

# (3+1) 维 Burgers 系统的新孤子解及其演化\*

蒋黎红<sup>1)</sup> 马松华<sup>2)</sup> 方建平<sup>2)</sup> 吴红玉<sup>2)†</sup>

1) (丽水学院计算机与信息工程学院, 丽水 323000)

2) (丽水学院数理学院, 丽水 323000)

(2011 年 4 月 19 日收到; 2011 年 5 月 4 日收到修改稿)

在符号计算软件 Maple 的帮助下, 利用改进的投射法和变量分离法, 得到了 (3+1) 维 Burgers 系统的孤立波解. 根据得到的解, 构造出 Burgers 系统新颖的孤子结构, 研究了孤子的演化.

**关键词:** 改进的投射法, (3+1) 维 Burgers 系统, 孤子结构, 演化**PACS:** 05.45.Yv, 03.65.Ge, 03.40.Kf

## 1 引言

在物理学的众多领域中, 如流体力学, 非线性光学, 凝聚态物理等<sup>[1-5]</sup>, 现代孤子理论扮演了重要角色, 得到了广泛应用. 求解非线性偏微分方程的精确解, 探究其新的局域激发结构, 一直是非线性理论工作者研究的一项重要课题. 近年来在国际学术界研究孤子解出现了许多新的方法<sup>[6-19]</sup>. 其中最重要的方法之一就是 Lou 等人提出的多线性分离变量法, 它借助于 Bäcklund 变换和变量分离可以得到某个确定的非线性物理系统的解具有如下的通式<sup>[20-22]</sup>:

$$u = \frac{2(a_2a_1 - a_3a_0)q_y p_x}{(a_0 + a_1p + a_2q + a_3pq)^2},$$

其中  $p \equiv p(x, t)$ ,  $q \equiv q(x, t)$  为两个任意函数. 另外一种有效的方法是利用辅助方程求未知方程的投射法, 实践证明该方法是求解非线性方程非常简便的方法. 近几年, 该方法已在求解高维非线性物理系统中得到了广泛的应用<sup>[23-32]</sup>. 本文将改进的投射法和变量分离法应用于 (3+1) 维 Burgers 系统 (1), 得到了该系统的新显式精确解. 根据得到的孤波解, 构造出系统新颖的孤子结构, 研究了孤子的演化.

## 2 (3+1) 维 Burgers 系统的新精确解

(3+1) 维 Burgers 系统

$$\begin{aligned} u_t - 2uu_y - 2vu_x - 2Qu_z \\ - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, \\ u_x - v_y = 0, \quad u_z - Q_y = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

由热传导方程的逆变换得到<sup>[33,34]</sup>, 其中  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$ ,  $Q(x, y, z, t)$  为三个物理场函数. 当  $z = x$ ,  $Q = u$  时, 方程退化为 (2+1) 维 Burgers 方程; 当  $x = y = z$ ,  $Q = u = v$  时, 方程退化为 (1+1) 维 Burgers 方程. 文献 [19] 运用多线性分离变量法得到了 (3+1) 维 Burgers 系统的多线性分离变量解, 文献 [32] 运用 Riccati 方程映射法得到了 (3+1) 维 Burgers 系统的孤立波解、周期波解和有理函数解.

改进的投射法的基本思想: 对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \dots) = 0, \quad (2)$$

设它有如下形式的解:

$$\begin{aligned} u = A(x) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \phi^i(q(x)) \\ + C_i(x) \phi^{i-1}(q(x)) \sqrt{\sigma \phi + \phi^2(q(x))}, \end{aligned} \quad (3)$$

\* 浙江省自然科学基金 (批准号: Y6100257, Y6110140), 浙江丽水学院自然科学基金 (批准号: KZ09005) 资助的课题.

† E-mail: why160@126.com.cn

其中  $\phi$  满足

$$\phi' = \sigma\phi + \phi^2, \quad (4)$$

这里  $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $A(x)$ ,  $B_i(x)$ ,  $C_i(x)$  和  $q(x)$  为待定的  $x$  的任意函数. 将 (3) 和 (4) 式代入 (2) 式就可以得到一组  $A(x)$ ,  $B_i(x)$ ,  $C_i(x)$  和  $q(x)$  的约束方程. 通过约束方程求得变量  $A(x)$ ,  $B_i(x)$ ,  $C_i(x)$  和  $q(x)$ , 再根据投射方程 (4) 如下形式的通解就可以确定所求方程的解:

$$\phi = \frac{-\sigma e^{\sigma q + c\sigma}}{e^{\sigma q + c\sigma} - 1}, \quad \sigma \neq 0. \quad (5)$$

对 (5) 式进行适当变换, 可以得到如下的孤立波解:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sigma[1 + \tanh(\frac{1}{2}\sigma q)], & \sigma \neq 0, \\ -\frac{1}{2}\sigma[1 + \coth(\frac{1}{2}\sigma q)], & \sigma \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

为了寻找 (3+1) 维 Burgers 系统的新解, 我们将变系数的投射方程法用于 (1) 式, 并根据 (3) 式, 设解为

$$\begin{aligned} u &= f(x, y, z, t) + g(x, y, z, t)\phi(q(x, y, z, t)) \\ &\quad + h(x, y, z, t)\sqrt{\sigma\phi + \phi^2}, \\ v &= F(x, y, z, t) + G(x, y, z, t)\phi(q(x, y, z, t)) \end{aligned}$$

$$+ H(x, y, z, t)\sqrt{\sigma\phi + \phi^2},$$

$$\begin{aligned} Q &= a(x, y, z, t) + b(x, y, z, t)\phi(q(x, y, z, t)) \\ &\quad + c(x, y, z, t)\sqrt{\sigma\phi + \phi^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

这里,  $f, g, h, F, G, H, a, b, c$  和  $q$  是  $(x, y, z, t)$  的任意函数, 将 (7) 式和 (4) 式代入 (1) 式, 并按  $\phi$  的同次幂合并, 提取  $\phi^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) 前的系数, 令其等于零, 得到一系列方程, 由这些方程可求得:

$$f = 0, \quad g = -\frac{1}{2}q_y, \quad h = \frac{1}{2}q_y, \quad G = -\frac{1}{2}q_x,$$

$$H = \frac{1}{2}q_x, \quad a = 0, \quad b = -\frac{1}{2}q_z, \quad c = \frac{1}{2}q_z,$$

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{4} \left( \frac{q_y^2\sigma + q_x^2\sigma + q_z^2\sigma + 2q_{yy}}{q_x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2q_{zz} + 2q_{xx} - 2q_t}{q_x} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

从所得到的方程中, 发现有如下变量分离形式的特解:

$$q = \chi(x, z, t) + \varphi(y), \quad \varphi(y) = ky \quad (9)$$

其中  $\chi \equiv \chi(x, z, t)$  是关于  $x, z, t$  的任意函数,  $k$  是任意常数.

设  $\sigma \neq 0$ , 可以得到 (3+1) 维 Burgers 系统如下的孤波解:

$$u_1 = \frac{1}{4}\varphi_y\sigma\{1 + \tanh(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)) + \sqrt{\tanh(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi))^2 - 1}\}, \quad (10)$$

$$Q_1 = \frac{1}{4}\chi_z\sigma\{1 + \tanh(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)) + \sqrt{\tanh(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi))^2 - 1}\}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{4} \frac{-\varphi_y^2\sigma - 2\varphi_{yy} - 2\chi_{zz} - \chi_z^2\sigma - 2\chi_{xx} + 2\chi_t}{\chi_x} \\ &\quad + \frac{1}{4}\chi_x\sigma\{\tanh(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)) + \sqrt{\tanh(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi))^2 - 1}\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$u_2 = \frac{1}{4}\varphi_y\sigma\{1 + \coth(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)) + \sqrt{\coth(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi))^2 - 1}\}, \quad (13)$$

$$Q_2 = \frac{1}{4}\chi_z\sigma\{1 + \coth(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)) + \sqrt{\coth(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi))^2 - 1}\}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{4} \frac{-\varphi_y^2\sigma - 2\varphi_{yy} - 2\chi_{zz} - \chi_z^2\sigma - 2\chi_{xx} + 2\chi_t}{\chi_x} \\ &\quad + \frac{1}{4}\chi_x\sigma\{\coth(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)) + \sqrt{\coth(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi))^2 - 1}\}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\chi(x, z, t)$  为所示变量的任意函数,  $\varphi(y) = ky$ .

$$\varphi = ky, \tag{17}$$

### 3 (3+1) 维 Burgers 系统的局域结构

由于 (10)—(15) 式中都包含有任意函数  $\chi(x, z, t)$ , 使该系统的局域解非常丰富. 本文仅以孤波解 (13) 式为例, 研究系统新颖的孤子结构及其演化. 为图示坐标清楚和方便起见, 令

$$U = u_2 = \frac{1}{4}\varphi_y\sigma\left\{1 + \coth\left(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right) + \sqrt{\coth^2\left(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right) - 1}\right\}. \tag{16}$$

#### 3.1 暗孤子和内嵌孤子

由于 (16) 式中的  $\chi(x, z, t)$  和  $\varphi(y) = ky$  的任意性, 不妨取  $\chi(x, z, t)$  和  $\varphi(y) = ky$  为如下形式:

$$\chi = \text{sech}(x^2 + z^2 + t^2),$$

于是可以得到一个暗孤子结构, 如图 1(a) 所示, 取  $k = 1, y = 0.1, \sigma = 1, t = 0$ .

如果取  $\chi(x, z, t)$  和  $\varphi(y) = ky$  为如下形式:

$$\chi = \frac{1}{\text{sech}(-x^2 - z^2 - t)}, \quad \varphi = ky, \tag{18}$$

可以得到一个内嵌孤子结构, 如图 1(b) 所示, 取  $k = 1, y = 0.3, \sigma = 1, t = -3$ .

此外, 如果取  $\chi(x, z, t)$  和  $\varphi(y) = ky$  为如下形式:

$$\chi = \text{sech}(-x^2 - z^2 - t) \sin(-x^2 - z^2), \quad \varphi = ky, \tag{19}$$

可以得到另一种形式的内嵌孤子结构, 如图 1(c) 所示, 取  $k = 1, y = 0.3, \sigma = 1, t = -4.5$ .

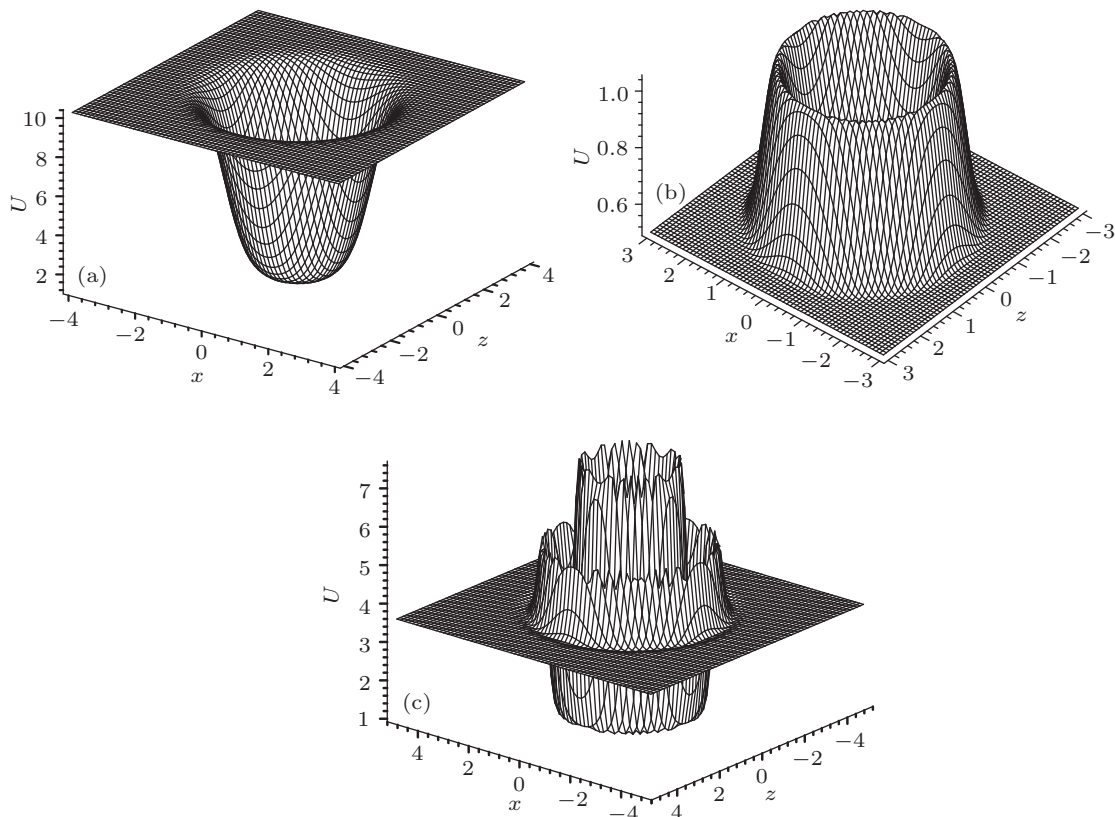


图1 (16) 式利用 (17) 式, (18) 式, (19) 式得到的三种孤子解

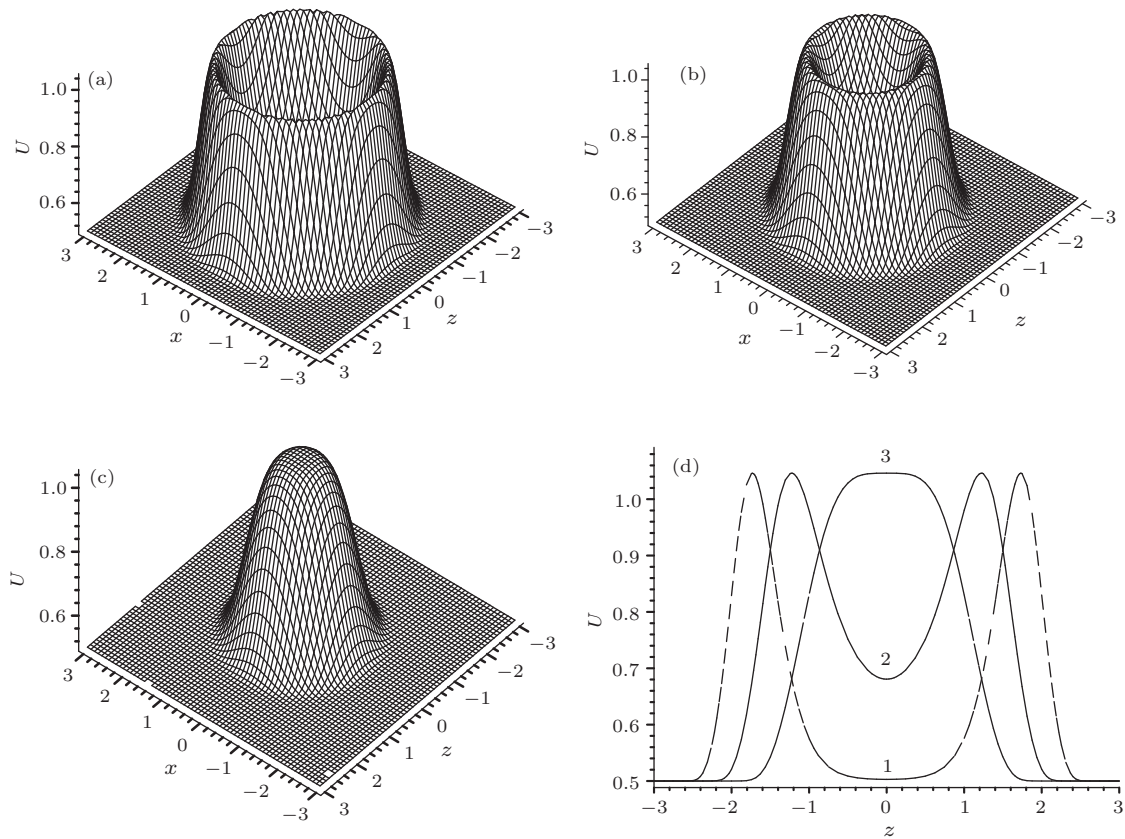


图 2 (16) 式利用 (18) 式得到的内嵌孤子时间演化 (a)  $t = -3$ ; (b)  $t = -1.5$ ;  $t = 0$ ; (d) 是对应上述不同时间的截面图 (取  $x = 0$ )

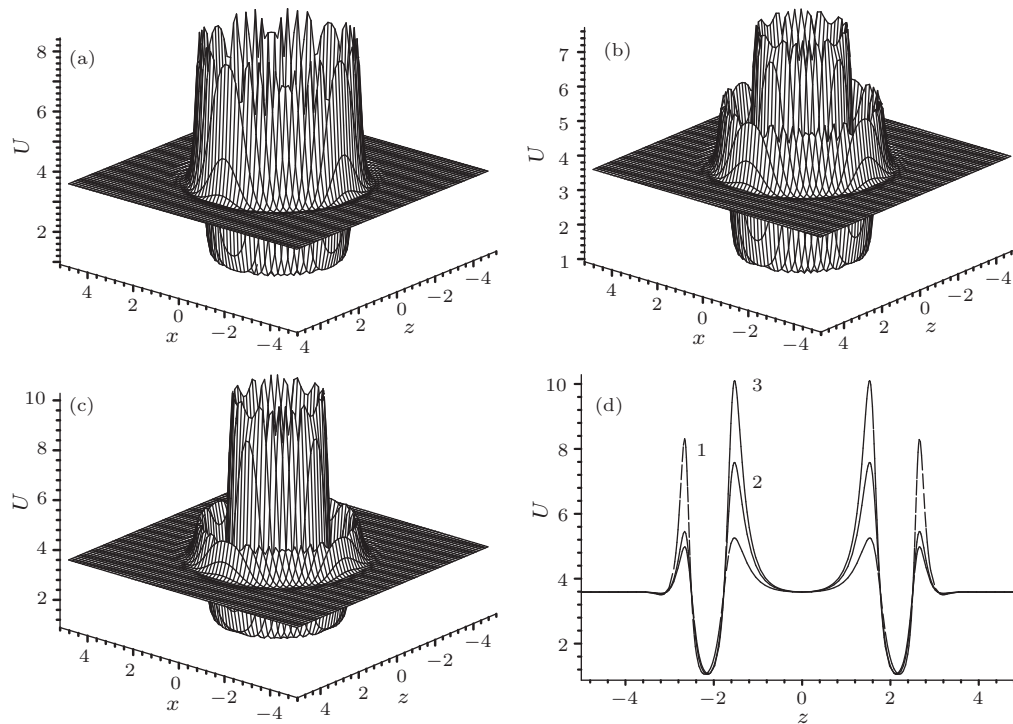


图 3 (16) 式利用 (19) 式得到的内嵌孤子时间演化 (a)  $t = -5$ ; (b)  $t = -4.5$ ; (c)  $t = -4.3$ ; (d) 是对应上述不同时间的截面图 (取  $x = 0$ )

### 3.2 孤子的演化

在 (16) 式中,  $\chi(x, z, t)$  的选择与 (19) 式相同, 于是可以得到一个内嵌孤子的时间演化图, 如图 2 所示, 取  $k = 1, y = 0.3, \sigma = 1$ , 图 2(a)—(c) 的时间分别为  $t = -3, t = -1.5, t = 0$ . 图 2(d) 给出了以上三个时刻的孤子截面图 (取  $x = 0$ ). 从图 2 可以清楚看到, 孤子的形状随时间改变, 但是在  $x, z$  方向并没有移动, 即该孤子不是传播孤子.

在 (16) 式中, 如果  $\chi(x, z, t)$  的选择与 (19) 式相同, 于是可以得到图 3 所示的另一个内嵌孤子的时间演化图, 取  $k = 1, y = 0.3, \sigma = 1$ , 图 3(a)—(c)

的时间分别为  $t = -5, t = -4.5, t = -4.3$ . 图 3(d) 是以上三个时刻的孤子截面图 (取  $x = 0$ ). 从图 3 可以看到, 孤子的形状也随时间发生变化.

上面研究了孤子的形状随时间的改变. 实际上其他参数的改变, 例如  $\sigma, k$  的变化也会引起孤子图像的改变. 在 (16) 式中,  $\chi(x, z, t)$  和  $\varphi(y) = ky$  的选择与 (17) 式相同, 取  $y = 0.1, \sigma = 1, t = 0$ , 当  $k$  取不同值时, 得到如图 4 所示的孤子图像, 图 4(a)—(c) 分别为  $k = 10, 5, 1$ . 可以看到,  $k$  值的变化会引起孤子图像的改变. 图 4(d) 是不同  $k$  值对应的孤子截面图 (取  $x = 0$ ).

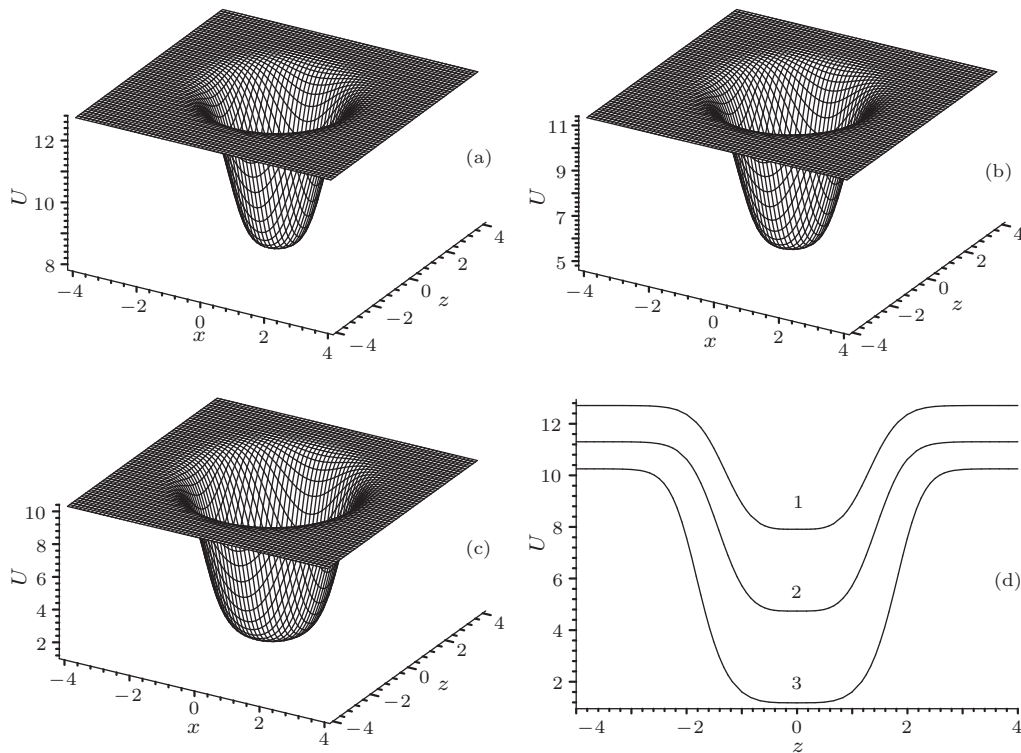


图 4 (16) 式利用 (17) 式得到的  $k$  取不同值时的暗孤子图像 (a)  $k = 10$ ; (b)  $k = 5$ ; (c)  $k = 1$ ; (d) 是对应上述不同  $k$  值的截面图 (取  $x = 0$ )

### 4 结论

利用已知方程的解求未知方程解的投射方法, 是一种求解非线性偏微分方程非常有效和简便的方法. 过去, 人们利用 Riccati 辅助方程求得了诸多高维非线性偏微分方程的精确解. 在此基础上, 本文利用另一种形式的投射方程和带根号项的设解并结合变量分离法研究 (3+1) 维 Burgers 系统, 得到了该系统的孤立波解. 根据所求得的解 (13) 式, 构造出该系统三种新颖的局域

孤子结构. 孤子的种类是多样的, 孤子随时间变化的形态也是多样的, 一般的孤子都是随时间作匀速直线运动, 其形状大小保持不变, 称为“传播孤子”. 本文得到的孤子解 (图 2, 图 3) 在  $x, z$  方向不随时间运动, 即这两种孤子不是传播孤子, 但是孤子的形状会随时间改变. 此外, 研究发现, 其他参数的改变, 例如  $\sigma, k$  的变化也会引起孤子图像的改变 (图 4). 探求求解非线性偏微分方程的新方法, 构造新的局域激发结构是非线性理论工作者长期研究的课题.

- [1] Camassa R, Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
- [2] Kivshar Y S, Melonmend B A 1989 *Rev. Mod. Phys.* **61** 765
- [3] Kadomtsev B B, Petviashvili V I 1970 *Sov. Phys. Dokl.* **15** 539
- [4] Davey A, Stewartson K 1974 *Proc. Roy. Soc.* **338** 17
- [5] Camassa R, Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
- [6] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027
- [7] Zhang J F, Huang W H, Zheng C L 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 2676(in Chinese) [张解放, 黄文华, 郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]
- [8] Zhang D J 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **18** 31
- [9] Zhang D J 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 1333
- [10] Zhang S L, Zhu X N, Wang Y M and Lou S Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 829
- [11] Zhang S L, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 385
- [12] Lou S Y 1999 *Science (in China)* **42** 537
- [13] Zheng C L, Fang J P, Chen L Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1468(in Chinese) [郑春龙, 方建平, 陈立群 2005 物理学报 **54** 1468]
- [14] Lou S Y 1995 *J. Phys. Math. Gen A* **28** 7227
- [15] Ruan H Y, Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123
- [16] Ma Z Y, Zhu J M, Zheng C L 2004 *Chin. Phys.* **13** 1382
- [17] Zhang J F, Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655
- [18] Lou S Y 1996 *Commun. Theor.* **26** 487
- [19] Huang L, Sun J A, Dou F Q, Duan W S, Liu X X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 0611(in Chinese) [黄磊, 孙建安, 豆福全, 段文山, 刘兴霞 2007 物理学报 **56** 0611]
- [20] Lou S Y 2000 *Phys. Lett. A* **277** 94
- [21] Tang X Y, Liang Z F 2006 *Phys. Lett. A* **351** 398
- [22] Ying J P, Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1448
- [23] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 203
- [24] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2006 *Z. Naturforsch.* **61a** 249
- [25] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 0620 (in Chinese)[马松华, 强继业, 方建平 2007 物理学报 **56** 0620 ]
- [26] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **14** 670
- [27] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese)[方建平, 郑春龙, 朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]
- [28] Ma S H, Fang J P, Hong B H, Zheng C L 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **40** 1352
- [29] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2767
- [30] Ma S H, Fang J P, Ren Q B 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 4420 (in Chinese) [马松华, 方建平, 任清褒 2010 物理学报 **59** 4420]
- [31] Yang Z, Ma S H, Fang J P 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040301
- [32] Zhu H P, Zheng C L, Fang J P 2006 *Commun. Theor. Phys.* **45** 127
- [33] Dai C Q, Yan C J, Zhang J F 2006 *Commun. Theor. Phys.* **46** 389
- [34] Kong F L, Chen S D 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 495

# New soliton solutions and soliton evolvments for the (3+1)-dimensional Burgers system\*

Jiang Li-Hong<sup>1)</sup> Ma Song-Hua<sup>2)</sup> Fang Jian-Ping<sup>2)</sup> Wu Hong-Yu<sup>2)†</sup>

1) ( College of Computer and Information Engineering, Lishui University, Lishui 323000, China )

2) ( College of Mathematics and Physics, Lishui University, Lishui 323000, China )

( Received 19 April 2011; revised manuscript received 4 May 2011 )

## Abstract

With the help of the symbolic computation system Maple and the improved projective method and variable separation method, a new family of solitary wave solutions for (3+1)-dimensional Burgers system is derived. Based on the derived solution, some novel soliton structures and soliton evolvments are investigated.

**Keywords:** improved projective method, (3+1)-dimensional Burgers system, soliton structures, evolvments

**PACS:** 05.45.Yv, 03.65.Ge, 03.40.Kf

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China(Grant Nos. Y6100257, Y6110140), and the Natural Science Foundation of Lishui University (Grant No. KZ09005).

† E-mail: why160@126.com.cn