三层弱循环耦合可激发介质中螺旋波动力学*

黎广钊 陈永淇 唐国宁†

(广西师范大学物理科学与技术学院, 桂林 541004)

(2010 年 11 月 11 日收到; 2011 年 5 月 5 日收到修改稿)

采用 Bär 模型研究了具有循环反馈耦合的三层可激发介质中的螺旋波动力学行为, 数值模拟结果显示: 在耦合强度较小时, 在各子系统中可观察到螺旋波漂移或漫游; 当耦合强度稍大时, 相互作用既可以使螺旋波漫游或漂移出系统边界而使子系统回到静息态, 还可以使子系统的螺旋波态转变为靶波或湍流态, 并观察到子系统的渐近态依赖初值现象; 继续增大耦合强度, 三个子系统的螺旋波可达到近似广义同步; 当耦合强度更大时, 螺旋波演化为湍流态.

关键词: 激发介质, 螺旋波, 同步

PACS: 05.45.−a, 05.45.Xt

1 引 言

螺旋波是二维反应扩散系统中最常见的一种非线性波, 在 Belousov-Zhabot- insky 化学反应系统 [1]、一氧化碳在铂金表面的催化氧化反应 [2]、心肌组织中的电活动 [3,4]、蛙卵母细胞中的钙波 [5] 和小鼠海马切片中的钙波 [6,7] 中都观察到螺旋波. 对于单层介质中螺旋波的动力学行为, 目前已经有比较清楚的认识 [8−10], 然而对于多层耦合介质中的螺旋波动力学行为, 仍缺乏足够了解, 目前已经引起人们极大的兴趣 [11−17]. 文献 [11] 研究了线性耦合的两层反应扩散介质中的螺旋波动力学行为, 发现螺旋波的动力学行为依赖于两个子系统间的耦合强度, 当耦合强度很弱时, 两个子系统的螺旋波波长和频率保持不变, 而且两个子系统间的相互作用导致螺旋波漂移; 当耦合强度很大时, 两个子系统间达到相位同步并存在主从关系. 在两层介质的直接 [13,16] 或间接 [17] 耦合下还观察到相位同步. 由于不少生物系统是由多层介质构成的, 如大脑皮层由 6 层不同特点和功能的介质构成. 心脏的心肌细胞中存在多种离子电流, 当心肌细胞中存在螺旋波电信号时, 心肌细胞中的各种离子电流也呈螺旋波分布, 它们之间的相互作用对螺旋波动力学行为有重要影响. 正是离子电流的耦合, 将在其它系统中可以有效控制螺旋波的方法用于心脏系统时, 往往得不到较好的结果. 因此了解多层耦合介质中螺旋波的动力学行为是十分必要的.

本文基于 Bär 模型 [18] 研究了反馈耦合的三层介质 (三个子系统) 中的螺旋波动力学行为. 耦合方式为: 对快变量 u 采用逆时针驱动 - 响应循环反馈耦合, 对慢变量 v 采用顺时针驱动 - 响应循环反馈耦合. 数值模拟结果显示: 耦合强度较小时, 子系统出现螺旋波漫游、漂移, 甚至导致部分子系统中的螺旋波漂移出边界, 使子系统处于静息态, 这时子系统的背景中出现驱动子系统中的螺旋波. 当耦合强度足够大时, 低激发性子系统可能会出现螺旋波转变为靶波, 还可以出现各子系统中的螺旋波分别达到广义同步和近似的广义同步, 观察到不同螺旋波之间的广义同步. 当耦合强度更大时, 子系统全部处于湍流态.

2 模 型

本文采用 Bär 模型 [18], 基于该模型的耦合系统的动力学方程如下:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = f_1(u_1, v_1) + D\nabla^2 u_1 + c_1(u_2 - u_1), \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = g(u_1, v_1) + c_2(v_3 - v_1), \quad (1b)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = f_2(u_2, v_2) + D\nabla^2 u_2 + c_1(u_3 - u_2), \quad (1c)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11165004, 10765002, 10947011) 资助的课题.

† E-mail: tangguoning@sohu.com

© 2012 中国物理学会 Chinese Physical Society

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = g\left(u_2, v_2\right) + c_2\left(v_1 - v_2\right), \tag{1d}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = f_3\left(u_3, v_3\right) + D\nabla^2 u_3 + c_1\left(u_1 - u_3\right), \tag{1e}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} = g\left(u_3, v_3\right) + c_2\left(v_2 - v_3\right), \tag{1f}$$

$$f_{1,2,3}(u,v) = \frac{1}{\varepsilon_{1,2,3}} u\left(1-u\right)\left(u - \frac{v+b}{a}\right),$$

$$g\left(u,v\right) = \begin{cases} -v, & u < 1/3, \\ 1 - 6.75u(u-1)^2 - v, & 1/3 \leqslant u \leqslant 1, \\ 1 - v, & u > 1. \end{cases}$$

从文献 [18] 知, 当系统参数取 $a = 0.84$, $b = 0.07$ 时, 方程描述的系统为可激发介质系统, ε 的大小反映了介质的激发性强弱, ε 越小, 介质的激发性越强. 当 $0 < \varepsilon < 0.06$ 时, 在适当初始条件下得到的螺旋波是稳定的; 当 $0.06 \leqslant \varepsilon \leqslant 0.069$ 时, 螺旋波失稳发生漫游; 当 $\varepsilon > 0.069$ 时, 螺旋波因多普勒不稳定而破碎, 使系统最终进入时空混沌态.

在数值解方程 (1a)—(1f) 中, 本文始终采用向前欧拉方法和二阶精度的有限差分法, 使用无流边界条件, 空间步长取 $\Delta x = \Delta y = 0.4$, 时间步长取 $\Delta t = 0.02$, 系统尺寸为 $N\Delta x \times N\Delta y = 120 \times 120$, 即系统被离散成 300×300 个格点. 在本文中, 固定取 $a = 0.84, b = 0.07, D = 1, \varepsilon_1 = 0.055$, $\varepsilon_2 = 0.060$, $\varepsilon_3 = 0.065$, c_1 和 c_2 分别为快变量 u 和慢变量 v 的耦合强度. 在本文的研究中, 把 ε_1,ε_2 和 ε_3 对应的介质分别称第一、二、三层介质, 记为子系统 1,2,3. 耦合强度 c_1 和 c_2 的变化范围分别取为 $c_1 \in [0.005, 0.20]$, $c_2 \in [0.005, 0.05]$.

由于各子系统的参数不同, 在方程 (1) 描述的驱动响应反馈耦合下, 子系统最有可能达到广义同步. 根据混沌系统广义同步辅助判别方法, 每个子系统都取一个相应的辅助系统, 它们的系统参数相同, 初值不同 (即初态螺旋波有相位差), 但受到相同的驱动. 子系统 l 与其相应的辅助系统对应的变量差的平均值定义为广义同步差 δ_l, 即

$$\delta_l = \frac{1}{N \times N} \sum_{i,j=1}^{N} \left|u_l\left(i,j\right) - u_l'\left(i,j\right)\right|, \tag{2}$$

则当 $\delta_l = 0$ 时, 子系统 l 与其相应的辅助系统达到同步, 驱动与响应系统达到广义同步. 一般情况下 $\delta_l \neq 0$, δ_l 的大小依赖耦合强度和驱动与响应系统之间的参数不匹配, δ_l 越小就越接近广义同步. 通常经过长时间演化后, 子系统的广义同步差满足 $\delta_l > 0.4$, 当各子系统的广义同步差满足 $\delta_l < 0.05$ 时, 我们认为各子系统分别达到近似广义同步.

3 数值模拟结果

首先在耦合强度 $c_1 = 0$ 和 $c_2 = 0$ 情况下产生螺旋波, 作为各子系统的初态, 初始螺旋波的波头在介质中心, 然后考虑不同耦合强度对螺旋波的影响, 在每次进行数值模拟时, 使用相同的螺旋波作为初态.

考虑 $c_2 = 0.005$ 情况. 当耦合强度 $0.005 \leqslant c_1 \leqslant 0.015$ 时, 三个子系统的螺旋波均发生小幅漫游或漂移. 当 $0.015 < c_1 < 0.08$ 时, 三个子系统表现出不同的动力学行为, 具体情况在下面讨论. 当 $0.08 \leqslant c_1 \leqslant 0.170$ 时, 各子系统中螺旋波作规则漫游. 螺旋波波头运动轨迹如图 1 所示, 其中图 1(a)—(c) 为未耦合时各子系统中螺旋波波头的轨迹, 分别对应稳定螺旋波、刚开始失稳的螺旋波和漫游螺旋波, 稳定螺旋波周期 (这里用远离螺旋波波头处一空间点的振荡周期代替) 几乎不变, 等于 4.32. 刚开始失稳的螺旋波周期有微小变化, 约为 4.43. 漫游螺旋波的周期在 [4.48,5.18] 范围内变化, 平均周期约为 4.87. 图 1(d)—(f) 为耦合后各子系统中螺旋波达到渐近态后波头的轨迹, 其轨迹形状都呈相似的花瓣状, 这时我们称螺旋波达到定态. 由于各螺旋波波头漫游的幅度有微小差别, 轨线较粗, 表明三个子系统的螺旋波没有达到精确的同步, 其周期和相位应存在小幅变化. 图 2 给出相应的广义同步差 δ_l 随时间的变化, 其中 $\delta_1 = 0.043$, $\delta_2 = 8.6 \times 10^{-17}$, $\delta_3 = 0.001$. 可见 3 个子系统分别达到近似广义同步, 而且子系统 2 与子系统 3 达到广义同步 (此时可以认为 $\delta_2 = 0$). 当 $0.170 < c_1 \leqslant 0.20$ 时, 各子系统的螺旋波破碎演化为湍流态, 如图 3 所示.

应当指出: 1) 3 个子系统内的螺旋波达到近似广义同步, 子系统之间的对应点并不同步, 如果用方程 (2) 计算子系统 1 和 2 之间、子系统 2 和 3 之间、子系统 1 和 3 之间的同步差, 这些同步差分别稳定在 0.2, 0.04 和 0.16(耦合前的同步差约分别为 0.43,0.30 和 0.55), 可见方程 (2) 定义的广义同步差可以反映子系统之间的同步程度, 特别是当广义同步差 $\delta_l = 0$ 时, 相互耦合的两子系统的同步差达到最小. 2) 产生广义同步 (或近似广义同步) 是有条件的. 由于子系统 1 的激发性最高, 相应的波速最高, 子系统 3 的激发性最低, 相应的波

速最低. 考察各子系统螺旋波波核外的各对应点的波相位, 发现只有当子系统 3 和 2 中的螺旋波相位分别超前子系统 2 和 1 中的螺旋波相位, 并且在耦合后子系统 1 和 2 中的螺旋波能追上子系统 3 中的螺旋波 (即它们的相位差变得很小), 才会产生广义同步 (或近似广义同步), 否则不会产生广义同步 (或近似广义同步), 甚至会导致螺旋波的破碎. 本文选用的初态螺旋波都满足产生广义同步 (或近似广义同步) 的条件. 3) 三个子系统的漫游螺旋波都具有相同的平均周期 4.68(即在某段时间内, 在螺旋波波核外一空间点的振荡周期的平均值), 从方程 (1a)—(1f) 可以看出: 子系统 2 主要受子系统 3 的驱动, 前者介质的激发性高于后者, 因此子系统 2 中螺旋波的固有周期低于子系统 3 中螺旋波的固有平均周期. 两者固有周期的平均值 4.65 非常接近耦合后螺旋波的平均周期 4.68, 这是子系统 2 的广义同步差 δ_2 等于零的原因, 这表明: 在循环耦合下, 低频螺旋波驱动高频螺旋波可以实现广义同步. 同理, 子系统 3 主要受子系统 1 的驱动, 子系统 1 和子系统 3 的螺旋波固有周期的平均值为 4.58, 子系统 1 和子系统 2 的螺旋波固有周期的平均值为 4.37, 与耦合后螺旋波的平均周期 4.68 相差最大, 这是子系统 1 的广义同步差 δ_1 最大的原因. 4) 不论三个子系统参数是否相同, 三个子系统中的螺旋波都不可能达到同步. 数值模拟表明: 在图 1 参数下, 三个同参数子系统的初始螺旋波的相位差很小, 同步差也稳定在 0.0023 左右, 与耦合强度 c_2 同数量级. 不能产生同步的原因是: 耦合是循环的, 而且快变量 u 和慢变量 v 的耦合方向不同, 使得 u 和 v 趋向不同的目标态. c_2 很小, 慢变量 v 的耦合导致快变量 u 稍微偏离目标态, 最后使同步差维持在一个小的值上.

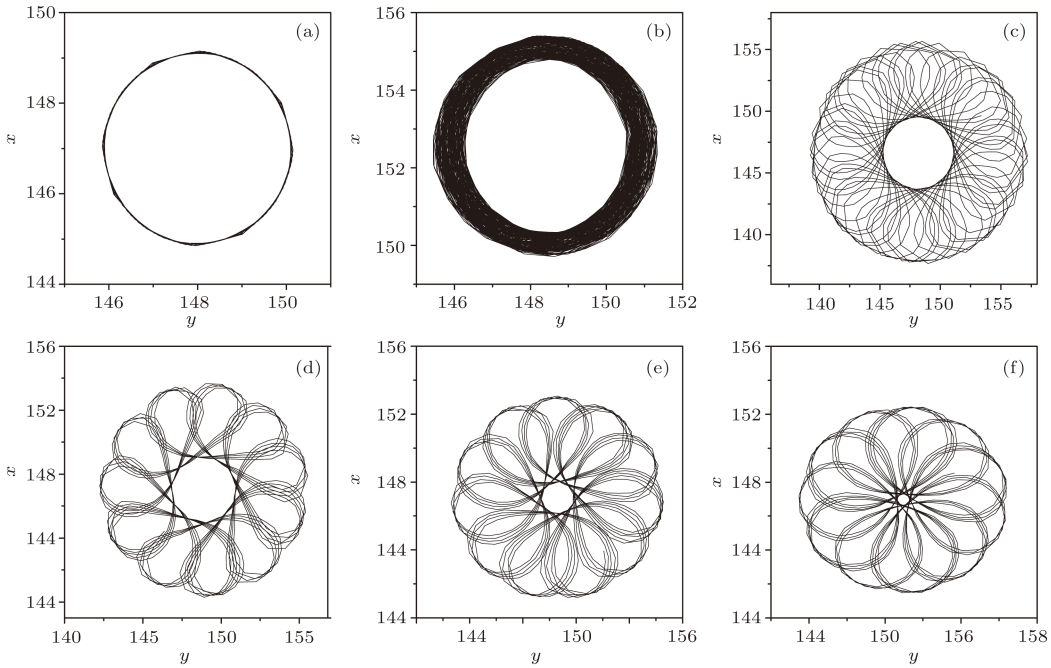

图 1 螺旋波的波头运动轨迹 (a)—(c) 分别为未耦合时子系统 1,2,3 中螺旋波波头的运动轨迹; (d)—(f) 分别为耦合强度 $c_1 = 0.12, c_2 = 0.005$ 时子系统 1,2,3 中螺旋波波头的运动轨迹

下面继续讨论耦合强度在 $0.015 < c_1 < 0.08$ 范围时各子系统中螺旋波的动力学行为. 当 $0.015 < c_1 \leqslant 0.04$ 时, 子系统 1,2,3 中的螺旋波持续漂移, 子系统 1,2 中螺旋波波头的运动轨迹如图 4 所示, 而且子系统 1 和 2 中的螺旋波达到近似广义同步, 螺旋波不会漂移出系统. 子系统 3 中的螺旋波或其辅助系统的螺旋波有可能漂移出系统, 导致两个系统的最终状态不同, 我们把在相同的驱动下子系统与相应辅助系统的最终状态不同的现象称为结果依赖初值. 典型的结果如图 5 所示, 表明子系统 1 和 2 结果不依赖初值, 这时广义同步差很小. 子系统 3 的结果受初值影响, 即不同的初值演化得到不同的结果, 这时广义同步差很大, 这是由于子系统 3 中的螺旋波更容易漂移出系统. 当 $0.04 < c_1 \leqslant 0.065$ 时, 子系统 1 表现为螺旋波漂移, 子系统 2 中的螺旋波因漫游出系统而处于静息态, 但是存在螺旋波的背景; 子系统 3 的动力学行为较复杂, 既可出现螺旋波漂移也可以处于静息态, 还可能出现结果依赖初值现象 (参见后面图 10 的结果). 之所以有时候子系统 3 仍处于螺旋波态, 是

因为它受到高频螺旋波的作用.

图 6 给出了在 $c_1 = 0.06$ 和 $c_2 = 0.005$ 情况下 3 个子系统的 u 变量斑图. 从图可以看出, 子系统 2,3 处于静息态, 但是具有螺旋波的背景 (它是子系统 1 中的螺旋波). 当 $0.065 < c_1 \leqslant 0.07$ 时, 子系统中的螺旋波均破碎形成湍流. 当 $0.07 < c_1 \leqslant 0.075$ 时, 子系统 1 中的螺旋波漂移, 耦合使子系统 2,3 中螺旋波的波头运动出系统边界, 但是因为受子系统 1 的驱动, 子系统 2,3 会被再次激发逐渐演化成靶波, 其靶波振源由子系统 1 的波头产生, 如图 7 所示.

当改变耦合强度 c_2 时, 在不同的 c_1 作用下会得到不同结果, 这些结果我们用不同的符号表示, 这样得到的三个子系统在 c_1-c_2 平面上的相图分别如图 8,9,10 所示. 图中符号 ◯ 表示结果依赖初值, ▲ 表示湍流, △ 表示漂移螺旋波, ▽ 表示定态螺旋波 (参见图 1), ■ 表示子系统处于静息态并存在螺旋波的背景 (参见图 6), □ 表示系统处于静息态且无螺旋波背景, 它是由于 3 个子系统中的螺旋波漫游出边界产生的, ▼ 表示靶波态 (参见图 7). 除 ◯ 表示结果依赖初值, 其他符号表示的结果均不依赖初值, 即子系统与相应辅助系统的最终状态几乎相同.

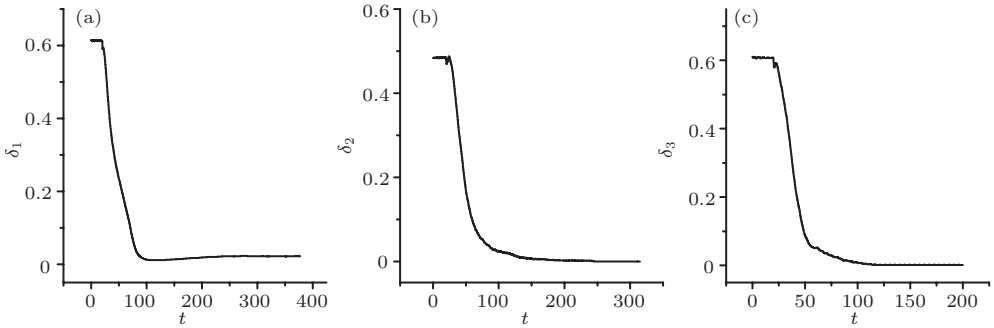

图 2 耦合强度为 $c_1 = 0.120, c_2 = 0.005$ 时 3 个子系统与其辅助系统的同步差 δ_l 随时间 t 的变化曲线

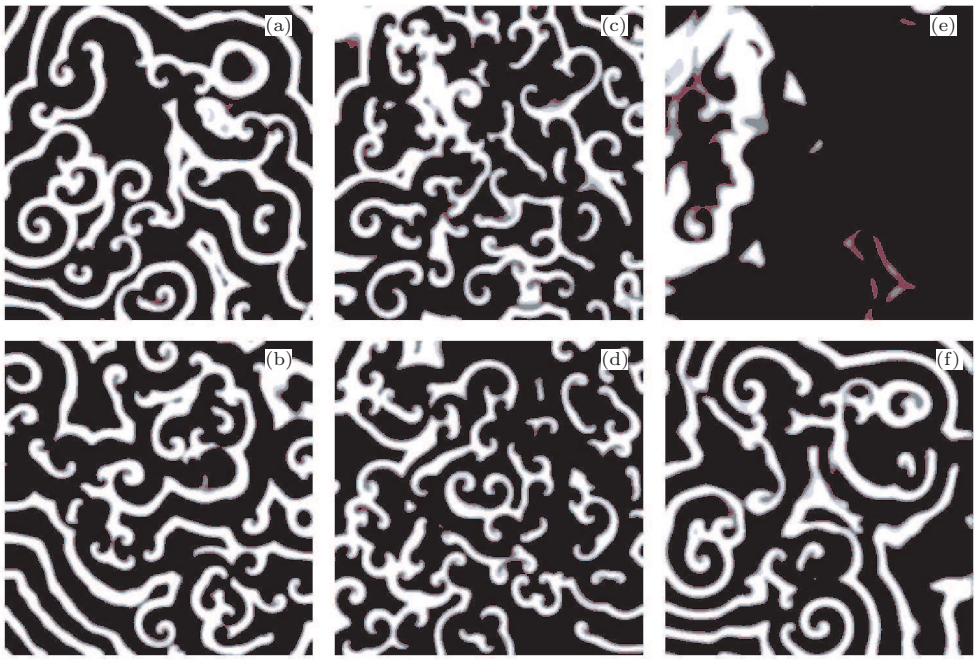

图 3 在耦合强度 $c_1 = 0.175$ 和 $c_2 = 0.005$ 情况下各子系统与其辅助系统的 u 变量斑图 (a),(b) 子系统 1 与其辅助系统; (c),(d) 子系统 2 与其辅助系统; (e),(f) 子系统 3 与其辅助系统

未耦合时子系统 1 的螺旋波为稳定螺旋波, 从图 8 可以看出, 耦合后大部分情况处于规则的漫游螺旋波态 (定态), 其波头运动范围相对初值稍微增大 (参见图 1(a) 和 (d)), 此时它可达到近似广义同步, 随着 c_2 的增大快速达到广义同步. 在耦合强度 c_1, c_2 较小或都较大时螺旋波容易发生漂移. 螺旋波演化为湍流一般只出现在耦合强度较大的情况, 在一些参数下螺旋波由于漂移出子系统而使子系统处于静息态, 螺旋波不会演化成靶波态.

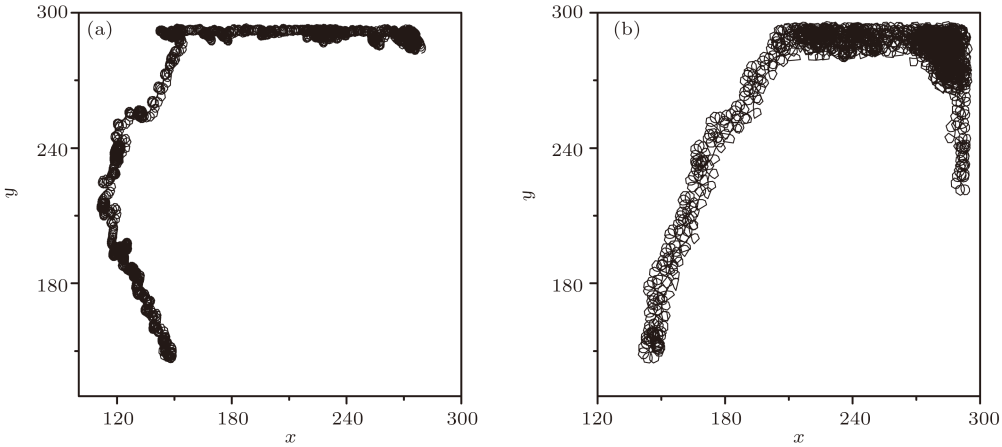

图 4 在耦合强度 $c_1 = 0.03$ 和 $c_2 = 0.005$ 的情况下子系统中螺旋波波头的轨迹 (a) 子系统 1; (b) 子系统 2

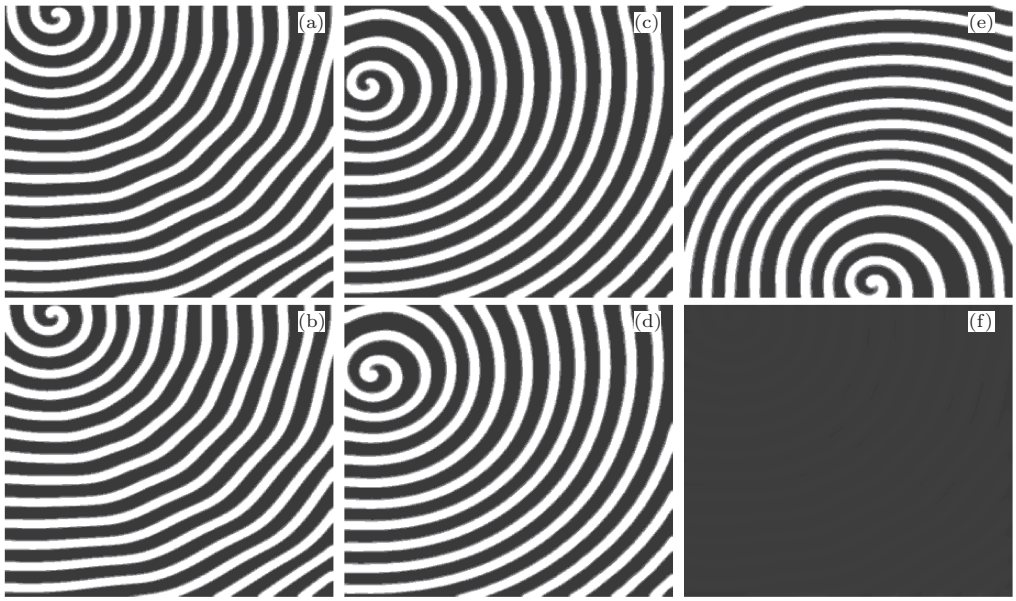

图 5 在耦合强度 $c_1 = 0.03$ 和 $c_2 = 0.005$ 情况下子系统与其辅助系统的 u 变量斑图 (a),(b) 子系统 1 与其辅助系统; (c),(d) 子系统 2 与其辅助系统; (e), (f) 子系统 3 与其辅助系统, (f) 表示螺旋波漂移出系统

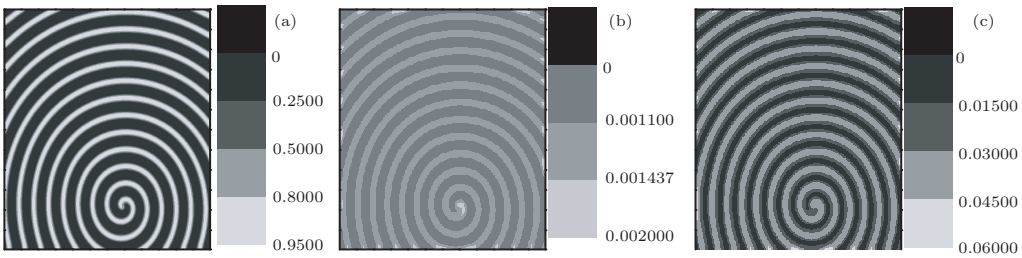

图 6 在耦合强度 $c_1 = 0.06$ 和 $c_2 = 0.005$ 情况下 3 个子系统的 u 变量斑图 (a) 子系统 1; (b) 子系统 2; (c) 子系统 3

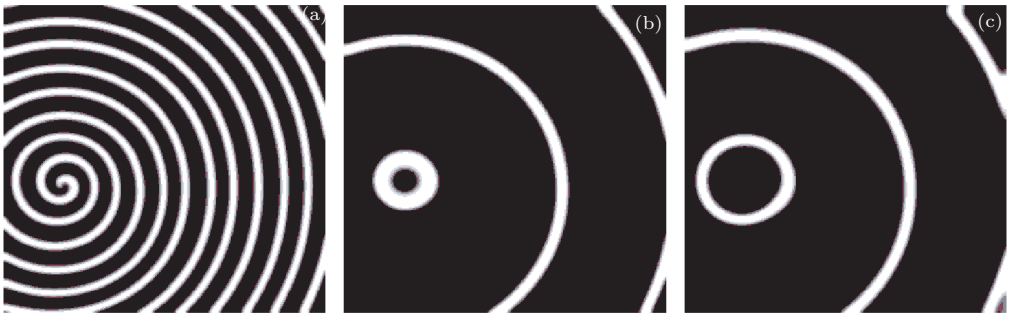

图 7 在耦合强度 $c_1 = 0.075$ 和 $c_2 = 0.005$ 情况下 3 个子系统的 u 变量斑图 (a) 子系统 1; (b) 子系统 2; (c) 子系统 3

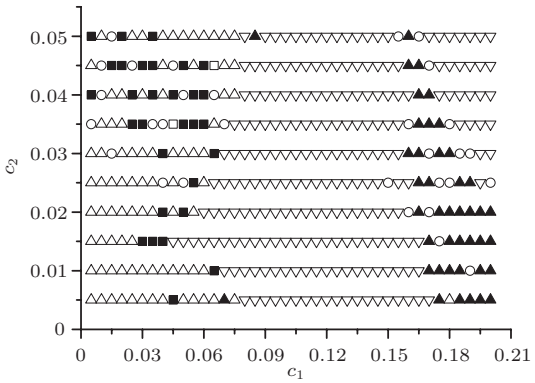

图 8 子系统 1 在 c_1-c_2 参数平面上的相图

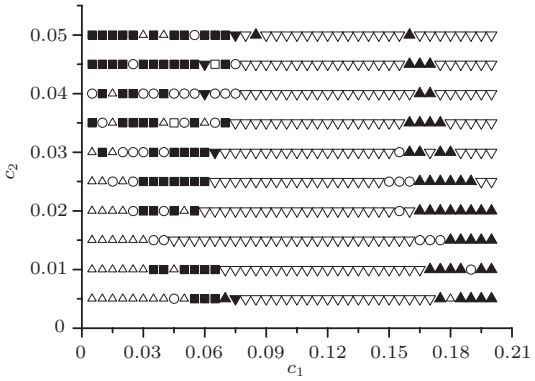

图 9 子系统 2 在 c_1-c_2 参数平面上的相图

未耦合时子系统 2 的螺旋波处于开始失稳的临界点, 螺旋波有小幅漫游 (参见图 1(b)). 从图 9 可以看出, 子系统 2 情形与子系统 1 情形差不多, 大部分情况下螺旋波处于定态 (参见图 1(b) 与 (e)), 这时子系统 2 达到广义同步, 另外子系统出现静息态的情形增多了, 而且在一些参数下螺旋波会演化成靶波.

未耦合时子系统 3 的螺旋波处于漫游区, 从图 10 可以看出, 子系统 3 情形与子系统 2 的情形有不少差别, 相同点是大部分情况下螺旋波处于定态, 规则漫游螺旋波的波头运动范围相对初态变小了,(参见图 1(c) 和 (f)). 这时子系统 3 达到近似广义同步, 其广义同步差在 0.001 左右. 当三个子系统的螺旋波都处于规则的漫游螺旋波态时,3 个子系统分别达到近似的广义同步. 在子系统 2 出现的态在子系统 3 中都会出现, 不同点是结果与初值有关的情形增加了许多.

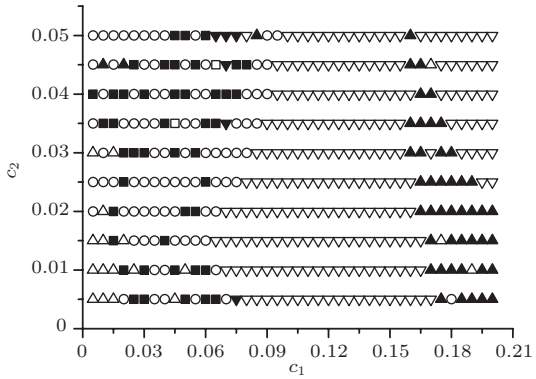

图 10 子系统 3 在 c_1-c_2 参数平面上的相图

4 结 论

本文采用 Bär 模型, 研究了在驱动 - 响应循环反馈耦合下三层可激发介质中的螺旋波动力学, 发现这种耦合作用对螺旋波动力学产生重要影响: 1) 使螺旋波漂移、漫游和螺旋波破碎成湍流. 2) 使子系统中的螺旋波演化成靶波. 3) 既可以使三个子系统都处于静息态, 也可以使部分子系统处于静息态, 这时的子系统具有螺旋波的背景, 故其 u 变量的值接近零. 4) 存在子系统状态依赖初值的情况, 即子系统和其辅助系统演化到不同的状态上, 可能是螺旋波态, 也可能处于静息态. 5) 当各子系统处于定态时, 系统达到广义同步或近似广义同步, 表明在循环耦合下, 低频螺旋波驱动高频螺旋波也可使两螺旋波达到广义同步. 在实际心脏中出现的螺旋波电信号在大部分情况下可以漫游出系统边界而

消失, 有时出现螺旋波破碎成湍流态, 在本文的研究中我们也观察到类似现象, 表明我们的结果有助于了解发生在心脏中的生理现象, 并为控制心脏中的螺旋波提供有益的帮助. 本文仅考虑了三层介质之间的耦合, 与心脏中多种离子电流耦合还有不少差别, 结合心脏系统的特点, 提出更符合心脏特点的耦合, 研究多层耦合介质中螺旋波的动力学行为是我们未来继续研究的内容.

[1] Zaikin A N, Zhabotinsky A M 1970 *Nature(London)* **225** 535

[2] Bär M, Gottschalk N, Ertl G 1994 *J. Phys. Chem.* B **100** 1202

[3] Gray R A, Pertsov A M, Jalife J 1998 *Nature* (London) **392** 75

[4] Witkowski F X, Leon L J, Penkoske P A,Giles W R, Spano M L, Ditto W L, Winfree A T 1998 *Nature* (London) **392** 78

[5] Lechleiter J, Girard S, Peralta E, Clapham D 1991 *Science* **252** 123

[6] Harris-White M E, Zanotti S A, Frautschy S A, Charles A C 1998 *J. Neurophysiol* **79** 1045

[7] Wilkins M, Sneyd J 1998 *J. Theor Biol* **191** 299

[8] Berenstein I, Muñuzuri A P , Yang L, Dolnik M, Zhabotinsky A M, Epstein I R 2008 *Phys. Rev.* E **78** 025101(R)

[9] Tang D N, Tang G N 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2319 (in Chinese) [唐冬妮, 唐国宁 2010 物理学报 **59** 2319]

[10] Wei H M, Tang G N 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 66 (in Chinese) [韦海明, 唐国宁 2011 物理学报 **60** 66]

[11] Yang H J, Yang J Z 2007 *Phys. Rev.* E **76** 016206

[12] Yuan G Y, Yang S P, Wang G R, Chen S G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1510 (in Chinese) [袁国勇, 杨世平, 王光瑞, 陈式刚 2005 物理学报 **54** 1510]

[13] Zhan M, Wang X G, Gong X F, Lai C H 2005 *Phys. Rev.* E **71** 036212

[14] Zhou T S, Chen L N, Aihara K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 178103

[15] Ma J, Ying H P, Liu Y, Li S R 2009 *Chin. Phys.* B **18** 0098

[16] Zhang G Y, Ma J, Yu L C, Chen Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 4107

[17] Resmi V, Ambika G 2010 *Phys. Rev.* E **81** 046216

[18] Bär M, Eiswirth M 1993 *Phys. Rev.* E **48** R1635

The dynamics of spiral waves in three-layer excitable medium with circular feedback coupling*

Li Guang-Zhao Chen Yong-Qi Tang Guo-Ning†

(*College of Physics and Technology, Guangxi Normal University, Guilin* 541004, *China*)

(Received 11 November 2010; revised manuscript received 5 May 2011)

Abstract

The dynamics of spiral wave in a three-layer excitable medium with circular feedback coupling is studied, based on the Bär model. The numerical results show that the drifting or meandering of spiral waves in the subsystems can be observed when the coupling strength is small. When the coupling strength is slightly big, the interaction between subsystems may cause spiral waves in some subsystems to move out of the boundaries of the subsystems. The subsystems return to rest state. In addition, the interaction may generate the transition from spiral wave state to target wave or turbulence states in some subsystems. The phenomenon that the asymptotic state of a subsystem depends on the initiation condition is observed. With the further increase of the coupling strength, the approximate generalized synchronization of the spiral waves in three subsystems is established. When the coupling strength is bigger, the spiral waves evolve into turbulence.

Keywords: excitable medium, spiral wave, synchronization

PACS: 05.45.−a, 05.45.Xt

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11165004, 10765002 and 10947011).

† E-mail: tangguoning@sohu.com