} \quad (6)$$

对于纯态 $r = 1$, 对于混合态 $r < 1$. 因此

$$S = \left\{ \frac{\mathbf{n}}{r} \in R^8 \mid \frac{\mathbf{n}}{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{r} = 1, \left(\frac{\mathbf{n}}{r} \right)^* = \frac{\mathbf{n}}{r} \right\} \quad (7)$$

是三能级系统中八维 Poincaré 球对二能级 Poincaré 球的推广.

不同于二能级系统, 三能级系统中的 Bloch 矢量 \mathbf{n} 具有八个分量, 这八个分量都是实数. 所以, 可引入一个 Bloch 半径和七个方位角 $\theta, \phi, \alpha, \beta, \gamma, \chi, \zeta$ 来参数化该八维 Bloch 球, 即

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{2r}{\sqrt{3}} (\rho_{11} + \rho_{22} - 2\rho_{33}) \right]^{1/2}, \quad (8a)$$

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{r \sin^2\theta} \right]^{1/2}, \quad (8b)$$

$$\tan(\beta - \chi - \alpha + \gamma) = \frac{n_2}{n_1} = i \frac{\rho_{12} - \rho_{21}}{\rho_{12} + \rho_{21}}, \quad (8c)$$

$$\tan(\alpha - \gamma - \zeta) = \frac{n_5}{n_4} = i \frac{\rho_{13} - \rho_{31}}{\rho_{13} + \rho_{31}}, \quad (8d)$$

$$\tan(\beta - \chi + \zeta) = \frac{n_7}{n_6} = i \frac{\rho_{23} - \rho_{32}}{\rho_{23} + \rho_{32}}. \quad (8e)$$

将(8a)—(8e)式代入(5)式, \mathbf{n} 矢量可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = & r\sqrt{3} \left(\sin^2\theta \sin\phi \cos\phi \cos(\beta - \chi - \alpha + \gamma), \right. \\ & \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi \sin(\beta - \chi - \alpha + \gamma), \\ & \frac{1}{2} \sin^2\theta (\cos^2\phi - \sin^2\phi), \\ & \sin\theta \cos\theta \cos\phi \cos(\alpha - \gamma - \zeta), \\ & -\sin\theta \cos\theta \cos\phi \sin(\alpha - \gamma - \zeta), \\ & \sin\theta \cos\theta \sin\phi \cos(\beta - \chi + \zeta), \\ & \left. -\sin\theta \cos\theta \sin\phi \sin(\beta - \chi + \zeta), \right. \\ & \left. \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 - 3\cos^2\theta) \right). \quad (9) \end{aligned}$$

正如二能级系统, $\frac{\mathbf{n}}{r} \in S^2$ 在单位 Poincaré 球面上的点可以映射为三维复 Hilbert 空间中的单位矢量. 对于三能级系统, 纯态对应八维 Poincaré 球面上的点. 按照方程(4), 存在以下映射关系:

$$\frac{n_i}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \langle \psi | \lambda_i | \psi \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (10)$$

在 $SU(3)$ 和 $SO(8)$ 的分别变换下, 波函数和单位 Poincaré 球矢量的各分量变为

$$|\psi'\rangle = u |\psi\rangle, \quad (u \in SU(3)), \quad (11)$$

$$\frac{n'_i}{r} = R_{ik}(u) \frac{n_k}{r}, \quad (R(u) \in SO(8)). \quad (12)$$

将(11),(12)式代入(10)式, 有

$$R_{ik}(u) = \frac{1}{2} \text{tr}(\lambda_i u \lambda_k u^\dagger). \quad (13)$$

由(13)式, 我们知道 S^2 是一个 $SU(3)/U(1) \times U(1)$ 的陪集空间.

方程(10)的解为

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha-\gamma)} \sin\theta \cos\phi \\ e^{i(\beta-\chi)} \sin\theta \sin\phi \\ e^{i\zeta} \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (14)$$

这表示我们建立了 Poincaré 球面上的点与三维 Hilbert 投影空间的单位矢量映射.

而三能级系统混合态的 Bloch 矢量 $\mathbf{n} < \mathbf{n}/r$

在单位 Poincaré 球的内部. 所以, 三能级系统混合态可以用单位 Poincaré 球的内部的点来定义.

由于(7)式, 在复 Hilbert 投影空间中, 三能级系统单位 Poincaré 球内部的 Bloch 矢量 $\mathbf{n} < \mathbf{n}/r$ ($r < 1$) 应该与非单位矢量一致, 即

$$|\Psi\rangle = \sqrt{r} |\psi\rangle. \quad (15)$$

因此, 三能级系统混合态的几何相位可以写为^[20-22]

$$\begin{aligned} \gamma_g(C) = & \arg \langle \Psi(t_0) | \Psi(t) \rangle - \text{Im} \left(\int_{t_0}^t dt \frac{\langle \Psi | \dot{\Psi} \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \right) \\ = & \arg \langle \Psi(t_0) | \Psi(t) \rangle \\ & - \int_{t_0}^t dt \sin^2\theta (\cos^2\phi d(\alpha - \gamma) \\ & + \sin^2\phi d(\beta - \chi) + \cos^2\theta d\zeta). \quad (16) \end{aligned}$$

这样, 在三能级开放系统中, 我们通过非单位矢量与单位 Poincaré 球内部的点对应, 建立了一个用复 Hilbert 空间中的非单位矢量来描述开放系统的演化, 并通过该开放系统相应的非单位矢量, 从而得到开放系统的量子几何相位.

3 相关讨论

3.1 几何结构

如果系统进行周期演化, 开放系统的量子几何相位仅仅依赖于复 Hilbert 空间中的封闭曲线, 它可以由几何结构的形式表示出来. 在准周期情况下, (16) 式右边第一项为一常数 2π , 在量子计算中这个常数通常忽略. 这样混合态的 Pancharatnam 相位就成了混合态的 Berry 相位.

我们知道纯态的 Berry 相位可由微分几何方法简洁、严密地描述出, 进而发现纯态的几何相位仅仅依赖于演化的参数空间的面积而与演化的具体路径无关. 因此, 也可用微分几何语言来描述在准周期演化下混合态的 Berry 相位.

在纯态的定域规范变换下,

$$|\psi(\eta)\rangle \rightarrow |\psi'(\eta)\rangle = e^{-i\alpha(\eta)} |\psi(\eta)\rangle. \quad (17)$$

相应描述开放系统的态矢量 $|\Psi(\eta)\rangle$ 可以变换为

$$\frac{|\Psi(\eta)\rangle}{\sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}} \rightarrow \frac{|\Psi'(\eta)\rangle}{\sqrt{\langle \Psi'(\eta) | \Psi'(\eta) \rangle}} = e^{-i\alpha(\eta)} \frac{|\Psi(\eta)\rangle}{\sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}} = e^{-i\alpha(\eta)} \frac{|\Psi(\eta)\rangle}{\|\Psi(\eta)\|}. \quad (18)$$

因此, 微分一形式变换为

$$\begin{aligned}
 \beta &= -\text{Im} \left\langle \frac{\Psi(\eta)}{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle} \left| \frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \eta_i} \right. \right\rangle d\eta_i \\
 &\rightarrow \beta' = -\text{Im} \left\langle \frac{\Psi'(\eta)}{\langle \Psi'(\eta) | \Psi'(\eta) \rangle} \left| \frac{\partial \Psi'(\eta)}{\partial \eta_i} \right. \right\rangle d\eta_i \\
 &= -\text{Im} \left\langle \frac{\Psi'(\eta)}{\|\Psi'(\eta)\|} \left| \frac{\partial \Psi'(\eta)}{\partial \eta_i \|\Psi'(\eta)\|} \right. \right\rangle d\eta_i + \text{Im} \|\Psi'(\eta)\| \frac{\partial}{\partial \eta_i} \ln \|\Psi'(\eta)\| \\
 &= -\text{Im} \left\langle e^{-i\alpha(\eta)} \frac{\Psi(\eta)}{\|\Psi(\eta)\|} \left| -i \frac{\partial \alpha(\eta)}{\partial \eta_i} e^{-i\alpha(\eta)} \frac{\Psi(\eta)}{\|\Psi(\eta)\|} + e^{-i\alpha(\eta)} \frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \eta_i} \frac{\Psi(\eta)}{\|\Psi(\eta)\|} \right. \right\rangle d\eta_i \\
 &= -\text{Im} \left\langle \frac{\Psi(\eta)}{\sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}} \left| \frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \eta_i \sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}} \right. \right\rangle d\eta_i + \frac{\partial \alpha(\eta)}{\partial \eta_i} d\eta_i \\
 &= \beta + d\alpha,
 \end{aligned} \tag{19}$$

其中 β 称为微分一形式. 在上式中, 我们用到 $\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle$ 是实数的. 通过再一次求微分,

微分二形式可写为

$$\begin{aligned}
 \sigma &= d\beta = \frac{\partial \beta_j(\eta)}{\partial \eta_i} d\eta_i \wedge d\eta_j \\
 &= -\text{Im} \left\langle \frac{\partial}{\partial \eta_i} \frac{\Psi(\eta)}{\sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}}, \frac{\partial}{\partial \eta_j} \frac{\Psi(\eta)}{\sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}} \right\rangle d\eta_i \wedge d\eta_j \\
 &\quad - \text{Im} \left\langle \frac{\Psi(\eta)}{\sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}}, \frac{\partial^2 \Psi(\eta)}{\partial \eta_i \partial \eta_j \sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}} \right\rangle d\eta_i \wedge d\eta_j \\
 &= -\text{Im} \left\langle \frac{\partial}{\partial \eta_i} \frac{\Psi(\eta)}{\sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}}, \frac{\partial}{\partial \eta_j} \frac{\Psi(\eta)}{\sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}} \right\rangle d\eta_i \wedge d\eta_j \\
 &= \sigma_{ij} d\eta_i \wedge d\eta_j,
 \end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\sigma_{ij} = -\text{Im} \left\langle \frac{\partial}{\partial \eta_i} \frac{\Psi(\eta)}{\sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}}, \frac{\partial}{\partial \eta_j} \frac{\Psi(\eta)}{\sqrt{\langle \Psi(\eta) | \Psi(\eta) \rangle}} \right\rangle.$$

在规范变换和 (20) 式要求下, 微分二形式是不变的, 即

$$\sigma \rightarrow \sigma' = d\beta + d^2\alpha = d\beta = \sigma. \tag{21}$$

所以,

$$\gamma_g(C = \partial S) = \oint_{C=\partial S} \beta = \int_S \sigma. \tag{22}$$

这是与非单位矢量相联系的并沿着闭合曲线演化的开放系统几何相位. 从这个方程我们看到, 混合态的 Berry 几何相位仅仅跟参数空间的面积成正比, 与它的演化过程中的路径无关.

3.2 动力学过程

考虑与环境相互作用的量子开放三能级系统, 由于开放三能级系统相关的动力学时间与环境丢失量子信息的时间比较长, 系统的演化实际上是时间上局域的 (马尔科夫近似). 这样该开放系统可以由 Lindblad 方程描述^[23,24],

$$\dot{\rho} = -i [\hat{H}, \rho] + \sum_{\mu} \left(\Gamma_{\mu} \rho \Gamma_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{ \Gamma_{\mu}^{\dagger} \Gamma_{\mu}, \rho \} \right). \tag{23}$$

方程 (23) 右边第一项是一般 Schrödinger 项, 代表么正演化项. 其他项描述量子开放三能级系统与环境库相互作用下所有可能的跃迁. 算子 Γ_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) 叫做 Lindblad 算符或者量子跃迁算符. 由方程 (23), 容易发现 $\dot{\rho}$ 是厄密

的且 $\text{tr}\rho = 0$, 这说明开放系统的密度算符 ρ 是正定的.

注意到 Lindblad 算符 $\Gamma_i = \sqrt{\eta_i(t)}\lambda_i$ 表示与环境的关联. 消相干时间由 $\frac{1}{\Gamma_i(t)}$ 近似给出. 噪声可由转换系数 $\eta_i(t)$ 来控制. 考虑在哈密顿量为 $H = \frac{1}{2}\hbar\Omega\lambda_3$ 的三能级系统中应用耗散噪声 $\Gamma = \sqrt{\eta}\lambda_3$, Lindblad 方程的解为

$$\rho_{11}(t) = \rho_{11}(0), \quad (24a)$$

$$\rho_{12}(t) = \rho_{12}(0) \exp\{(-2i\Omega - 2\eta)t\}, \quad (24b)$$

$$\rho_{13}(t) = \rho_{13}(0) \exp\{(-i\Omega - \eta/2)t\}, \quad (24c)$$

$$\rho_{21}(t) = \rho_{21}(0) \exp\{(2i\Omega - 2\eta)t\}, \quad (24d)$$

$$\rho_{22}(t) = \rho_{22}(0), \quad (24e)$$

$$\rho_{23}(t) = \rho_{23}(0) \exp\{(i\Omega - \eta/2)t\}, \quad (24f)$$

$$\rho_{31}(t) = \rho_{31}(0) \exp\{(i\Omega - \eta/2)t\}, \quad (24g)$$

$$\rho_{32}(t) = \rho_{32}(0) \exp\{(-i\Omega - \eta/2)t\}, \quad (24h)$$

$$\rho_{33}(t) = \rho_{33}(0). \quad (24i)$$

若初始纯态为 $|\psi(0)\rangle = \delta_1|1\rangle + \delta_2|2\rangle + \delta_3|3\rangle$, 则 $\rho_{11}(0) = |\delta_1|^2$, $\rho_{12}(0) = \delta_1\delta_2^*$, $\rho_{13}(0) = \delta_1\delta_3^*$, $\rho_{21}(0) = \delta_2\delta_1^*$, $\rho_{22}(0) = |\delta_2|^2$, $\rho_{23}(0) = \delta_2\delta_3^*$, $\rho_{31}(0) = \delta_3\delta_1^*$, $\rho_{32}(0) = \delta_3\delta_2^*$, $\rho_{33}(0) = |\delta_3|^2$, 其中 $\delta_i (i = 1, 2, 3)$ 与演化时间无关且由外部条件控制.

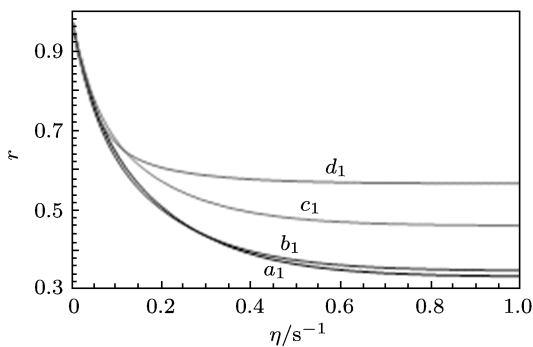


图 1 Bloch 半径 r 随衰变系数 η [1/s] 的演化曲线 (演化周期为 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$). $(a_1) \delta_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}, \delta_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}, \delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $(b_1) \delta_1 = \frac{3}{4}, \delta_2 = \frac{2}{4}, \delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $(c_1) \delta_1 = \frac{4}{5}, \delta_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \delta_3 = \frac{2}{5}$; $(d_1) \delta_1 = \frac{5}{6}, \delta_2 = \frac{3}{6}, \delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}$

将 (24a)—(24i) 式代入 (6),(8a) 到 (8e) 式, 可得 8 个 Bloch 参量. 混合态的 Berry 相位 (16) 式可用 Bloch 参量计算. Bloch 半径随衰变系数的演化显示在图 1 和图 2 中.

在图 1 和图 2 中, 我们发现在不同的初始条件下, Bloch 半径随着衰变系数的增加而呈指数形式

衰减. 纯态时, Bloch 半径为 1, 这表明三能级开放系统的物理态从初始纯态变为混合态的过程, 混合度很明显与衰变系数有关. 因此 Bloch 半径是一个很好的描述开放系统混合度的物理量.

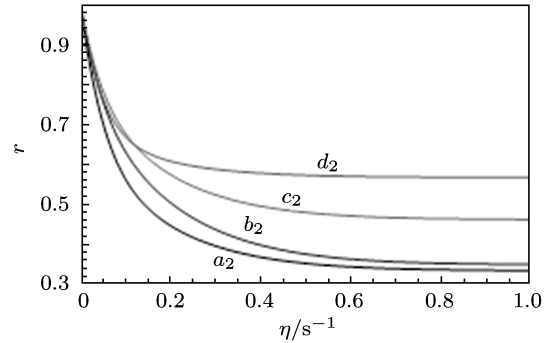


图 2 Bloch 半径 r 随衰变系数 η [1/s] 的演化曲线 (演化周期为 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$). $(a_2) \delta_1 = \frac{2}{3}, \delta_2 = \frac{2}{3}, \delta_3 = \frac{1}{3}$; $(b_2) \delta_1 = \frac{2}{4}, \delta_2 = \frac{3}{4}, \delta_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $(c_2) \delta_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \delta_2 = \frac{4}{5}, \delta_3 = \frac{2}{5}$; $(d_2) \delta_1 = \frac{3}{6}, \delta_2 = \frac{5}{6}, \delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}$

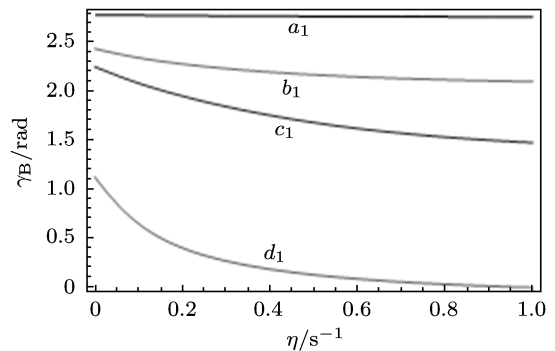


图 3 三能级混合态的 Berry 相位随衰变系数 η [1/s] 的演化曲线 (初始条件与图 1 相同, 相应的系统反转粒子数为 $w_1(t) > 0, w_2(t) > 0$)

进一步研究, 发现混合态相应的 Berry 相位可以按照初始条件的正值 (参见图 3) 和负值 (参见图 4) 分成两部分. 很明显混合态的几何相位正负与反转粒子数有关, $w_1 = \rho_{11}(t) - \rho_{22}(t) - \rho_{33}(t)$, $w_2 = \rho_{11}(t) - \rho_{22}(t)$. 图 3 中混合态的 Berry 相位对应的反转粒子数 $w_1(t) > 0, w_2(t) > 0$, 几何相位为正值并随衰变系数的增加而减小; 图 4 中对应反转粒子数 $w_1(t) \leq 0, w_2(t) \leq 0$, 几何相位为负值也随衰变系数的增加而减小. 但是图 4 中相位的绝对值增加, 其物理原因可以通过 Bloch 半径和 Berry 相位的联系来理解. 由图 5 和图 6, 我们看到 Bloch 半径随着 Berry 相位指数地增加. 图 5 中正的 Berry 相位的最大值对应 $r = 1$ 的纯态; 图 6 中负的 Berry 相

位的最小值对应纯态。

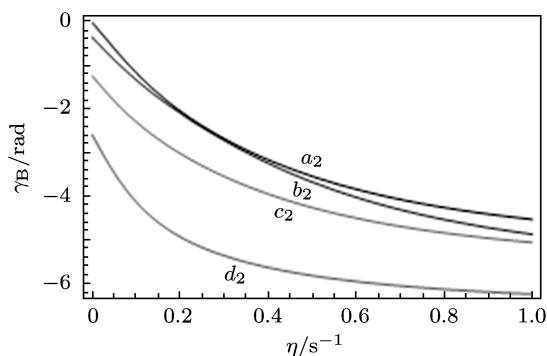


图4 三能级混合态的 Berry 相位随衰变系数 $\eta[1/s]$ 的演化曲线 (初始条件与图 2 相同, 对应反转粒子数 $w_1(t) \leq 0, w_2(t) \leq 0$)

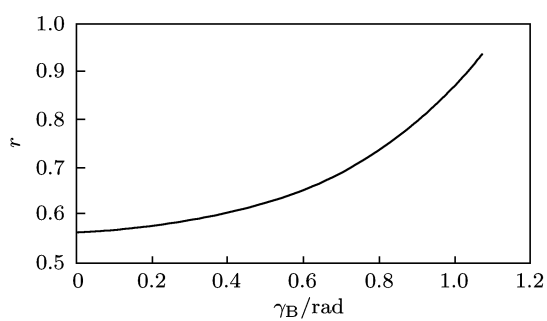


图5 Bloch 半径 r 随 Berry 相位的变化曲线 (演化周期为 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, 初始条件为 $\delta_1 = \frac{5}{6}, \delta_2 = \frac{3}{6}, \delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}$)

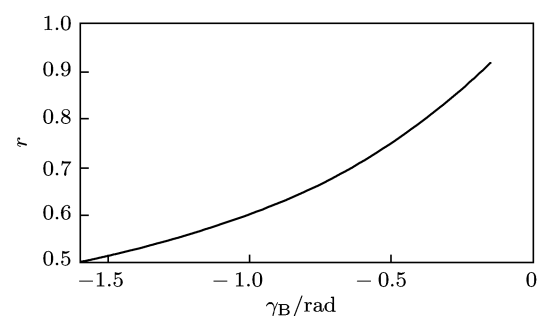


图6 Bloch 半径 r 随 Berry 相位的变化曲线 (演化周期为 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, 初始条件为 $\delta_1 = \frac{2}{3}, \delta_2 = \frac{2}{3}, \delta_3 = \frac{1}{3}$)

有趣的是, 当反转粒子数有不同的符号 $w_1(t) < 0$ 和 $w_2(t) > 0$ 时, Berry 相位是衰变系数的增函数 (见图 7), 这个与先前情况不同, 其他

的粒子数反转情况, 也会引起几何相位相应发生变化. 这也说明了三能级混合态的几何相位定义隐藏着丰富的物理意义, 尤其是证实了开放系统的确按照几何相位保持它的演化记忆.

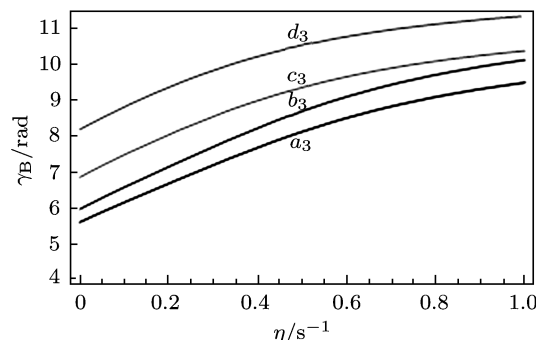


图7 三能级混合态的 Berry 相位随衰变系数 $\eta[1/s]$ 的演化曲线 ($w_1(t) < 0$ 和 $w_2(t) > 0$. (a_3) $\delta_1 = \frac{2}{3}, \delta_2 = \frac{1}{3}, \delta_3 = \frac{2}{3}$; (b_3) $\delta_1 = \frac{2}{4}, \delta_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \delta_3 = \frac{3}{4}$; (c_3) $\delta_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \delta_2 = \frac{2}{5}, \delta_3 = \frac{4}{5}$; (d_3) $\delta_1 = \frac{3}{6}, \delta_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}, \delta_3 = \frac{5}{6}$)

4 结论

类似于二能级开放系统, 把三能级开放系统的密度矩阵按照 Gell-mann 矩阵展开, 然后用方位角将展开系数参数化并且发现密度矩阵与单位 Poincaré 球内的点一一对应. 因此, 单位 Poincaré 球面上的点和波函数的关系就可推广为球内的点与 Hilbert 空间中的非单位矢量的联系, 该非单位矢量同开放量子系统演化建立了相应的联系. 进而, 解三能级开放系统的主方程得到密度矩阵获得该非单位矢量, 用它来定义混合态的量子几何相位. 可以证明这种定义具有明显的几何结构 [25].

进一步研究发现开放三能级系统几何相位仅仅与复三维 Hilbert 空间的几何结构有关, 与开放系统具体的演化路径无关; 该几何相位依赖于描述开放三能级系统演化的反转粒子数, 也是描述开放系统混合度的单值光滑曲线, 这个结果意味着混合态的确按照几何相位保持它的运动记忆. 此外, 在纯态的限制下, Berry 相位是我们定义上的几何相位极限情况 [26].

[1] Aharonov Y, Bohm D 1959 *Phys. Rev.* **115** 485
 [2] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. (London)*, Ser A **392** 45
 [3] Fonseca-Romero K M, Aguiar-Pinto A C, Thomaz M T 2002

Physica A **307** 142
 [4] Li C F, Guo G C 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 897 (in Chinese) [李春芳, 郭光灿 1996 物理学报 **45** 897]

- [5] Li B Z, Zhang D G, Wu J H, Yan F L 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 227(in Chinese)[李伯斌, 张德刚, 吴建华, 阎凤利 1997 物理学报 **46** 227]
- [6] Li H Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1643(in Chinese)[李华钟 2004 物理学报 **53** 1643]
- [7] Zheng L M, Wang F Q, Liu S H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2430(in Chinese)[郑力明, 王发强, 刘颂豪 2009 物理学报 **58** 2430]
- [8] Berr-Aryeh Y 2004 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6** R1
- [9] Jones J A, Vedral V, Ekert A, Castagnoli G 1999 *Nature* **403** 689
- [10] Falci C, Fazio R, Palma G M, Siewert J, Vedral V 2000 *Nature* **407** 355
- [11] Wang Z S, Wu C F, Feng X L, Kwek L C, Lai C H, Oh C H, Vedral V 2007 *Phys. Rev. A* **76** 044303
- [12] Carollo A, Fuentes-Guridi I, Franca Santos M, Vedral V 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 160402
- [13] Fonseca Romero K M, Aguiar A C, Thomaz M T 2002 *Physica A* **307** 142
- [14] Nazir A, Spiller T P, Munro W J 2003 *Phys. Rev. A* **65** 042303
- [15] Whitney R S, Gefen Y 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 190402
- [16] Chiara G De, Palma M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 090404
- [17] Tong D M, Sjoqvist E, Kwek L C, Oh C H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 080405
- [18] Whitney R S, Makhlin Y, Shnirman A, Gefen Y 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 070407
- [19] Carollo A, Palma G M, zinski A, Santos, Vedral V 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 150403
- [20] Wang Z S, Kwek L C, Lai C H, Oh C H 2006 *Europhys. Lett.* **74** 958
- [21] Jiang Y Y, Ji Y H, Xu H L, Hu L Y, Wang Z S, Chen Z Q, Guo L P 2010 *Phys. Rev. A* **82** 062108
- [22] Wang Z S, Wu C F, Kwek L C, Lai C H, Oh C H 2007 *Phys. Rev. A* **75** 024102
- [23] Lindblad G 1976 *Commun. Math. Phys.* **48** 119
- [24] Wang Z S, Kwek L C, Lai C H, Oh C H 2005 *The European Physical Journal D* **33** 285
- [25] Wang Z S 2009 *Int. J. Theor. Phys.* **48** 2353
- [26] Yu Y X, Chen Z Q, Hu L Y, Tang H S, Wang Z S 2011 *Int. J. Theor. Phys.* **50** 148

Geometric quantum phase for three-level mixed state*

Rao Huang-Yun^{1)†} Liu Yi-Bao¹⁾ Jiang Yan-Yan²⁾ Guo Li-Ping³⁾ Wang Zi-Sheng^{4)‡}

1) (School of Nuclear Engineering & Technology East China Institute of Technology, Fuzhou 344000, China)

2) (Department of Physics, Anqing Teachers College, Anqing 246011, China)

3) (School of Physics and Technology, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

4) (College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

(Received 27 January 2011; revised manuscript received 23 April 2011)

Abstract

By expanding the density matrix of the open system in terms of Gell-mann matrix in a three-level system, we parameterize coefficients of expansion by some azimuthal angles and find an identity mapping of the density matrices onto interior points of the unit Poincaré sphere. Thus, the relations between the points on the unit Poincaré sphere and wave functions are extended to connect the interior points in the sphere with the nonunit vector rays corresponding to an open system in complex Hilbert space. Thus, the geometric phases for the open system are proposed to be observed by the nonunit vector rays, where the geometric phase of the pure state is the limiting case of our definition. The results show that this geometric phase merely with duplicate three-dimensional Hilbert projection space geometry structure related, has nothing to do with the open system concrete evolution way; and it depends on population inversion and is a slippy and single-value curve of Bloch radius. Therefore, the mixed state of open system retains indeed a memory of its motion in the form of a geometric phase factor.

Keywords: pure state, mixed state, three-level open system, geometric phase

PACS: 03.65.Vf, 03.65.Yz

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grants No.10775108), the Natural Science Foundation of Jiangxi (Grants No. 2010GZW0026), and the Foundation of Science and Technology of Education Office of Jiangxi Province (Grant No. GJJ10404).

† E-mail: rao18@163.com

‡ E-mail: zishengwang@yahoo.com