

一维 Bose-Hubbard 模型的孤子激发*

谢元栋†

(华南师范大学物理与电信工程学院, 广州 510006)

(华南师范大学信息光电子科技学院, 广州 510006)

(2010 年 10 月 21 日收到; 2011 年 5 月 4 日收到修改稿)

对一维玻色 - 哈勃模型进行了细致的研究, 得出了无界空间中的孤子解, 还求出了周期性边界条件下的精确椭圆函数波解和孤子解, 并得出了解的能量和有效质量.

关键词: Bose-Hubbard 模型, 椭圆函数波, 孤子激发

PACS: 32.80.Pj

1 引言

玻色 - 哈勃模型 (Bose-Hubbard model, BHM) 被广泛用来研究低温下玻色系统的相变. 如低温下玻色系统发生的超导 - 绝缘相变^[1,2]和超流 - Mott 绝缘子相变^[3,4], BHM 在一定条件下可以化作 Heisenberg 自旋链模型, 由此得到了许多重要而有价值的结果. 近年来, 研究者利用光学格点势把超冷原子约束在势阱中, 进而对其进行了多方面研究. 众所周知, 相干光束能产生微观势阱, 可以用来捕捉冷原子, 这方面有大量的文献研究过^[5,6]. 冷原子的量子特性可以通过阱内振动和邻近阱之间的隧穿来描述. 陷在光学势阱中的玻色子可以用 Bose-Hubbard 模型来描述. 光格中势阱参数高度可调, 可用激光的强度和结构来控制. 光格中 BHM 同样能预测低温下从超流相到 Mott 绝缘相之间的相变, 它表明这种相变在各点内玻色子相互作用排斥能与邻近格点间隧穿能之间达到一定大小时发生. 这个模型在一定条件下 (格点内相互作用很大亦即每个格点只有零或一个玻色子) 可以用自旋海森堡模型来代替. 系统处于基态时没有相互作用, 但随着温度的升高, 由于每个格点的原子数密度增大, 格点间的磁偶极相互作用不能忽略. 考虑格点间相互作用后, 横向自旋激发就会转移 (运动), 导

致基态自旋结构扭曲, 从而沿自旋链产生自旋波和磁孤子.

文献 [7—9] 用相干态概率幅通过连续极限近似对玻色 - 爱因斯坦凝聚进行了研究, 求出了自旋链模型的自旋波和孤子解, 还求出了孤子的能量. 文献 [10,11] 用相同的方法求出了量子格子模型和连续非线性极化模型的孤子解及其能量. 本文拟用文献 [7—11] 的方法对玻色 - 哈勃模型进行研究.

2 Bose-Hubbard 模型及其运动方程

只考虑最邻近格点的相互作用, 一维 BHM 的哈密顿量可以写成^[5,6]

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{i,\delta} (b_i^\dagger b_{i+\delta} + b_{i+\delta}^\dagger b_i) + \frac{U_0}{2} \sum_i n_i n_i + \frac{U_1}{2} \sum_{i\sigma} n_i n_{i+\sigma} - \mu \sum_i n_i, \quad (1)$$

i 表示格点, $i + \delta$ ($\delta = \pm 1$) 表示 i 的最邻近各点. b_i 和 b_i^\dagger 分别是玻色湮没和产生算符, 满足下列对易关系: $[b_i, b_i^\dagger] = 1$, $[b_i, b_j] = [b_i, b_j^\dagger] = 0$ ($i \neq j$). $n_i = b_i^\dagger b_i$ 是玻色子数算符. J 是邻近格点间跳跃矩阵元, U_0 描述格点内的相互作用 (原子碰撞

* 国家自然科学基金 (批准号: 10474022) 资助的课题.

† E-mail: xieyd@scnu.edu.cn

等) U_1 描述最邻近格点间相互作用 (在本文中只考虑最邻近格点)^[3,4]. 作变换 $b_i^+ = S_i^+$, $b_i = S_i^-$, $n_i = b_i^+ b_i = 1/2 + S_i^z$, 哈密顿量 (1) 可以改写为^[1-4]

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{i,\delta} (S_i^+ S_{i+\delta}^- + S_{i+\delta}^+ S_i^-) + \frac{U_0}{2} \sum_i S_i^z + \frac{U_1}{2} \sum_{i,\delta} S_i^z S_{i+\delta}^z - h \sum_i S_i^z, \quad (2)$$

其中 $h = \mu - \frac{1}{2} \sum_i U_{0i}$, $S_i^\pm = S_i^x \pm i S_i^y$ 和 S_i^z 是第 i 个格点的自旋算符, 满足下列对易关系:

$$\begin{aligned} [S_i^\pm, S_j^z] &= \mp S_i^\pm \delta_{ij}, \\ [S_i^+, S_j^-] &= 2S_i^z \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

方程 (2) 是一个 Heisenberg 自旋链模型. 引入 Holstain-Primakoff 变换:

$$\begin{aligned} \hat{S}_i^+ &= (\sqrt{2S - a_i^+ a_i}) a_i, \\ \hat{S}_i^- &= (a_i^+ \sqrt{2S - a_i^+ a_i}), \\ \hat{S}_i^z &= S - a_i^+ a_i, \end{aligned} \quad (4)$$

a_i 和 a_i^+ 分别是玻色湮没和产生算符, 满足下列对易关系:

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}, [a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0. \quad (5)$$

低温下, $a_i^+ a_i \ll 2S$, 方程 (4) 中 \hat{S}_i^+ 和 \hat{S}_i^- 可以用泰勒级数展开, 只考虑最邻近格点的相互作用, 忽略三阶以上和无关紧要的常数项, 哈密顿量 (2) 可写成

$$\begin{aligned} H &= -(U_0 S - h) \sum_i a_i^+ a_i \\ &- S \sum_{i,\delta} \left[\frac{U_1}{2} (a_i^+ a_i + a_{i+\delta}^+ a_{i+\delta}^+) \right. \\ &\left. + J (a_i^+ a_{i+\delta}^+ + a_i a_{i+\delta}^+) \right] \\ &+ \frac{U_0}{2} \sum_i a_i^+ a_i a_i^+ a_i \\ &+ \frac{U_1}{2} \sum_i a_i^+ a_i a_{i+\delta}^+ a_{i+\delta} \\ &+ \frac{J}{4} \sum_{i,\delta} (a_i^+ a_{i+\delta}^+ a_{i+\delta} a_{i+\delta} + a_{i+\delta}^+ a_i^+ a_i a_i \\ &+ a_i^+ a_i^+ a_i a_{i+\delta} + a_{i+\delta}^+ a_{i+\delta}^+ a_{i+\delta} a_i). \end{aligned} \quad (6)$$

于是, 海森堡表象中 a_i 的运动方程为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial a_i}{\partial t} &= h_1 a_i - 2JS(a_{i+1} + a_{i-1}) + U_0 a_i a_i^+ a_i \\ &+ U_1 (a_{i+1}^+ a_{i+1} + a_{i-1}^+ a_{i-1}) a_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{J}{2} (a_{i+1}^+ a_{i+1} a_{i+1} \\ &+ a_{i-1}^+ a_{i-1} a_{i-1} + a_{i+1}^+ a_i a_i \\ &+ a_{i-1}^+ a_i a_i + 2a_i^+ a_i a_{i+1} \\ &+ 2a_i^+ a_i a_{i-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

其中常数 $h_1 = (h - U_0/2 - U_0 S - 2U_1 S)$. 取自旋相干态 $|\psi\rangle$, 用含时变分法, 方程 (7) 能转化成第 i 个格点相干自旋激发的概率幅 $\alpha_i = \langle \psi | a_i | \psi \rangle$ 的运动方程

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} &= h_1 \alpha_i - 2JS(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1}) \\ &+ U_0 |\alpha_i|^2 \alpha_i + U_1 (|\alpha_{i+1}|^2 + |\alpha_{i-1}|^2) \alpha_i \\ &+ \frac{J}{2} (|\alpha_{i+1}|^2 \alpha_{i+1} + |\alpha_{i-1}|^2 \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}^* \alpha_i^2 \\ &+ \alpha_{i-1}^* \alpha_i^2 + |\alpha_i|^2 \alpha_{i+1} + |\alpha_i|^2 \alpha_{i-1}). \end{aligned} \quad (8)$$

应用连续极限

$$\begin{aligned} a_i(t) &= \alpha(z, t), a_{i\pm 1}(t) = \alpha(z, t) \\ &\pm \frac{\partial \alpha}{\partial z} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} a^2 + \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

a 是格点常数, 量级大约在几百纳米. $|\alpha(z, t)| \ll 1$.

(9) 式代入 (8) 式得下列方程:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= (h_1 - 4JS)\alpha - 2JSa^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \\ &+ U_1 a^2 \alpha \frac{\partial^2 |\alpha|^2}{\partial z^2} \\ &+ (U_0 + 2U_1 + 4J)\alpha |\alpha|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

对方程寻找下列形式的解:

$$\alpha(z, t) = \phi(\eta) e^{i(kz - \frac{E}{\hbar}t)}, \quad (11)$$

$\phi(\eta)$ 是 $\eta(\eta = z - vt)$ 的实函数, v 表示传播速度. 代入方程 (10) 得到下列两个方程:

$$k = \frac{\hbar v}{4JSa^2}, \quad (12)$$

$$(1 - \gamma\phi^2)\phi_{\eta\eta} - \gamma\phi\phi_\eta^2 - 2\mu\phi^3 - \lambda\phi = 0, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{U_1}{JS} > 0, \\ \mu &= \frac{U_0 + 2U_1 + 4J}{4JSa^2} > 0, \\ \lambda &= \frac{E - h_1 + 4JS - 2JSa^2 k^2}{2JSa^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

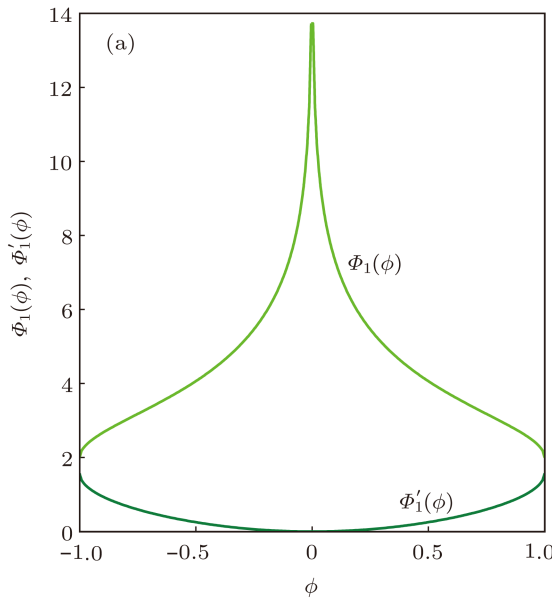
3 无界空间中的行波解

方程 (13) 在无界空间中有行波解, 其解满足边界条件 $\phi \rightarrow 0$ 当 $\eta \rightarrow \pm\infty$. 下面对方程 (13) 在不

同参数区间求解.

3.1 当 $\lambda > 0, 6\mu\gamma\lambda > \mu^2 + \gamma^2\lambda^2$ 时, 方程 (13) 有解

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \operatorname{ar} \cosh \frac{2\lambda\phi^{-2} - (\mu - \lambda\gamma)}{\sqrt{6\mu\gamma\lambda - \mu^2 - \lambda^2\gamma^2}} \\ & - \sqrt{\gamma} \operatorname{ar} \sin \frac{2\mu\gamma\phi^2 - (\mu - \lambda\gamma)}{\mu + \lambda\gamma} \\ & = \pm 2\sqrt{\mu}(\eta - \eta_0), \end{aligned} \quad (15)$$



其中 $\eta_0 = z_0 - vt_0$ 是积分常数, 表示 t_0 时刻 z_0 处的值. 令

$$\begin{aligned} \Phi_1(\phi) &= \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \operatorname{ar} \cosh \frac{2\lambda\phi^{-2} - (\mu - \lambda\gamma)}{\sqrt{6\mu\gamma\lambda - \mu^2 - \lambda^2\gamma^2}}, \\ \Phi'_1(\phi) &= \sqrt{\gamma} \operatorname{ar} \sin \frac{2\mu\gamma\phi^2 - (\mu - \lambda\gamma)}{\mu + \lambda\gamma}. \end{aligned} \quad (16)$$

从图 1(a) 中看到, $\Phi_1(\phi)$ 比 $\Phi'_1(\phi)$ 大很多, 且 $\Phi'_1(\phi)$ 几乎是常数, 可以归结到 η_0 中, 得到孤子解. 从图 1(b) 看到, 方程 (17) 表示钟形孤子解.

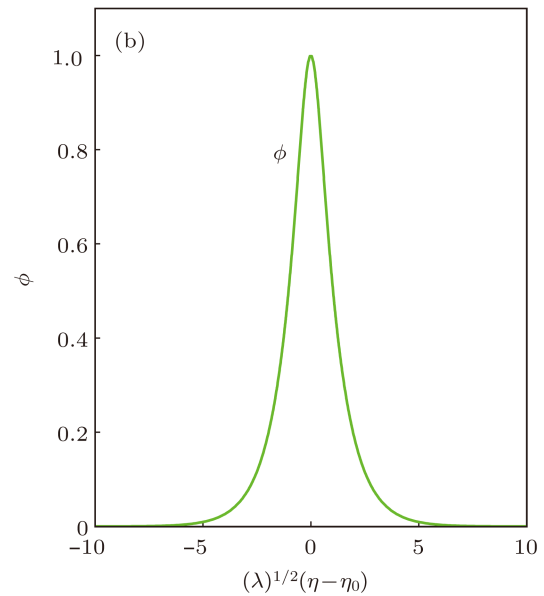


图 1 (a) $\Phi_1(\phi)$ 和 $\Phi'_1(\phi)$ 随 ϕ 的变化; (b) ϕ 随 $\sqrt{\lambda}(\eta - \eta_0)$ 的变化

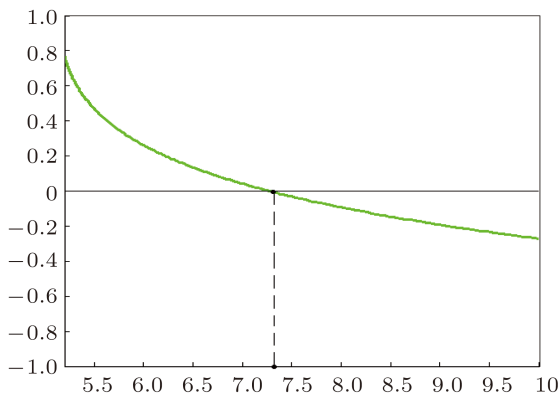


图 2 取 $\mu = 3, \gamma = 0.1$, 满足方程 (18) 的 λ 是图中的零点

$$\begin{aligned} \phi &= \left[\frac{\mu - \lambda\gamma - \sqrt{6\mu\gamma\lambda - \mu^2 - \lambda^2\gamma^2}}{2\lambda} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{6\mu\gamma\lambda - \mu^2 - \lambda^2\gamma^2}}{\lambda} \right. \\ & \left. \times \cosh^2 \sqrt{\lambda}(\eta - \eta_0) \right]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (17)$$

由归一化条件得 λ 亦即能量 E 满足的方程

$$\begin{aligned} & \frac{\mu - \lambda\gamma - \sqrt{6\mu\gamma\lambda - \mu^2 - \lambda^2\gamma^2}}{\mu - \lambda\gamma + \sqrt{6\mu\gamma\lambda - \mu^2 - \lambda^2\gamma^2}} \\ & = \tan^2 \frac{\sqrt{6\mu\gamma\lambda - \mu^2 - \lambda^2\gamma^2}}{2\sqrt{2\lambda}}. \end{aligned} \quad (18)$$

从中可以解出能级和孤子宽度. 图 2 表明 (18) 式存在有意义的实数解.

3.2 当 $\lambda > 0, 6\mu\gamma\lambda < \mu^2 + \gamma^2\lambda^2$ 时, 方程 (13) 有解

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \operatorname{ar} \sinh \frac{2\lambda\phi^{-2} - (\mu - \lambda\gamma)}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2\gamma^2 - 6\mu\gamma\lambda}} \\ & - \sqrt{\gamma} \operatorname{ar} \sin \frac{2\mu\gamma\phi^2 - (\mu - \lambda\gamma)}{\mu + \lambda\gamma} \\ & = \pm 2\sqrt{\mu}(\eta - \eta_0), \end{aligned} \quad (19)$$

其中 η_0 的意义如前述. 令

$$\Phi_2(\phi) = -\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \operatorname{ar} \sinh \frac{2\lambda\phi^{-2} - (\mu - \lambda\gamma)}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2\gamma^2 - 6\mu\gamma\lambda}},$$

$$\Phi_2'(\phi) = -\sqrt{\gamma} \arcsin \frac{2\mu\gamma\phi^2 - (\mu - \lambda\gamma)}{\mu + \lambda\gamma}. \quad (20)$$

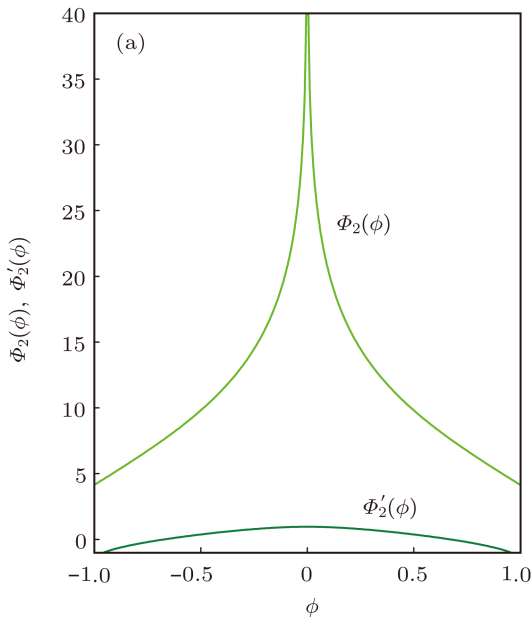
从图 3(a) 看到, $\Phi_2(\phi)$ 比 $\Phi_2'(\phi)$ 大很多, 且 $\Phi_2'(\phi)$ 几乎是常数, 可以归结到 η_0 中, 得到孤子解

$$\phi = \left\{ \frac{\mu - \lambda\gamma}{2\lambda} + \frac{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2\gamma^2 - 6\mu\gamma\lambda}}{2\lambda} \times \sinh[2\sqrt{\lambda}(\eta - \eta_0)] \right\}^{-1/2}. \quad (21)$$

图 3(b) 表示 (21) 式, 即 ϕ 随 $\sqrt{\lambda}(\eta - \eta_0)$ 的变化.

3.3 当 $\lambda = 0$ 时, 方程 (13) 有解

$$-2\sqrt{\phi^{-2} - \gamma} - \sqrt{\gamma} \arcsin(2\gamma\phi^2 - 1)$$



$$= \pm 2\sqrt{\mu}(\eta - \eta_0), \quad (22)$$

其中 η_0 的意义如前述. 令

$$\Phi_3(\phi) = 2\sqrt{\phi^{-2} - \gamma},$$

$$\Phi_3'(\phi) = \sqrt{\gamma} \arcsin(2\gamma\phi^2 - 1).$$

从图 4(a) 中看到, 稍微偏离原点时, $\Phi_3(\phi)$ 的绝对值比 $\Phi_3'(\phi)$ 的绝对值大很多, 且 $\Phi_3'(\phi)$ 几乎是常数, 可以归结到 η_0 中, 得到孤子解

$$\phi = [\mu(\eta - \eta_0)^2 + \gamma]^{-1/2}. \quad (23)$$

图 4(b) 表示 ϕ 随 $\sqrt{\mu}(\eta - \eta_0)$ 的变化. 由归一化条件得系数满足 $\mu\gamma = \pi$, 从而系统能量可表示为

$$E = h_1 - 4JS + 2JSa^2k^2. \quad (24)$$

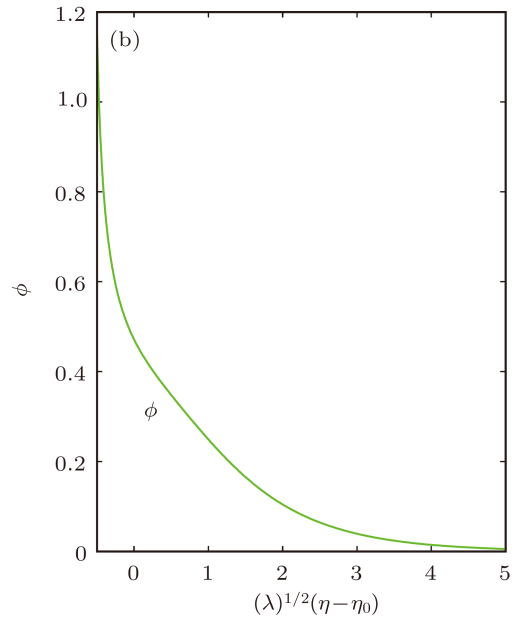


图 3 (a) $\Phi_2(\phi)$ 和 $\Phi_2'(\phi)$ 随 ϕ 的变化; (b) ϕ 随 $\sqrt{\lambda}(\eta - \eta_0)$ 的变化

3.4 当 $\lambda < 0$ 时, 方程 (13) 有解

$$-\sqrt{\frac{\mu}{-\lambda}} \arcsin \frac{-2\lambda\phi^{-2} - (\mu - \lambda\gamma)}{\mu + \lambda\gamma}$$

$$-\sqrt{\gamma} \arcsin \frac{2\mu\gamma\phi^2 - (\mu - \lambda\gamma)}{\mu + \lambda\gamma}$$

$$= \pm 2\sqrt{\mu}(\eta - \eta_0), \quad (25)$$

注意右边有“±”号. 其中 η_0 的意义如前述. 令

$$\Phi_4(\phi) = -\sqrt{\frac{\mu}{-\lambda}} \arcsin \frac{-2\lambda\phi^{-2} - (\mu - \lambda\gamma)}{\mu + \lambda\gamma},$$

$$\Phi_4'(\phi) = -\sqrt{\gamma} \arcsin \frac{2\mu\gamma\phi^2 - (\mu - \lambda\gamma)}{\mu + \lambda\gamma}. \quad (26)$$

从图 5 (a) 看出, 在不同参数区间, 两项取值不同, 故很难把它们合为一项. 当 $\phi^2 \ll 1$ 时, 可取第

二项

$$\phi = \sqrt{\frac{\mu - \lambda\gamma}{2\mu\lambda} \pm \frac{\mu + \lambda\gamma}{2\mu\lambda} \sin \left[2\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}(\eta - \eta_0) \right]}. \quad (27)$$

4 周期性边界条件下的解

玻色 - 哈勃模型是个周期性结构, 很容易满足周期性边界条件. 在周期性边界条件下, 方程 (13) 有周期解. 设总长为 L , 则周期性边界条件可表示为

$$\phi(\eta) = \phi(\eta + L), \quad (28)$$

方程 (13) 可化为

$$(1 - \gamma\phi^2)\phi_\eta^2 = \mu(\phi_2^2 - \phi^2)(\phi_1^2 - \phi^2), \quad (29)$$

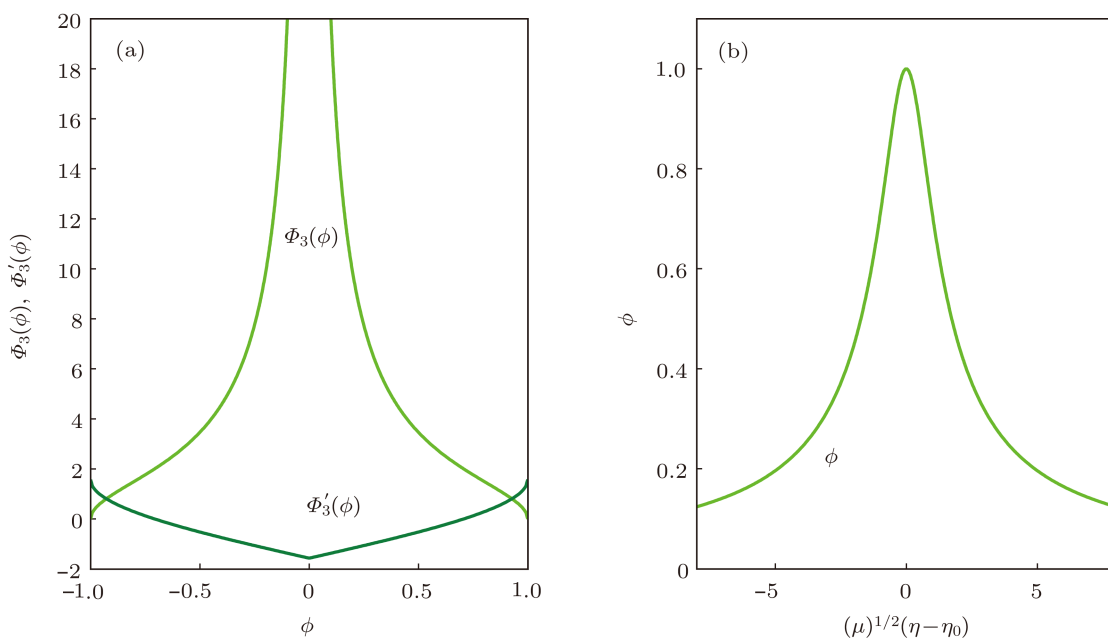


图4 (a) $\Phi_3(\phi)$ 和 $\Phi_3'(\phi)$ 随 ϕ 的变化; (b) ϕ 随 $\sqrt{\mu}(\eta - \eta_0)$ 的变化

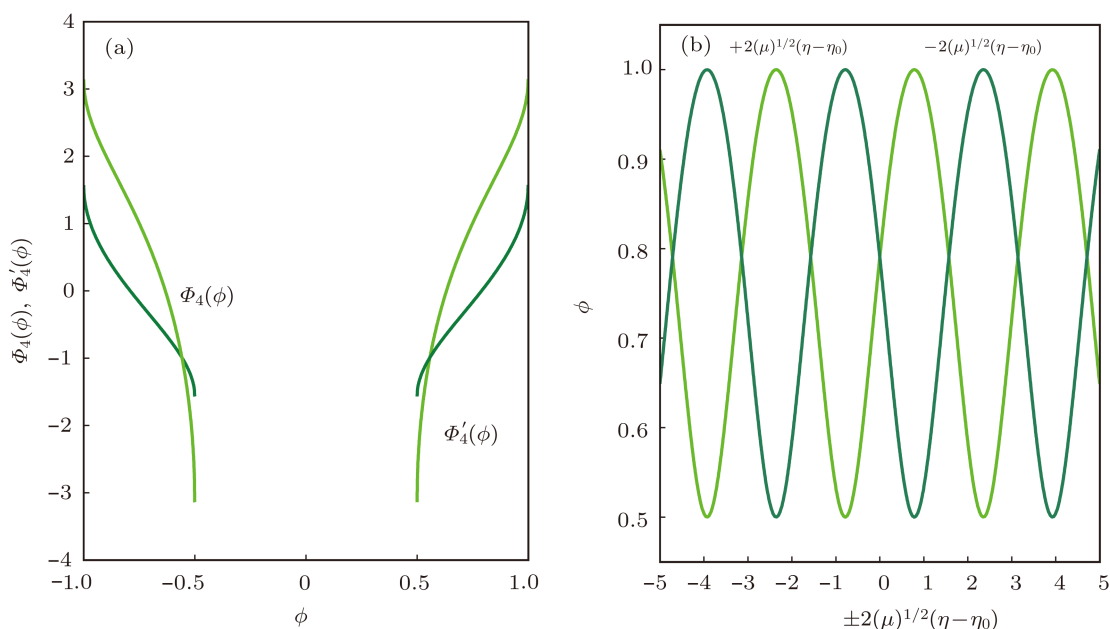


图5 (a) $\Phi_4(\phi)$ 和 $\Phi_4'(\phi)$ 随 ϕ 的变化; (b) ϕ 随 $\pm 2\sqrt{\mu}(\eta - \eta_0)$ 的变化

其中 $0 \leq \phi^2 \leq \phi_1^2 \leq \phi_2^2$, $\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{\lambda}{\mu}$, $\phi_1^2 \phi_2^2 = D > 0$, D 是正的积分常数.

对方程再积分一次得^[9-12]

$$\Pi(\delta, b, q) = \sqrt{\mu\phi_2^2(1 - \gamma\phi_1^2)}(\eta - \eta_0), \quad (30)$$

其中

$$q^2 = \frac{\phi_1^2(1 - \gamma\phi_2^2)}{\phi_2^2(1 - \gamma\phi_1^2)} < 1,$$

$$\delta = \arcsin \sqrt{\frac{\phi^2(1 - \gamma\phi_1^2)}{\phi_1^2(1 - \gamma\phi^2)}},$$

$$b = \frac{-\gamma\phi_1^2}{1 - \gamma\phi_1^2}. \quad (31)$$

对于填充因子很小的玻色气体, $\gamma\phi_1^2 \ll 1$, 所以 $b \rightarrow 0$, 得到解

$$\phi(\eta) = \left\{ \left(\frac{1}{\phi_2^2} - \gamma \right) \left[\operatorname{sn} \sqrt{\mu\phi_2^2(1 - \gamma\phi_1^2)}(\eta - \eta_0), q \right]^{-2} + \gamma \right\}^{-1/2}, \quad (32)$$

$\operatorname{sn}(\eta, q)$ 为第一类雅可比椭圆函数, 它的平方的周

期是 $2K(q)$.

由周期性条件得出

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu\phi_2^2(1-\gamma\phi_1^2)}L &= 2nK(q), \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (33)$$

其中 n 是椭圆函数波的周期数, 波长为 L/n . 椭圆函数波的幅值

$$\phi_a^2 = \phi_{\max}^2 - \phi_{\min}^2 = \phi_1^2. \quad (34)$$

由归一化条件得到

$$\gamma a \sqrt{\mu\phi_2^2(1-\gamma\phi_1^2)} = 2n[\Pi(b', q) - K(q)], \quad (35)$$

其中

$$b' = -b = \frac{\gamma\phi_1^2}{1-\gamma\phi_1^2}. \quad (36)$$

椭圆函数波的流密度

$$\begin{aligned} j(\eta) &= 2ev\phi^2(\eta) = 2ev \left\{ \left(\frac{1}{\phi_2^2} - \gamma \right) \right. \\ &\quad \times \left[\operatorname{sn} \sqrt{\mu\phi_2^2(1-\gamma\phi_1^2)} \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\eta - \eta_0), q \right]^{-2} + \gamma \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (37)$$

其中 $2e$ 是光格中单个玻色子所带的电荷, e 是基本电荷. ϕ_1^2 和 ϕ_2^2 可以被表示为

$$\phi_{1,2}^2 = \frac{1}{2\gamma} \left[-1 \pm \gamma A(1-q^2) \right.$$

$$\left. + \sqrt{[1-\gamma A(1-q^2)]^2 + 4\gamma Aq^2} \right], \quad (38)$$

其中 $A = \frac{8n^2 K^2(q)}{\mu L^2}$. 椭圆函数波的能量

$$\begin{aligned} E &= h_1 - 4JS + \frac{JS(U_0 + 2U_1 + 4J)}{2U_1} \\ &\quad \times \left[-1 + \sqrt{[1-\gamma A(1-q^2)]^2 + 4\gamma Aq^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}m_e v^2, \end{aligned} \quad (39)$$

其中静止能量

$$\begin{aligned} E_0 &= h_1 - 4JS + \frac{JS(U_0 + 2U_1 + 4J)}{2U_1} \left[-1 \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{[1-\gamma A(1-q^2)]^2 + 4\gamma Aq^2} \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

有效质量

$$m_e = \frac{\hbar^2}{4JSa^2}. \quad (41)$$

5 结论

分别在无界空间和周期性边界条件下讨论了玻色 - 哈伯模型的解, 结果表明, 在无界空间, 当包含能量的参数 $\lambda \geq 0$ 时有孤子解; $\lambda < 0$ 时没有孤子解. 在周期性边界条件下会得到椭圆函数波解, 极限情况下退化为孤子解, 还求出了孤子的能级和有效质量. 我们的结果对研究玻色 - 哈伯模型会有用, 特别是能量 (级), 对研究低温系统的相变有用.

[1] Bruder C, Rosario Fazio, Gerd Schon 1993 *Phys. Rev. B* **7** 342
 [2] van Otterlo A, Wagenblast K H, Baltin R, Bruder C, Fazio R, Schon G 1995 *Phys. Rev. B* **52** 16176
 [3] Krauth W, Trivedi N, Ceperley D, 1998 *Phys. Rev. Lett.* **67** 2307
 [4] Fisher M P A, Weichman P B, Grinstein G, Fisher D S 1989 *Phys. Rev. B* **40**, 546
 [5] Jaksch D, Bruder C, Cirac J I, Gardine W, Zoller P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3108
 [6] Sias C, Lignier H, Singh Y P, Zenesini A, Ciampini D, Morsch O, Arimondo E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 040404
 [7] Xie Z W, Zhang W, Chui S T, Liu W M 2004 *Phys. Rev. A* **69**

053609
 [8] Xie Y D 2009 *Commun. Theor. Phys.* **51** 445
 [9] Xie Y D 2007 *Chinese Journal of Quantum Electronics* **24** 492
 [10] Chen H, Chen Y 2000 *Phys. Stat. Sol.* **217** 847
 [11] Chen H, Chen Y 1999 *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** 647
 [12] Greenhill A G 1959 *The applications of Elliptic Functions*, (Dover Pub. New York)
 [13] Byrd P F, Friedman M D 1954 *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists* (Springer Verlag, Berlin)
 [14] Mahan G 1990 *Many-Particle Physics*, 2nd ed (Plenum Press, New York) p52

Soliton excitations of one-dimensional Bose-Hubbard model*

Xie Yuan-Dong[†]

(*school of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

(*Laboratory of Photonic Information Technology, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

(Received 21 October 2010; revised manuscript received 4 May 2011)

Abstract

One-dimensional Bose-Hubbard model is studied in detail. Soliton solutions in infinite space is presented, The elliptic function wave solutions and its nenergy and effective mass are also found under the periodic boundary condition.

Keywords: Bose-Hubbard model, elliptic function waves, soliton excitations

PACS: 32.80.Pj

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10474022).

[†] E-mail: xieyd@scnu.edu.cn