

一个具有完全四翼形式的四维混沌

余飞 王春华[†] 尹晋文 徐浩

(湖南大学信息科学与工程学院, 长沙 410082)

(2011年5月9日收到; 2011年5月24日收到修改稿)

本文通过引进一个非线性状态反馈控制器, 提出了一个新的四维混沌系统, 该混沌吸引子能在任何方向上都表现出四翼形式. 由于存在一个大的正李雅普诺夫指数, 混沌系统具有一些非常有趣和复杂的动力学行为. 对系统的一些基本动力学特性进行了数值模拟和理论分析, 如平衡点、耗散性、Poincaré映射、频谱、时域谱和混沌行为等. 通过对 Lyapunov 指数谱和分岔图的分析, 进一步研究了混沌行为的系统参数敏感性. 最后, 设计了一个实现四翼混沌系统的振荡电路, EWB 观察结果与数值模拟结果具有良好的一致性.

关键词: 四维混沌, 四翼混沌系统, Poincaré映射, Lyapunov 指数

PACS: 05.45.Jn, 05.45.Pq

1 引言

最近几十年来, 混沌在神经网络、数字水印、保密通信和流体力学等方面得到了广泛应用, 然而, 生成具有复杂动力学特性和拓扑结构的混沌系统是研究和应用混沌的重要前提^[1], 目前, 研究复杂拓扑结构的混沌系统主要沿着两个方向发展, 一个方向是利用非光滑函数来构建多涡卷混沌吸引子. 通过使用一些非光滑函数 (非线性函数) 如分段线性函数^[2]、饱和函数^[3]、阶梯函数^[4]、滞回函数^[5,6]、三角波函数^[7]和锯齿波函数^[8]等来实现广义的 Chua 电路和 jerk 电路. 这些电路具有一些共同特点, 即涡卷的数量等于系统的平衡点个数, 而且吸引子的形状为环形或面包圈.

采用光滑自治系统来构建多翼吸引子是另一个研究方向. 由于阈值效应的限制, 使得传统的广义 Lorenz 系统族的动力学局限在垂直轴的正半轴空间, 无法向负半轴空间发展, 从而只能产生两翼蝴蝶形吸引子^[9]. 近年来, 研究如何打破该阈值效应的限制, 成为构建四翼光滑自治系统的关键, 目前主要有以下几种方法: 一是采用双极化轴的方法, 邓斌等人^[10]和王忠林等人^[11]采用双极化 z

轴的方法分别实现了基于 Lü 系统和共轭 Lü 系统的四翼形式. 二是耦合方法, Grassi 等人^[12,13]通过耦合二个或三个统一的 Lorenz 混沌系统, 分别产生了四翼或八翼混沌吸引子. 三是采用广义方法, Wang 等人^[14]通过对一类三维四翼自治混沌系统进行分析, 发现了一种普遍现象, 即若一个三维自治混沌系统能够产生四翼吸引子, 则该系统满足以下三个条件: 1) 系统的每一项至少都包含一个二次交叉非线性项. 2) 系统的每一项都包含有线性项. 3) 系统的平衡点有五个. 注意反过来说却未必成立, 最近乔晓华等人^[15]和贾红艳等人^[16]提出的三维四翼自治混沌系统都分别验证了该广义方法的可行性. 为了进一步研究复杂混沌拓扑结构, 最近, 四翼四维混沌也相继提出, Cang 等人^[17]提出了一个四翼四维超混沌, 该混沌结构简单, 但是在某些方向上四翼形式并不明显. Qi 等人^[18]提出了四翼四维混沌系统, 该混沌吸引子能在所有方向上都表现出四翼形式, 但是由于每一项都包含不同的三次交叉非线性项, 电路实现至少需要六个模拟乘法器, 而且该系统有九个平衡点, 结构复杂相比多涡卷混沌系统, 多翼自治混沌系统的翼的数量并不等于平衡点个数, 且吸引子的形状一般为蝴蝶形.

[†] E-mail: wch1227164@sina.com

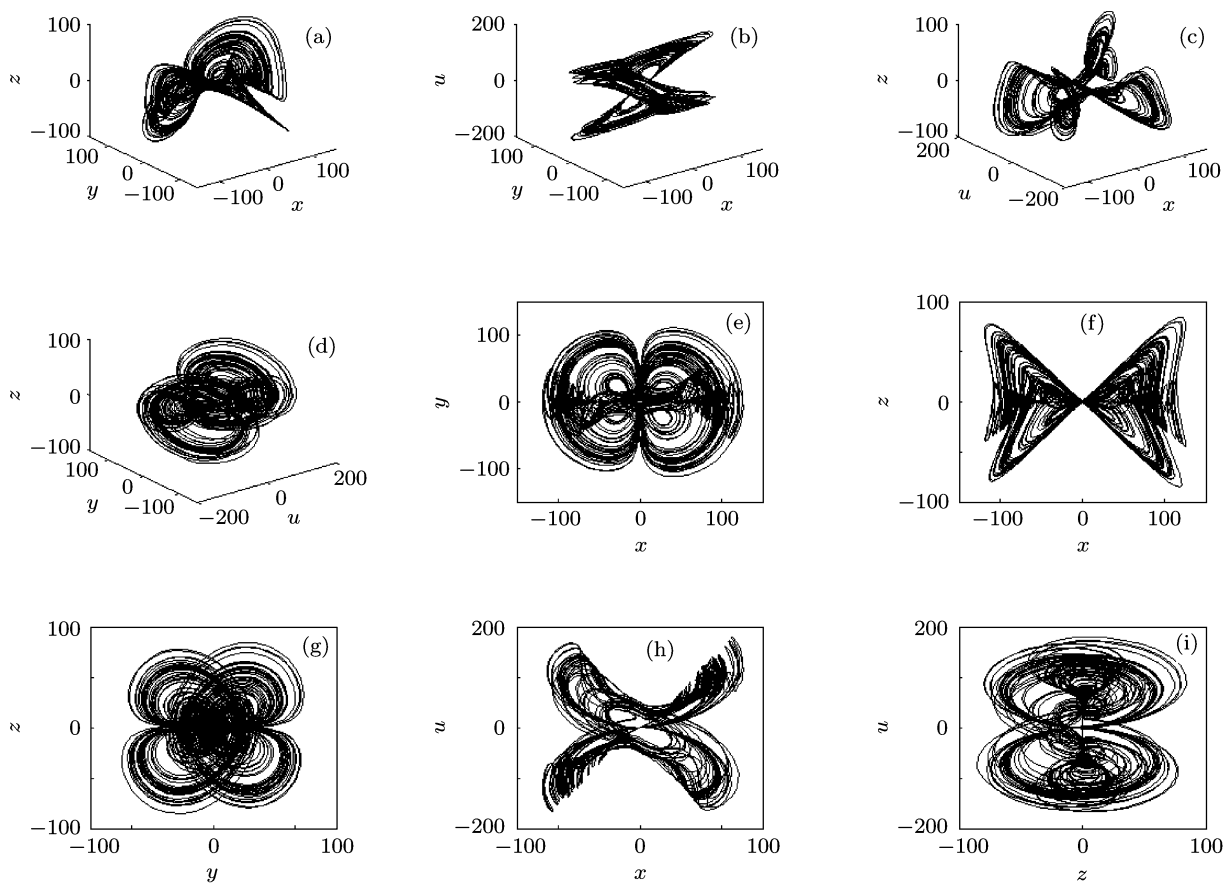


图1 四翼混沌相图 (a) x - y - z 三维图; (b) x - y - u 三维图; (c) x - u - z 三维图; (d) u - y - z 三维图; (e) x - y 平面; (f) x - z 平面; (g) y - z 平面; (h) x - u 平面; (i) z - u 平面

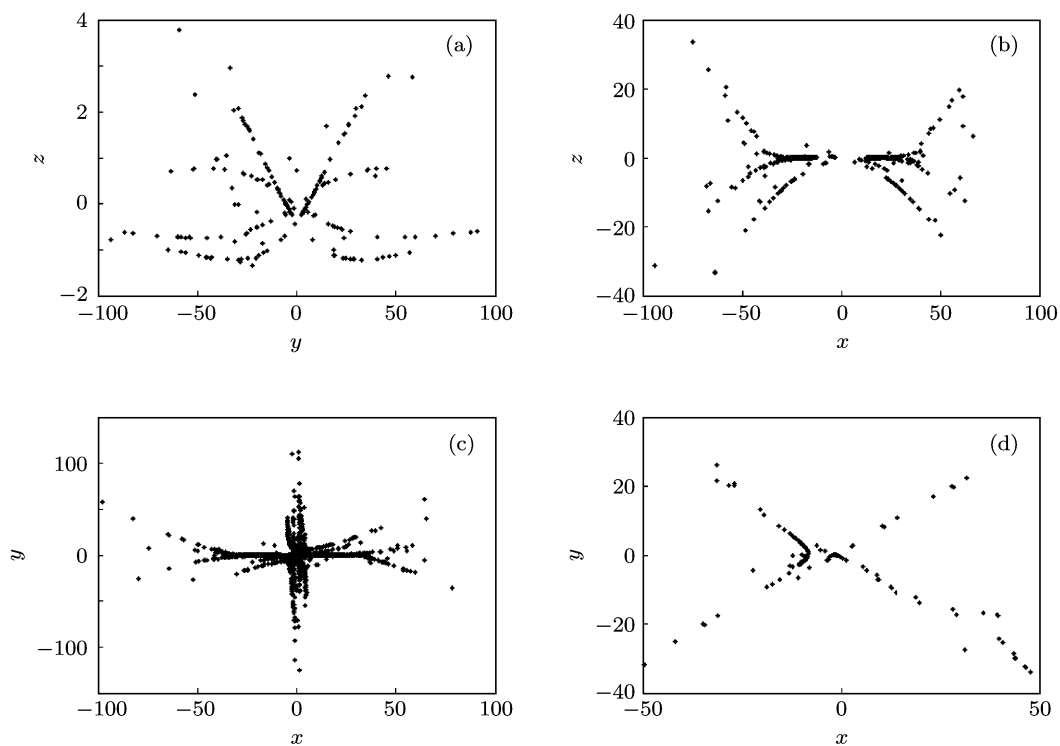


图2 Poincaré映射 (a) $x=0$; (b) $y=0$; (c) $z=0$; (d) $u=-20$

本文提出了一个简单的四翼四维混沌, 该混沌吸引子能在所有方向上都表现出四翼形式, 并且电路实现简单, 只需要三个模拟乘法器, 系统只有五个平衡点. 本文对系统的一些基本动力学特性进行了数值模拟和理论分析, 同时还进一步详细分析了关于混沌行为的系统参数敏感性. 最后, 实现了该四翼混沌系统的振荡电路.

2 一个新的四翼四维混沌系统

基于四翼吸引子的广义方法, 通过在三维自治混沌系统中引进一个非线性状态反馈控制器, 构建了一个新的简单的四翼四维混沌系统, 描述为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + yz + bu, \\ \dot{y} &= cy - xz, \\ \dot{z} &= xy - dz, \\ \dot{u} &= xz - eu, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $a, c, d, e \in R^+, b \in R, x, y, z$ 是状态变量, u 是状态反馈控制器. 当 $a = 8, b = 5, c = 12, d = 60, e = 4$, 初始条件为 $[2, 1, 1, 2]^T$ 时, 图 1(a)—(i) 为系统轨迹的相图. 从图中可以看出, 该混沌吸引子能在所有方向上都表现出四翼形式. 该四维混沌系统的四个 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_1 = 1.4040, \lambda_2 = 0.0030, \lambda_3 = -6.3454, \lambda_4 = -53.2679$. 由于存在一个正的李雅普诺夫指数, 混沌系统具有一些非常有趣和复杂的动力学行为.

3 基本的动力学特性

本节通过数值模拟和理论分析, 详细讨论了该四翼四维混沌系统的一些基本的动力学特

性. 很明显, 该混沌系统具有 z 轴的对称性, 即满足 $(x, y, x, u) \rightarrow (-x, -y, z, -u)$. 系统 (1) 的平衡点可以解下面代数方程求得:

$$\begin{aligned} -ax + yz + bu &= 0, \\ cy - xz &= 0, \\ xy - dz &= 0, \\ xz - eu &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

很容易看出原点是系统的一个平衡点. 为了得到其他的四个平衡点, 令

$$k_{1,2} = \frac{-\frac{bc}{e} \pm \sqrt{\frac{b^2c^2}{e^2} + 4ac}}{2\sqrt{\frac{c}{d}}},$$

则其他的四个平衡点为

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= \left[\sqrt{cd}, k_{1,2}, k_{1,2}\sqrt{\frac{c}{d}}, k_{1,2}\frac{c}{e} \right], \\ S_{3,4} &= \left[-\sqrt{cd}, -k_{1,2}, -k_{1,2}\sqrt{\frac{c}{d}}, -k_{1,2}\frac{c}{e} \right]. \end{aligned}$$

当 $a = 8, b = 5, c = 12, d = 60, e = 4$ 时, 系统 (1) 的五个平衡点分别为

$$S_0 = [0, 0, 0, 0],$$

$$S_{1,3} = [\pm 26.8328, \pm 10.8206, 4.8391, \pm 32.4618],$$

$$S_{2,4} = [\pm 26.8328, \mp 44.3626, -19.8396, \mp 133.0878].$$

为了考察系统的稳定性, 考虑每一个平衡点所对应的雅克比矩阵并计算其特征值, 相关的结果在表 1 中给出. 从表 1 中可以看出, 系统 (1) 所有平衡点都是鞍焦点表明该五个平衡点都是不稳定的. 四个非零平衡点位于吸引子的四个翼的中心处, 而零点则位于整个吸引子的中心处. 从图 1 可以看出, 轨道线围绕着四个非零平衡点发展, 在形成四翼吸引子中发挥了重要作用.

表 1 平衡点所对应的特征值

S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
-8	-51.6581	-88.5368	-51.6581	-88.5368
12	-11.5418	15.3947 + 65.6104 i	-11.5418	15.3947 + 65.6104 i
-60	1.5999 + 9.6738 i	15.3947 - 65.6104 i	1.5999 + 9.6738 i	15.3947 - 65.6104 i
-4	1.5999 - 9.6738 i	-2.2526	1.5999 - 9.6738 i	-2.2526

由于

$$\Delta V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} = -a + c - d - e, \quad (3)$$

当 $a + d + e > c$ 时, 则系统是耗散的, 且以指数形式收敛

$$\frac{dV}{dt} = e^{-(a-c+d+e)t}. \quad (4)$$

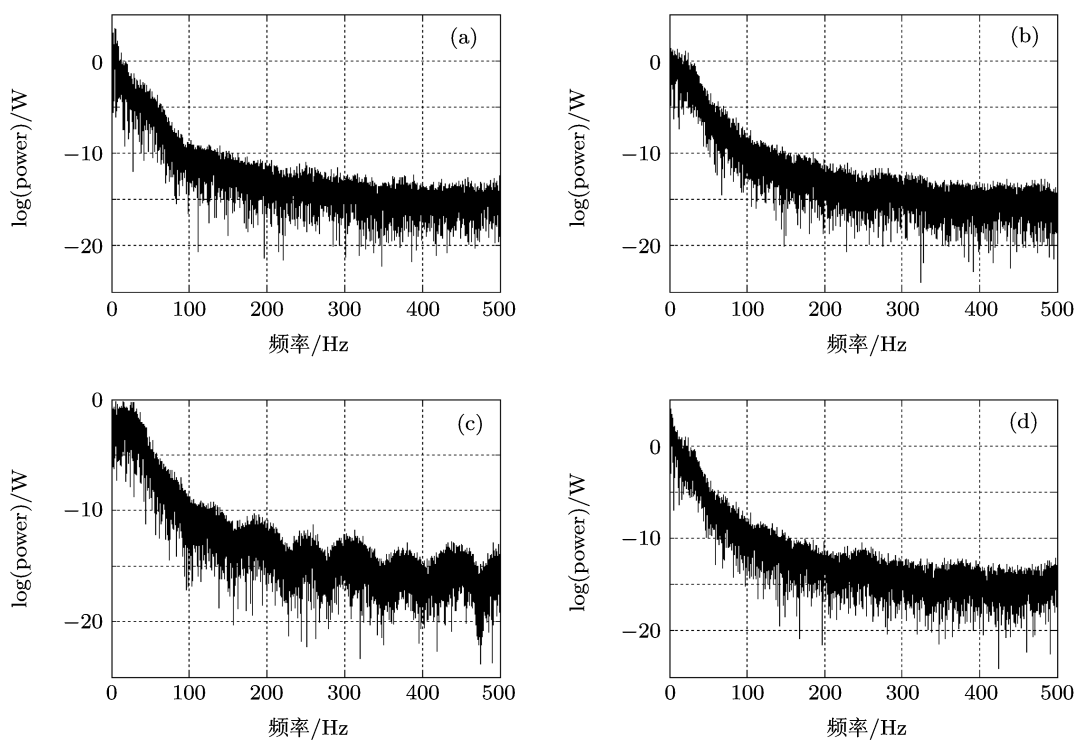


图3 频谱 (a) x ; (b) y ; (c) z ; (d) u

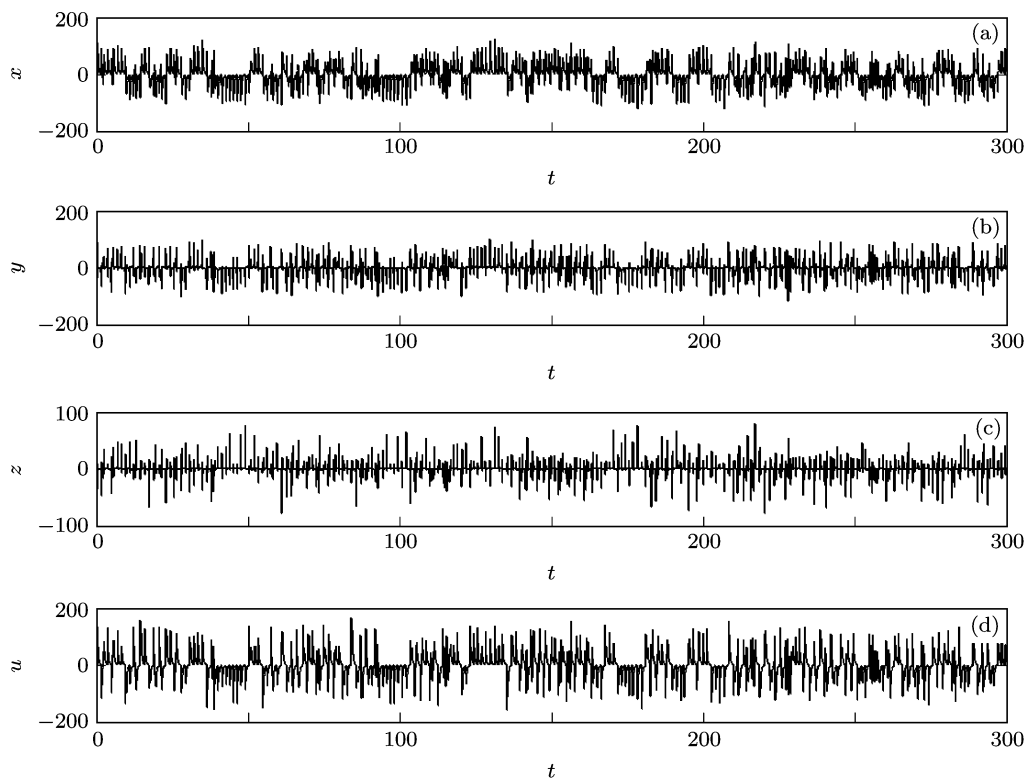


图4 时域 (a) $t-x$ 波; (b) $t-y$ 波; (c) $t-z$ 波; (d) $t-u$ 波

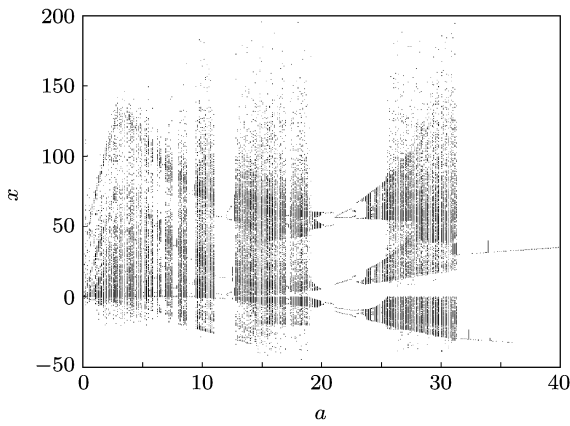


图5 随 a 变化的分岔图

可以看出体积元 V_0 在时刻 t 时收缩为体积元 $V_0 e^{-(a-c+d+e)t}$. 即意味着当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨线的每个体积元以指数率 $-a+c-d-e$ 收缩到零. 因此, 所有系统轨线最终会被限制在一个体积元为零的集合上, 且它渐进运动固定在一个吸引子上 [19].

Poincaré映射反映了混沌分岔和可折叠特性, 图2是系统(1)投影在不同平面的Poincaré映射, 可以清晰的看出存在许多折叠的枝节, 表明系统具有非常丰富的动力学. 图3是系统(1)的频谱, 可以看出存在连续的宽频带特性. 图4是时域谱, 图中表明每个变量轨线都可以轻松地穿越到反方向去, 反之亦然.

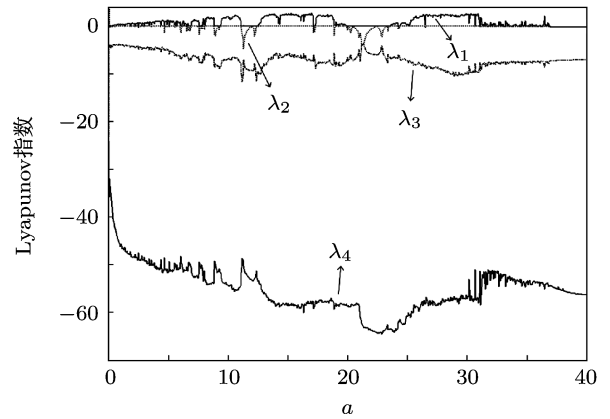


图6 随 a 变化的 Lyapunov 指数谱图

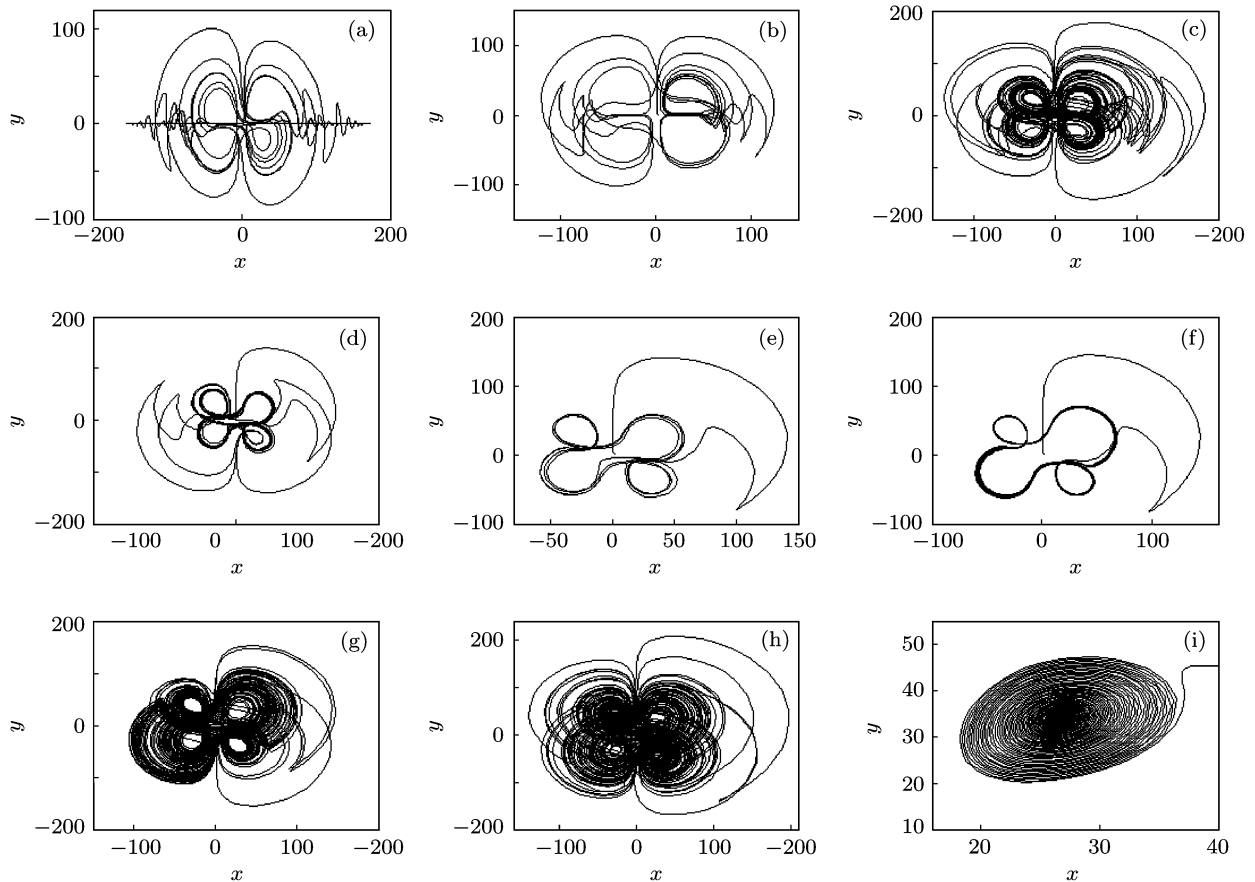


图7 $x-y$ 平面的相图 (a) $a = 0.6$; (b) $a = 11.5$; (c) $a = 18$; (d) $a = 20.8$; (e) $a = 21.5$; (f) $a = 23.5$; (g) $a = 28$; (h) $a = 35$; (i) $a = 38$

4 系统参数敏感性分析

本节通过对 Lyapunov 指数谱和分岔图进行详细分析, 讨论了系统参数对混沌行为的敏感性.

4.1 当 $b = 5, c = 12, d = 60, e = 4$ 和 a 改变时

固定其他参数, 让 a 在 $(0, 40]$ 范围内变化. 图 5 和图 6 是随着 a 变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱, 可以看出分岔图和 Lyapunov 指数谱有很好的 consistency. 当 $a \in (0, 11.1)$, 系统 (1) 处于混沌状态, 同时在混沌带内存在数个周期窗口, 如图 1 和图 7(a) 所示. 当 $a \in [11.1, 12.6]$, 系统 (1) 出现周期状态, 如图 7(b) 所示. 当 $a \in (12.6, 19]$, 系统 (1) 又出现混沌状态, 如图 7(c) 所示. 当 $a \in (19, 20.9)$, 系统 (1) 出现倒倍周期分岔, 如图 7(d) 所示. 当 $a \in [20.9, 23)$ 时, 系统 (1) 又出现周期状态, 如图 7(e) 所示. 当 $a \in [23, 23.8)$ 时, 系统 (1) 又出现倍周期分岔, 如图 7(f) 所示. 当 $a \in [23.8, 31.5)$ 时, 系统 (1) 出现新的混沌状态, 如图 7(g) 所示. 当 $a \in [31.5, 40]$ 时, 系统 (1) 出现稳定状态, 注意在稳定状态初期存在数个周期和混沌窗口, 如图 7(h),(i) 所示.

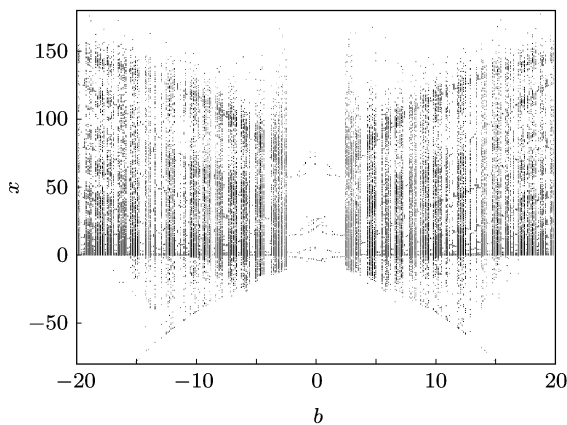


图 8 随 b 变化的分岔图

4.2 当 $a = 8, c = 12, d = 60, e = 4$ 和 b 改变时

从本小节开始, 不再给出不同参数对应的相图, 只对系统状态作出简要分析, 详细方法见上一小节. 图 8 和图 9 是随着 b 变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱, 可以看出分岔图和 Lyapunov 指数

谱有很好的 consistency, 并且分岔图和 Lyapunov 指数谱都关于 $b = 0$ 对称. 由于具有对称性, 这里只分析 $b \in [0, 20]$ 范围. 当 $b \in [0, 2.3)$ 时, 系统 (1) 出现数个倍周期分岔. 当 $b \in [2.3, 20]$ 时, 系统 (1) 处于混沌状态, 同时在整个混沌带内存在数个周期窗口.

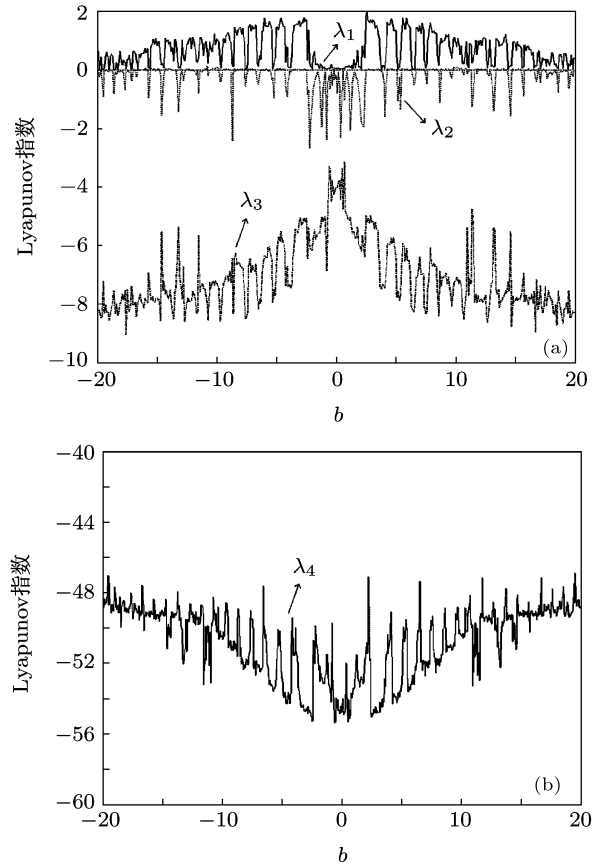


图 9 随 b 变化的 Lyapunov 指数谱图

4.3 当 $a = 8, b = 5, d = 60, e = 4$ 和 c 改变时

图 10 和图 11 是随着 c 变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱, 可以看出, 当 $c \in [0, 10.4)$ 时, 系统经历了倍周期分岔. 当 $c \in [10.4, 14.9)$ 时, 系统处于混沌状态. 当 $c \in [14.9, 15.2)$ 时, 系统处于周期状态. 当 $c \in [15.2, 31.5)$ 时, 系统处于混沌状态. 当 $c \in [31.5, 32.1)$ 时, 系统又出现了倍周期分岔. 当 $c \in [32.1, 50]$ 时, 系统又处于混沌状态.

4.4 当 $a = 8, b = 5, c = 12, e = 4$ 和 d 改变时

图 12 和图 13 是随着 d 变化的分岔图和 Lyapunov

Lyapunov 指数谱, 可以看出, 在 $d \in [16, 100]$ 范围内, 系统经历了混沌 — 倒倍周期 — 周期 — 混沌的循环历程.

4.5 当 $a = 8, b = 5, c = 12, d = 60$ 和 e 改变时

图 14 和图 15 是随着 e 变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱. 当 $e \in (0, 2.5]$ 时, 系统 (1) 经历了倍周期分岔. 当 $e \in (2.5, 11.6)$ 时, 系统 (1) 处于四翼混沌. 当 $e \in [11.6, 12.3]$ 时, 系统 (1) 处于二翼混沌. 当 $e \in (12.3, 15.3)$ 时, 系统经历了周期 1 到周期 2 到周期 4 分岔. 当 $e \in [15.3, 42.3]$ 时, 系统又处于二翼混沌. 当 $e \in (42.3, 60]$ 时, 系统处于周期状态.

同参数的影响也各不相同, 如: 随 a 变化时系统经

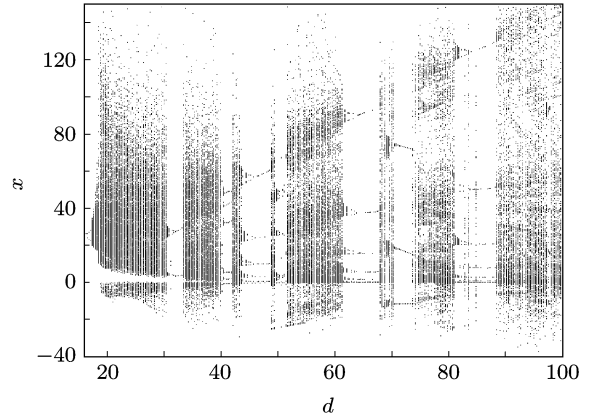


图 12 随 d 变化的分岔图

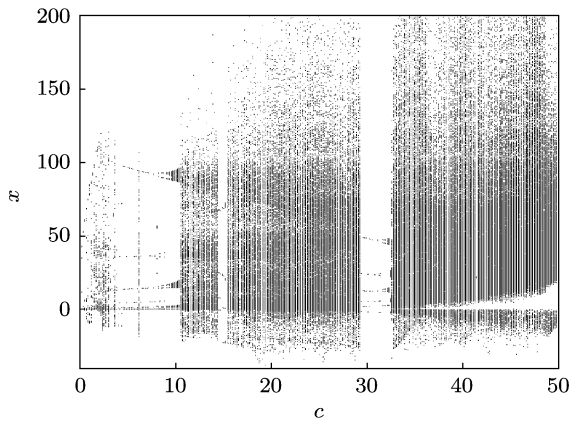


图 10 随 c 变化的分岔图

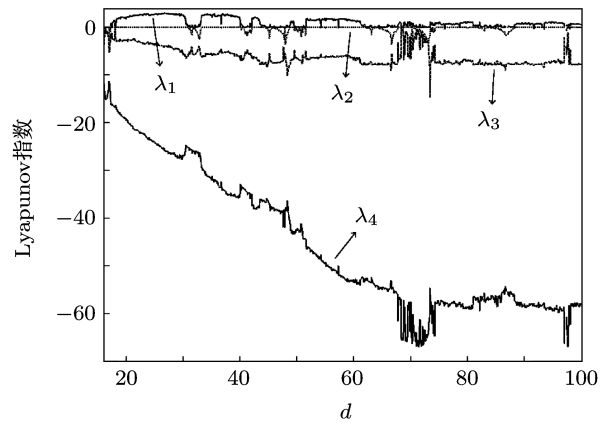


图 13 随 d 变化的 Lyapunov 指数谱图

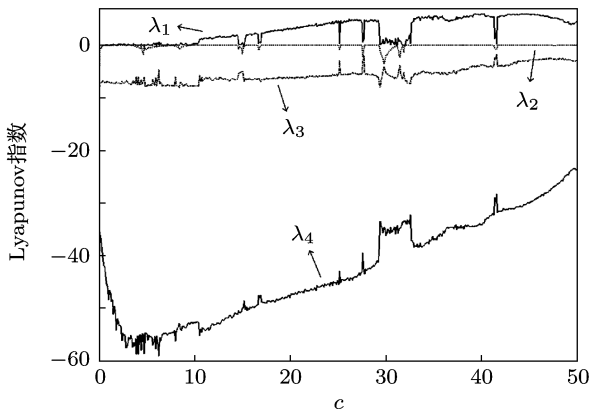


图 11 随 c 变化的 Lyapunov 指数谱图

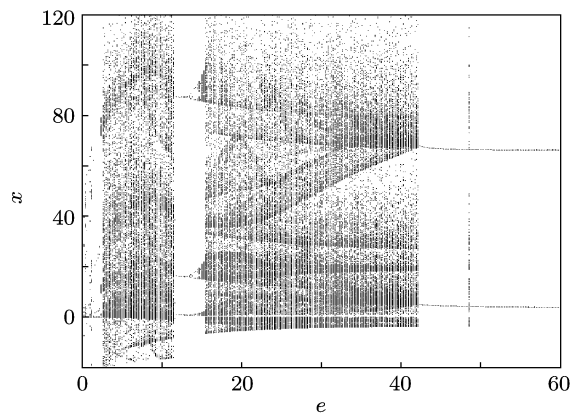


图 14 随 e 变化的分岔图

通过上面对系统随 a, b, c, d, e 变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱图详细分析可以看出, 系统参数对系统状态的变化有非常大的敏感性, 而且不

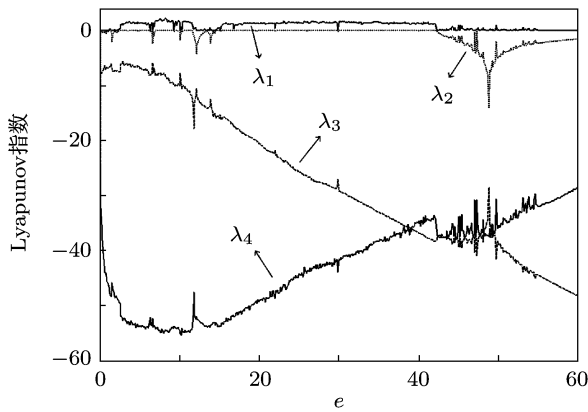


图 15 随 e 变化的 Lyapunov 指数谱图

历了倒倍周期—周期—倍周期的历程. 随 b 变化时的分岔图和 Lyapunov 指数谱关于 $b = 0$ 对称. 当 $c \in [0, 50]$ 时, 系统大范围都处在四翼混沌状态. 而当 $d \in [16, 100]$ 范围内时, 系统却经历了混沌—倒倍周期—周期—混沌的循环历程. 随 e 变化时, 系统还出现了二翼混沌状态.

5 电路设计与 EWB 仿真结果

为了验证系统 (1) 的四翼混沌行为, 设计了一个如图 16 所示的模拟电路. 该电路由集成运放

构成的积分器、反相加法器、反相器和乘法器构成, 分别实现系统 (1) 中的求导、加减、负号和乘积运算. 可以看出, 相比文献 [16] 所提出的四翼四维混沌, 本文设计的四翼四维混沌只需要三个

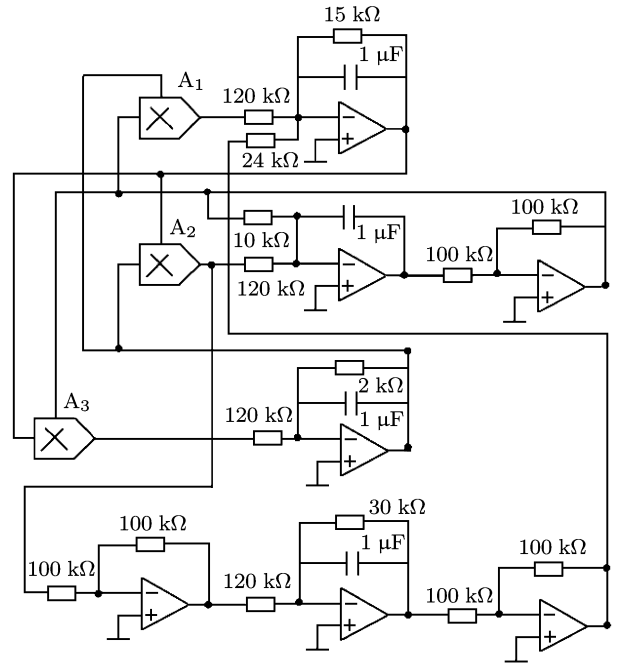


图 16 四翼四维混沌的电路图

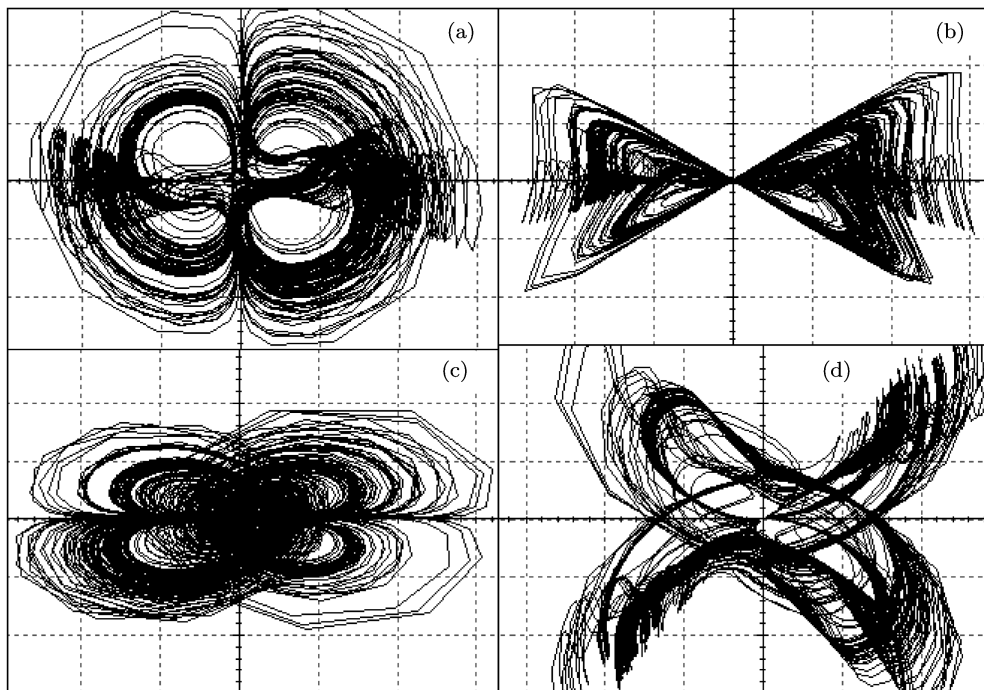


图 17 四翼混沌吸引子在相平面上的投影 (a) $x-y$ 平面; (b) $x-z$ 平面; (c) $y-z$ 平面; (d) $x-u$ 平面

乘法器, 电路结构简单, 容易实现. 在 EWB 示波器上观察到了该四翼混沌吸引子在各个相平面上的投影, 如图 17 所示. 从图 1 和图 17 看出, EWB 观察结果与数值模拟结果完全一致.

6 结论

本文研究了一个简单的四翼四维混沌系统, 该

混沌吸引子在所有方向上都能表现出四翼形式. 对一些基本的动力学特性进行了数值模拟和理论分析, 同时通过对 Lyapunov 指数谱和分岔图进行了分析, 从而详细讨论了系统参数对混沌行为的敏感性. 最后, 设计并实现了该四翼混沌系统的模拟电路. 基于多翼混沌系统在工程实践中有更好的应用前景^[12], 本文提出的四翼吸引子在保密通信和信息安全等领域有潜在的应用价值.

-
- [1] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3137 (in Chinese) [王繁珍, 齐国元, 陈增强, 袁著祉 2007 物理学报 **56** 3137]
- [2] Li Q D, Yang X S Yang F Y 2003 *Electron. Lett.* **39** 1306
- [3] Lü J, Chen G, Yu X, Leung H 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers* **51** 2476
- [4] Han F, Yu X, Wang Y, Feng Y Chen G 2003 *Electron. Lett.* **39** 1636
- [5] Lü J, Han F, Yu X, Chen G 2004 *Automatica* **40** 1677
- [6] Yu S, Tang W K S 2009 *Chaos, Soliton. and Fract.* **39** 821
- [7] Bao B C, Liu Z, Xu J P, Zhu L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1540 (in Chinese) [包伯成, 刘中, 许建平, 朱雷 2010 物理学报 **59** 1540]
- [8] Yu S, M, Lü J, Leung H, Chen G 2005 *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers* **52** 1459
- [9] Celikovskiy S, Chen G 2005 *Chaos, Soliton. and Fract.* **26** 1271
- [10] Deng B, Wang Z L, Hou C X, Yao F A 2010 *J. Univ. Jinan (Sci. and Tech.)* **24** 402 (in Chinese) [邓斌, 王忠林, 侯承玺, 姚福安 2010 济南大学学报 (自然科学版) **24** 402]
- [11] Wang Z L, Huang N 2010 *J. Ocean Univ China* **40** 131 (in Chinese) [王忠林, 黄娜 2010 中国海洋大学学报 **40** 131]
- [12] Grassi G 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3247
- [13] Grassi G, Severance F L Miller D A 2009 *Chaos, Soliton. and Fract.* **41** 284
- [14] Wang Z, Qi G, Sun Y, vanWyk B J, vanWyk M A 2010 *Nonlinear Dyn.* **60** 443
- [15] Qiao X H, Bao B C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8152 (in Chinese) [乔晓华, 包伯成 2009 物理学报 **58** 8152]
- [16] Jia H Y, Chen Z Z, Ye F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 203 (in Chinese) [贾红艳, 陈增强, 叶菲 2011 物理学报 **60** 203]
- [17] Cang S, Qi G, Chen Z 2010 *Nonlinear Dyn.* **59** 515
- [18] Qi G, vanWyk B J, vanWyk M A 2009 *Chaos, Soliton. and Fract.* **40** 2016
- [19] Liu C, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Soliton. and Fract.* **22** 1031

A 4-D chaos with fully qualified four-wing type

Yu Fei Wang Chun-Hua[†] Yin Jin-Wen Xu Hao

(College of Information Science and Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

(Received 9 May 2011; revised manuscript received 24 May 2011)

Abstract

In this paper we propose a new simple four-dimensional (4D) chaotic system by introducing a nonlinear state feedback controller. There is a fully qualified four-wing type in all directions of the chaotic attractor. With a larger positive Lyapunov exponent, some interesting and complex dynamic behaviors are obtained. Basic dynamical properties of the four-wing attractor are studied by numerical and theoretical analyses, such as dissipativity equilibria, Poincaré map, spectrum map, continuous spectrum and chaotic behaviors. The sensitivities of system parameters to the chaotic behaviors are further explored by calculating, in detail, its Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagrams. Finally, an oscillator circuit is designed for implementation. The EWB observation results are in reasonable agreement with the numerical simulation results.

Keywords: 4-D chaos, four-wing chaotic system, Poincaré map, Lyapunov exponents

PACS: 05.45.Jn, 05.45.Pq

[†] E-mail: wch1227164@sina.com