

# 分形基底上刻蚀模型动力学标度行为的数值模拟研究\*

张永伟 唐刚<sup>†</sup> 韩奎 寻之朋 谢裕颖 李炎

(中国矿业大学理学院物理系, 徐州 221116)

(2011年7月8日收到; 2011年8月26日收到修改稿)

为探讨分形基底结构对生长表面标度行为的影响, 本文采用 Kinetic Monte Carlo(KMC) 方法模拟了刻蚀模型 (etching model) 在谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上刻蚀表面的动力学行为. 研究表明, 在两种分形基底上的刻蚀模型都表现出很好的动力学标度行为, 并且满足 Family-Vicsek 标度规律. 虽然谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底的分形维数相同, 但模拟得到的标度指数却不同, 并且粗糙度指数  $\alpha$  与动力学指数  $z$  也不满足在欧几里得基底上成立的标度关系  $\alpha + z = 2$ . 由此可以看出, 标度指数不仅与基底的分形维数有关, 而且和分形基底的具体结构有关.

**关键词:** 刻蚀模型, 分形基底, 动力学标度行为

**PACS:** 05. 40. -a, 02. 50. -r, 64. 60. Ht

## 1 引言

表面界面粗化在科学技术领域及自然现象中广泛存在, 对其进行深入研究具有重要的理论价值与实际意义, 能够丰富非平衡统计理论并加深人们对材料实际生长过程的理解. 基于连续生长方程和微观离散模型, 近年来人们对非平衡状态下表面界面粗糙化动力学现象进行了广泛的理论研究<sup>[1-6]</sup>.

研究发现, 在许多粗化生长过程中, 粗化表面和界面都能够形成自仿射的分形结构, 满足 Family-Vicsek 动力学标度规律<sup>[7]</sup>, 并具有标度变换不变性<sup>[1,2,8]</sup>. 在动力学标度理论中, 粗化表面界面的形态及动力学性质通常可以用总的表面宽度 (即表面粗糙度) 来描述, 表面宽度定义为

$$W(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L^d} \sum_{i=1}^{L^d} [h(i, t) - \langle h(t) \rangle]^2}, \quad (1)$$

其中,  $L$  表示基底的横向尺寸 (或生长系统的横向尺寸),  $d$  为基底的维数,  $h(i, t)$  表示  $t$  时刻在基底  $i$  点处的表面高度,  $\langle h(t) \rangle$  表示  $t$  时刻表面高度的平均值. 在基底宽度为  $L$  的有限系统中, Family 和 Vicsek<sup>[7]</sup> 指出, 具有自仿射分形结构的粗糙表面, 其整体表面宽度  $W(L, t)$  满足如下的动力

学标度规律:

$$W(L, t) = L^\alpha f(t/L^z), \quad (2)$$

其中, 标度函数  $f(u)$  具有渐近行为: 当  $u \ll 1$  时,  $f(u) \propto u^\beta$ ; 当  $u \gg 1$  时,  $f(u)$  趋于常数. 式中  $\beta = \alpha/z$  为系统的生长指数, 表示表面初始生长阶段的动力学性质;  $\alpha$  和  $z$  分别是表面的粗糙度指数与动力学指数, 它们能够较好地表示出粗糙表面在长生长时间及大系统尺寸极限下的渐近行为, 并常用来决定粗糙表面所属的普适类. 常见的动力学方程有 Edwards-Wilkinson(EW)<sup>[9]</sup>、Kardar-Parisi-Zhang (KPZ)<sup>[10]</sup> 等, 这些方程能够很好地描述相应的普适类<sup>[7]</sup>. 研究发现, 抛射沉积 (ballistic deposition, BD) 模型<sup>[11]</sup>、Eden 模型<sup>[12]</sup>、受限固-固 (restricted solid-on-solid, RSOS) 模型<sup>[13]</sup> 等离散生长模型在欧几里得基底上属于由 KPZ 方程描述的普适类. 相应的 KPZ 方程可以表示为如下的非线性动力学方程:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

式中  $\nu$  表示表面的张力系数, 方程右边的非线性项表示表面沿侧向的生长, 系数  $\lambda$  正比于表面的生长速度,  $\eta(\mathbf{r}, t)$  为高斯噪声项, 用来表示生长过程

\* 国家自然科学基金 (批准号:10674177) 和中国矿业大学理科专项基金 (批准号:2010LKWL01-CUMT) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: gangtang@cumt.edu.cn

的随机性. 研究发现, 在整数维情况下 KPZ 方程满足 Galilean 不变性, 使得粗糙度指数  $\alpha$  和动力学指数  $z$  满足标度关系  $\alpha + z = 2$ , 且该关系与系统的维数无关<sup>[1,14]</sup>.

在欧几里得空间基底 (整数维基底) 中表面界面粗化行为的研究基础上, 最近人们开始关注分形基底上表面界面生长的动力学标度行为. 研究表明, 基底的分数特性会影响表面界面动力学过程的幂律行为<sup>[15-17]</sup>. 因此, 分形基底上粗化表面的自仿射标度性质、标准的 Family-Vicsek 动力学标度规律, 以及相关的连续性动力学方程描述等成为人们广泛关注的研究领域<sup>[18-20]</sup>.

Lee 与 Kim<sup>[18]</sup> 研究了谢尔宾斯基垫片和棋盘分形等多种分形基底上平衡受限固-固 (equilibrium restricted solid-on-solid, ERSOS) 模型的粗化表面, 发现在欧几里得空间内成立的线性 EW 方程并不能直接用来描述分形基底上的生长过程. 他们提出用分形基底上随机游走的奇异扩散项  $\nabla^{z_{RW}} h$  替代原来 EW 方程中的拉普拉斯项  $\nabla^2 h$ , 从而得到了分数阶的 EW 方程<sup>[18]</sup>:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^{z_{RW}} h + \eta(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

方程的  $z_{RW}$  表示分形基底上随机游走的动力学指数. Lee 与 Kim 的模拟结果表明, 分形基底上的平衡受限固-固模型仍满足 Family-Vicsek 标度规律, 得到的标度指数与应用标度分析方法对分数阶 EW 方程进行分析所得到的结果符合得很好, 并且满足标度关系  $2\alpha + d_f = z$ . 此外, 谢尔宾斯基垫片和棋盘分形基底上表面弛豫随机沉积 (random deposition with relaxation) 模型<sup>[19]</sup> 的标度指数与分数阶 EW 方程的理论结果也相符合, 这说明分数阶 EW 方程也具有一定的普适性.

Horowitz 等人<sup>[20]</sup> 在试图用标准的 Family-Vicsek 标度规律来分析确定分形基底上抛射沉积模型的标度规律时发现, 所得数据与 Family-Vicsek 标度规律存在明显的偏差, Tang 等人<sup>[21]</sup> 认为这种偏差是由于抛射沉积模型的有限尺寸效应造成的. Lee 等人<sup>[22]</sup> 在研究具有相同分形维数基底上的受限固-固模型时发现, 分形基底上的生长表面比相应维数欧几里得基底上的更加粗糙, 且在不同分形基底上的标度指数也不相同. 在文献<sup>[22]</sup>中所采用的基底虽然是分形结构, 但其分形维数  $d_f = 2$  却是整数. Huynh 等人<sup>[23]</sup> 在研究 Abelian Manna 模型时引入了谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底, 这两个分形基底具有相同的分形维数  $d_f \approx 1.585$ , 但却有不同的分形结构. 为更深入的了解分形基底结构对

粗糙表面动力学标度行为的影响, 本文将研究刻蚀模型在这两个具有相同非整数维数的谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上的动力学标度行为.

刻蚀模型<sup>[24]</sup> 是 KPZ 普适类中一个非常重要的离散模型, 其描述了在腐蚀过程或解吸附过程中界面的动力学行为. 本文采用 Kinetic Monte Carlo 模拟的方法, 研究了谢尔宾斯基箭头和蟹状分形这两种具体结构不同的分形基底上刻蚀模型粗糙表面的动力学标度行为. 通过对整体表面宽度标度行为的计算分析, 发现分形基底上的刻蚀模型表现出很好的标度行为, Family-Vicsek 动力学标度规律仍然能够用来描述分形基底上刻蚀模型的生长过程. 但由于基底上被占据格点的配位数分布不均匀, 尽管基底的分数维数相同, 这两种分形结构上的标度指数仍然存在差异, 表明标度指数不仅和基底的维数有关, 而且和基底的具体结构有关. 分析还发现, 两个分形基底上粗糙表面的粗糙度指数与动力学指数均不满足在欧几里得空间成立的标度关系  $\alpha + z = 2$ , 分形基底上的刻蚀模型也不再满足原来的 KPZ 方程.

## 2 分形基底及刻蚀模型

### 2.1 谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底

图 1 与图 2 给出的是经四次迭代而生成的谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底, 这两种典型的分形结构都是从弧分形系统中演化而来<sup>[25]</sup>. 格点定义为正六边形的顶点, 生长在分形基底的格点上. 相应地, 高度变量也在基底的格点上定义. 本文考虑最近邻点之间的相互作用, 这里的最近邻指的是几何距离. 这两个分形基底没有自然边界, 它们只有两个端点, 通过这两个端点可以将三个第  $i$  次迭代产生的分形晶格按照生成元的结构连在一起形成第  $i + 1$  次迭代的晶格.

谢尔宾斯基箭头与蟹状分形基底具有相同的分形维数  $d_f = \ln 3 / \ln 2 \approx 1.585$ <sup>[23]</sup>, 且经过  $i$  次迭代后基底总的格点数均为  $N_i = 3^i + 1$ . 由于生成元不同, 这两种分形基底的具体结构存在较大的差异. 每个格点的最近邻点数取决于该点的位置, 除边界点外基底上每个点都有两个或三个最近邻点 (或配位数), 其中配位数为 3 的点大致占了 1/3. 与欧几里得空间的晶格相比, 在分形晶格上由于两点之间的连接受到了限制, 使得这两个分形结构的连接路径看起来像一维线性链. 这里采用化学距离的概念<sup>[26]</sup>, 即分形基底上两点之间沿连接路径的最短

距离, 通常大于几何距离. 对于配位数为三的点而言, 虽然其三个最近邻点到该点的几何距离相同, 但其化学距离却不相等.

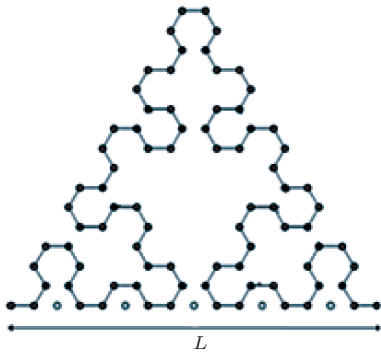


图 1 经四次迭代生成的谢尔宾斯基箭头分形基底, 基底尺寸  $L = 17$

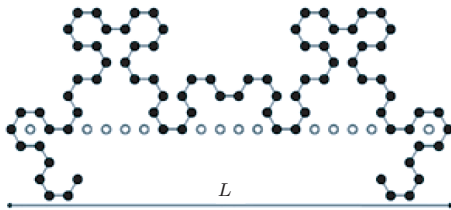


图 2 经四次迭代生成的蟹状分形基底, 基底尺寸  $L = 24$

图 1 和图 2 中的圆圈并不属于分形基底, 而是为确定基底尺寸 (或系统尺寸) 而设置的参考点. 由于在  $L$  方向上每两个点之间的距离是相等的, 基底尺寸定义为  $L$  方向上黑点和圆圈的总和. 根据定义, 对于谢尔宾斯基箭头, 经  $i$  次迭代后系统尺寸  $L_i = 2^i + 1$ , 而蟹状分形基底经  $i$  次迭代后的尺寸为  $L_i = 3 \times 2^{i-1}$ .

## 2.2 刻蚀模型

刻蚀模型最初是由 Mello 等人 [24] 为模拟液体对晶体的溶蚀而提出的. 一维情况下的数值模拟结果显示, 这个模型具有非常好的标度性质, 并且属于用 KPZ 方程描述的普适类. 刻蚀模型提出以来, 众多学者对其进行了广泛深入的研究 [21,27,28]. 刻蚀模型常被用来描述表面的腐蚀过程或解吸附过程, 但其生长规则是通过与之相反的生长过程来定义的, 如图 3 所示. 欧几里得空间基底上刻蚀模型的生长规则可以描述为

- 1) 在离散的时间  $t$  随机地选取一个点  $i = 1, 2, \dots, N_i$ ;
- 2)  $h_i(t+1) = h_i(t) + 1$ ;

- 3) 如果  $h_{i-1}(t) < h_i(t)$ , 那么执行  $h_{i-1}(t+1) = h_i(t)$ ;
- 4) 如果  $h_{i+1}(t) < h_i(t)$ , 那么执行  $h_{i+1}(t+1) = h_i(t)$ .

本文模拟的表面生长过程是在分形基底上进行的, 因此, 只有满足上面讨论的欧几里得空间基底上的生长规则, 粒子才随机地沉积到分形基底相应的格点位置上. 本文采用非周期边界条件, 在模拟谢尔宾斯基箭头与蟹状分形基底上刻蚀模型生长表面的动力学标度行为时, 选取了迭代次数  $i = 5, 6, 7, 8, 9$  的基底, 即对于谢尔宾斯基箭头基底系统尺寸  $L = 33, 65, 129, 257, 513$ , 对于蟹状分形基底系统尺寸  $L = 48, 96, 192, 384, 768$ . 在数值模拟中, 最小尺寸基底上的沉积时间大于  $4 \times 10^3$ , 统计平均的次数为  $5 \times 10^4$ ; 最大尺寸基底上的沉积时间大于  $5 \times 10^5$ , 统计平均的次数为  $2 \times 10^3$ .

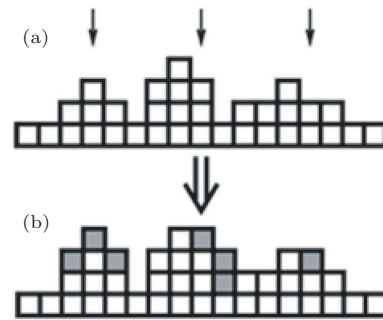


图 3 1+1 维情况下刻蚀模型生长规则的示意图

## 3 数值模拟结果

### 3.1 谢尔宾斯基箭头基底上刻蚀模型的动力学标度行为

图 4 给出了迭代次数  $i = 5-9$  (即基底尺寸  $L = 33, 65, 129, 257, 513$ ) 的谢尔宾斯基箭头基底上刻蚀模型表面宽度  $W(L, t)$  随生长时间  $t$  的双对数变化关系. 由该图可以看出, 生长过程大体上可以分为 3 个阶段: 初始阶段, 即  $t < 3$  区域, 粒子沉积后生长表面的横向之间是相互独立的, 还没有形成关联, 表面宽度的值只与生长时间有关而与系统的尺寸无关. 这个阶段遵循随机沉积的规则, 生长指数  $\beta$  为  $1/2$ . 中间阶段, 即  $3 < t < t_x$ , 在这个区域刻蚀规则在沉积过程中起关键性作用, 生长表面的横向关联显现出来并且逐渐地增强, 表面宽度与生长时间满足幂律关系  $W(L, t) \propto t^\beta$ . 第三阶段为饱和稳定阶段. 在

饱和区域, 即  $t > t_x$ , 表面的关联长度达到系统尺寸  $L$ , 这时由于系统尺寸的限制横向关联不再演化, 表面宽度达到饱和, 饱和宽度  $W_{\text{sat}}(L)$  与系统尺寸  $L$  满足幂律关系  $W_{\text{sat}}(L) \propto L^\alpha$ . 上述  $t_x$  称为系统的特征时间, 即表面宽度从生长区域到饱和区域的渡越时间, 与系统尺寸  $L$  之间满足标度关系  $t_x \propto L^z$ . 为获得分形基底上刻蚀模型生长表面的动力学标度指数, 我们采用文献中最常用的标准处理方法 [7]. 在  $3 < t < t_x$  区域对最大尺寸基底 (基底尺寸  $L = 513$ ) 上的曲线进行线性拟合, 拟合直线的斜率即为生长指数, 由此得到生长指数  $\beta = 0.268 \pm 0.003$ .

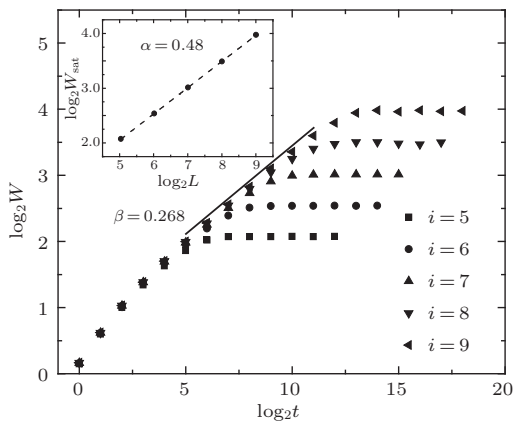


图 4 谢尔宾斯基箭头基底上刻蚀模型的表面宽度  $W(L, t)$ ,  $i = 5-9$  为基底的迭代次数,  $t$  为生长时间, 插图为饱和宽度  $W_{\text{sat}}$  随系统尺寸  $L$  变化的双对数曲线

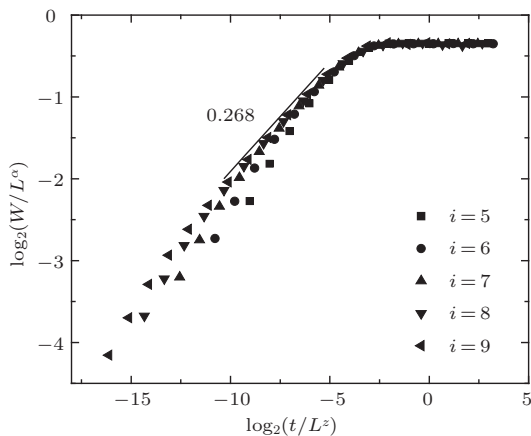


图 5 谢尔宾斯基箭头基底上  $W/L^\alpha$  随  $t/L^z$  变化的双对数关系,  $i = 5-9$  为基底的迭代次数,  $t$  为生长时间,  $\alpha = 0.48$ ,  $z = 1.79$  为上述谢尔宾斯基箭头基底上的计算结果

图 4 的插图给出了饱和宽度  $W_{\text{sat}}(L)$  与系统尺寸  $L$  的双对数关系, 插图中的虚线是饱和宽度  $W_{\text{sat}}(L)$  与尺寸  $L$  双对数关系的线性拟合曲线, 其斜率给出了粗糙度指数  $\alpha = 0.48 \pm 0.01$ . 从插图

中粗糙度指数的计算可以看出, 饱和表面宽度随基底尺寸变化的双对数曲线呈现出良好的线性关系, 说明谢尔宾斯基箭头基底上的刻蚀模型具有很好的标度行为. 根据生长指数  $\beta$  和粗糙度指数  $\alpha$ , 可以得到动力学指数  $z = \alpha/\beta \approx 1.79$ . 动力学指数描述了表面高度的横向关联, 满足标度关系  $\xi(t) \propto t^{1/z}$ , 其中  $\xi(t)$  表示关联长度.

图 5 给出了谢尔宾斯基箭头基底尺寸  $L = 33, 65, 129, 257, 513$  时  $W/L^\alpha$  和  $t/L^z$  的双对数关系, 其中  $\alpha = 0.48$ ,  $z = 1.79$ , 分别为上述谢尔宾斯基箭头基底上粗糙度指数与动力学指数的计算结果. 可见, 除了初始阶段, 其余部分在重新标度后数据塌缩得很好, 这也验证了表面宽度的标度行为. 根据我们的模拟结果, 在谢尔宾斯基箭头基底上粗糙度指数与动力学指数之和  $\alpha + z \approx 2.27$ , 与欧几里得基底上的情况不同, 不满足标度关系  $\alpha + z = 2$  [1,14].

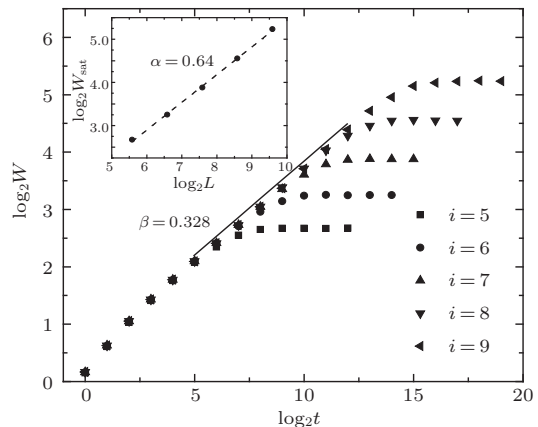


图 6 蟹状基底上刻蚀模型的表面宽度  $W(L, t)$ ,  $i = 5-9$  为基底的迭代次数,  $t$  为生长时间, 插图为饱和宽度  $W_{\text{sat}}$  随系统尺寸  $L$  变化的双对数曲线.

### 3.2 蟹状基底上刻蚀模型的动力学标度行为

图 6 给出了迭代次数  $i = 5-9$  (即基底尺寸  $L = 48, 96, 192, 384, 768$ ) 的蟹状分形基底上刻蚀模型表面宽度  $W(L, t)$  与时间  $t$  的双对数图, 而饱和表面宽度  $W_{\text{sat}}(L)$  与基底尺寸  $L$  的关系如图 6 中的插图所示. 采用与谢尔宾斯基箭头基底上相同的处理方法, 在蟹状分形基底上得到生长指数  $\beta = 0.328 \pm 0.002$ , 粗糙度指数  $\alpha = 0.64 \pm 0.02$ , 动力学指数  $z = \alpha/\beta \approx 1.96$ , 均大于谢尔宾斯基箭头基底上的结果. 在蟹状分形基底上  $\alpha + z \approx 2.60$ , 与上述谢尔宾斯基箭头基底上的结果有所不同, 并且也同样不满足标度关系  $\alpha + z = 2$  [1,14].

图 7 给出的是基底尺寸  $L = 48, 96, 192, 384, 768$  时  $W/L^\alpha$  与  $t/L^z$  的双对数变化关系, 其中  $\alpha = 0.64, z = 1.96$ , 分别为蟹状分形基底上粗糙度指数与动力学指数的计算结果. 可见, 除了初始阶段, 其余部分在重新标度后数据塌缩的也很好, 这说明蟹状分形基底上刻蚀模型的表面宽度也表现出很好的标度行为, 标准的 Family-Vicsek 标度规律在分形基底上仍然成立.

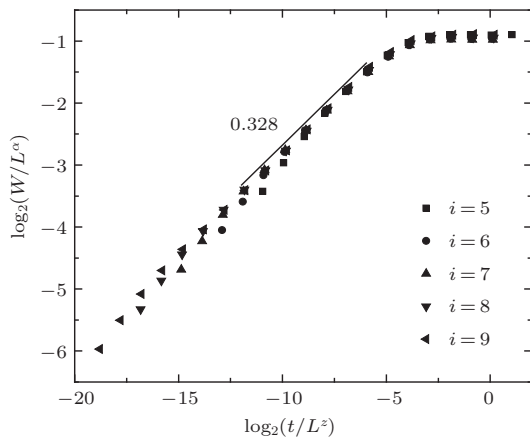


图 7 蟹状基底上刻蚀模型  $W/L^\alpha$  随  $t/L^z$  变化的双对数关系,  $i = 5-9$  为基底的迭代次数,  $t$  为生长时间,  $\alpha = 0.64, z = 1.96$  为上述蟹状基底上的计算结果

## 4 分析与讨论

根据上述谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上刻蚀模型表面宽度标度行为的数值模拟计算, 可以发现: 当基底为分形结构时, 刻蚀模型仍然显示出很好的标度行为, 并且仍满足标准的 Family-Vicsek 动力学标度规律.

刻蚀模型标度指数的计算结果表明, 尽管谢尔宾斯基箭头与蟹状分形基的维数相同, 但在这两种分形基底上得到的生长指数、粗糙度指数和动力学指数却存在明显差异, 这说明基底的分形结构能够影响生长模型的标度行为, 标度指数不仅仅取决于基底的维数, 还与基底的具体结构有关. 从图 1 与图 2 的分形基底可以看出, 对于配位数为三的点而言, 其三个最近邻点中有一个点到该点的化学距离较大, 且对于不同位置上的点, 这两种基底上较大化学距离的长度也不相同. 由此可以看出, 基底上每个格点的配位数取决于格点的位置, 格点配位数分布是非均匀的. 因此有理由认为, 基底格点配位数的这种非均匀分布导致了刻蚀模型在两种分形基底的标度性质有所不同, 相应的标度指数出现了差异.

此外, 在蟹状分形基底上得到的生长指数、粗糙度指数与动力学指数均大于谢尔宾斯基箭头基底上的结果, 说明蟹状分形基底上的刻蚀生长表面更加粗糙. 一个点的最近邻点数目会影响该点上的生长情况, 从分形基底的形貌可以看出, 蟹状分形基底上配位数为三的点分布比谢尔宾斯基箭头基底相对集中, 而且其三个最近邻点中有两个点自身的配位数也为三. 因此有理由认为, 蟹状分形基底格点的这种分布方式导致了刻蚀模型在该基底上的生长表面更加粗糙, 与谢尔宾斯基箭头基底上的标度指数存在一定的差异.

在欧几里得基底上刻蚀模型表现出非常好的标度性质, 并且属于用 KPZ 方程描述的普适类 [24,27]. 因此人们自然会提出这样的问题: KPZ 方程还能否描述分形基底上刻蚀模型的动力学标度行为? KPZ 方程仅在一维情况下有精确解, 但理论分析表明, 在整数维情况下 KPZ 方程的两个标度指数  $\alpha$  和  $z$  满足标度关系  $\alpha + z = 2$  [1,14]. 本文的模拟结果显示, 在谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上粗糙度指数与动力学指数明显不满足关系  $\alpha + z = 2$ . Lee 等人 [22] 在对嵌置于三维欧几里得空间的谢尔宾斯基垫片和棋盘分形基底上受限固-固模型的计算模拟显示, 在具有相同分形维数的基底上得到的标度指数虽然也存在差异, 但其粗糙度指数与动力学指数的和却是相同的. 而本文在具有相同维数 (分形维数  $d_f = 1.585$ ) 的谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上的计算结果表明, 粗糙度指数与动力学指数之和并不相同. 我们认为, 标度指数的这种差异主要是由于分形基底具体结构不同造成的. Tang 等人 [21] 在谢尔宾斯基毯上对刻蚀模型的模拟也证实了粗糙度指数与动力学指数之和并不满足标度关系  $\alpha + z = 2$  这一结果, 并且认为基底的分形结构不仅导致了奇异扩散, 还会影响其非线性动力学行为.

很显然, 标准的 Family-Vicsek 动力学标度规律在本文中所研究的分形基底上同样成立, 但原来在欧几里得空间成立的 KPZ 方程并不能够用来描述分形基底上的刻蚀模型, 其动力学标度行为的描述需要用其他新的连续动力学方程.

## 5 结论

为进一步探讨分形基底结构变化对生长表面动力学标度行为的影响, 本文在具有相同分形维数 (分形维数  $d_f = 1.585$ ) 的谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上, 使用数值模拟的方法, 研究



了刻蚀模型生长表面的动力学性质. 计算模拟表明, 刻蚀模型在谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上表现出很好的标度行为, 标准的 Family-Vicsek 标度规律仍适用于分形基底上刻蚀模型. 采用标准的 Family-Vicsek 标度规律对表面宽度的动力学行为进行分析, 发现谢尔宾斯基箭头基底上刻蚀模型生长表面的粗糙度指数、生长指数和动力学指数与蟹状分形基底上的结果存在差异. 可见, 虽然这两种分形基底的维数相同, 但得到的标度指数却存在差异.

有理由认为这两种分形基底上标度指数的差异是由于基底格点的配位数分布不均匀造成的, 标度指数不仅与分形基底的维数有关, 还与分形基底的具体结构有关. 对于 KPZ 方程, 在整数维情况下有标度关系  $\alpha + z = 2$  成立, 而根据本文的模拟结果, 在谢尔宾斯基箭头和蟹状分形基底上粗糙度指数与动力学指数不满足标度关系  $\alpha + z = 2$ , 在原来欧几里得空间成立的 KPZ 方程已不能用来描述分形基底上刻蚀模型的生长过程, 分形基底结构的改变将会影响到生长表面界面的动力学标度性质.

- [1] Barabási A L, Stanley H E 1995 *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Family F, Vicsek T 1991 *Dynamics of Fractal Surfaces* (Singapore: World Scientific Press)
- [3] Tang G, Ma B K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 994 (in Chinese) [唐刚, 马本堃 2002 物理学报 **51** 994]
- [4] Hao D P, Tang G, Xia H, Chen H, Zhang L M, Xun Z P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2018 (in Chinese) [郝大鹏, 唐刚, 夏辉, 陈华, 张雷明, 寻之朋 2007 物理学报 **56** 2018]
- [5] Xun Z P, Tang G, Han K, Hao D P, Xia H, Zhou W, Yang X Q, Wen R J, Chen Y L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 070516
- [6] Tang G, Hao D P, Xia H, Han K, Xun Z P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100508
- [7] Family F, Vicsek T 1985 *J. Phys.* A **18** L75
- [8] Meakin P 1998 *Fractals, scaling and growth far from equilibrium* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [9] Edwards S F, Wilkinson D R 1982 *Proc. R. Soc. London A* **381** 17
- [10] Kardar M, Parisi G, Zhang Y C 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 889
- [11] Meakin P, Ramanlal P, Sander L M, Ball R C 1986 *Phys. Rev. A* **34** 5091
- [12] Jullien R, Botet R 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 2055
- [13] Kim J M, Kosterlitz J M 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 2289
- [14] Krug J 1997 *Adv. Phys.* **46** 139
- [15] Bab M A, Fabricius G, Albano E V 2008 *Europhys. Lett.* **81** 10003
- [16] Lee K E, Sung J Y, Cha M-Y, Maeng S E, Bang Y S, Lee J W 2009 *Phys. Rev. Lett.* A **373** 4260
- [17] Weber S, Klafter J, Blumen A 2010 *Phys. Rev. E* **82** 051129
- [18] Lee S B, Kim J M 2009 *Phys. Rev. E* **80** 021101
- [19] Kim D H, Kim J M 2010 *J. Stat. Mech.* p08008
- [20] Horowitz C M, Romá F, Albano E V 2008 *Phys. Rev. E* **78** 061118
- [21] Tang G, Xun Z P, Wen R J, Han K, Xia H, Hao D P, Zhou W, Yang X Q, Chen Y L 2010 *Physica A* **389** 4552
- [22] Lee S B, Jeong H C, Kim J M 2008 *J. Stat. Mech.* p12013
- [23] Huynh H N, Chew L Y, Pruessner G 2010 *Phys. Rev. E* **82** 042103
- [24] Mello B A 2001 *Phys. Rev. E* **63** 041113
- [25] Huynh H N, Chew L Y (unpublished), available at <http://www.worldscinet.com/fractals/editorial/paper/910421.pdf>.
- [26] Lee C, Lee S B 2010 *Physica A* **389** 5053
- [27] Aarão R F D A 2004 *Phys. Rev. E* **69** 021610
- [28] Paiva T, Aarão R F D A 2007 *Surface Science* **601** 419

# Numerical simulations of dynamic scaling behavior of the etching model on fractal substrates\*

Zhang Yong-Wei Tang Gang<sup>†</sup> Han Kui Xun Zhi-Peng Xie Yu-Ying Li Yan

(Department of Physics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

(Received 8 July 2011; revised manuscript received 26 August 2011)

## Abstract

In order to investigate the effect of the structure of fractal substrates on dynamic scaling behavior of the surfaces, the etching model growing on the Sierpinski arrowhead and crab fractal substrates is simulated by means of Kinetic Monte Carlo (KMC). It is found that the etching model evolving on two kinds of fractal substrates can exhibit dynamic scaling behavior, and can still be described by the Family-Vicsek scaling relation. Although the Sierpinski arrowhead and crab fractal substrates have the same fractal dimension, the obvious different values of roughness exponent  $\alpha$  and dynamic exponent  $z$ , however, are obtained on these two substrates, and they neither of them satisfy the scaling relation  $\alpha + z = 2$ , which is satisfied in the usual Euclid space. It can be seen from the results obtained here that the scaling exponents of the etching model growing on fractal substrate are determined by not only the fractal dimension but also the fractal structure.

**Keywords:** etching model, fractal substrate, dynamic scaling behavior

**PACS:** 05.40.-a, 02.50.-r, 64.60.Ht

---

\* Projects supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674177) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities(Grant No. 2010LKWL01-CUMT).

<sup>†</sup> E-mail: E-mail: gangtang@cumt.edu.cn