

微波时间反演系统的空间超分辨率机理*

陈英明 王秉中† 葛广顶

(电子科技大学应用物理研究所, 成都 610054)

(2010 年 12 月 20 日收到; 2011 年 3 月 21 日收到修改稿)

时间反演系统中存在亚波长结构是系统展示空间超分辨特性的必要条件. 在近场, 信号是通过占主导地位的库仑场来传输的, 而库仑场的分辨率极限只与散射体的线度和空间分布有关, 因此可以突破微波衍射极限实现空间超分辨.

关键词: 时间反演, 超分辨率, 亚波长结构

PACS: 41.20.Jb, 41.20.-q, 03.50.De

1 引言

Parvulescu 和 Clay 在 1965 年首先实现了声波在海洋中的时间反演^[1]. 发射单元发射声波信号, 信号经过信道传输后被接收单元记录下来, 接收单元把记录的信号时间反演后再转发出去, 则最初的声波信号将聚焦到初始的发射位置, 这就是时间反演空-时聚焦过程^[2]. 此种聚焦特性使得声波的时间反演技术得到广泛研究和应用^[3,4]. 近年来, 时间反演电磁波也被证明具有空-时聚焦特性^[5-8]. 文献[7]在一个金属腔体内进行了远场空-时同步聚焦实验, 令人注目的是, 实验所用微波发射天线阵的阵元间距只有 $1/30$ 个波长, 远小于瑞利判据给出的分辨率极限, 却能构成相互独立的信道, 实现了阵元间的空间超分辨率.

Oestges 等人^[9]在随机场模型上给出了一些描述空-时聚焦质量的参数. 文献[10]从时间反演对称性出发讨论了时间反演镜 (TRM) 在聚焦过程中的作用. 本文分析了散射体线度以及空间分布对超分辨的影响, 得到了系统出现空间超分辨的必要条件, 给出了超分辨的物理机理, 为进一步将时间反演的远场空时聚焦特性和亚波长微结构的近场空间超分辨率特性相结合、设计超分辨率微结构天

线阵列打下理论基础.

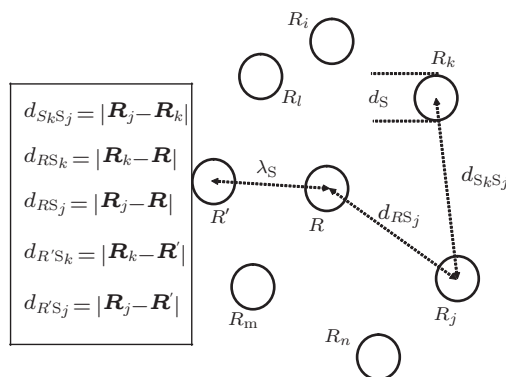


图 1 散射体的线度与空间分布

2 空间超分辨的必要条件

2.1 散射体线度对超分辨的影响

图 1 中, R 是信号天线, 发射以 λ_C 为载波的信号, R' 是窃听天线, R' 与 R 的距离用 λ_S 表示, $\lambda_S < \lambda_C/2$. 空间存在众多随机分布的散射体, R_k 与 R_j 是任意指定的两个, $d_{S_kS_j}$ 表示 R_k 与 R_j 的间距. d_{RS_j} 是 R 与 R_j 的间距, d_S 表征散射体的线度. 虽然图 1 给出的是离散模型, 但是当散射体间

* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2008AA01Z206), 博士点基金 (批准号: 20100185110021) 和国家自然科学基金 (批准号: 61071031) 资助的课题.

† E-mail: bzwang@uestc.edu.cn

距趋于 d_S 时, 可以理解成 d_S 在增大, 从而逐渐逼近连续模型.

信道冲激响应函数的相关性决定了系统的聚焦特性. 所以, 我们通过分析 $\langle h_R(t) h_{R'}(t) \rangle$ 来寻找空间超分辨的必要条件, 其中 $h_R(t)$ 和 $h_{R'}(t)$ 分别是与 R 和 R' 对应的信道冲激响应函数.

如果散射体的线度 $d_S \rightarrow 0^+$, 那么 $h_R(t)$ 和 $h_{R'}(t)$ 都表现为分立的谱线状. 假设共有 N 个散射体, 记 $h_R(t) = h_R^0(t) + \sum_{k=0}^N h_R^k(t)$, 其中 $h_R^0(t)$ 表示信号从 R 直射到 TRM 的部分, $h_R^k(t)$ 表示信号从 R 出发首先到达第 k 个散射体, 然后经过散射最终又到达 TRM 的部分, $h_R^R(t)$ 表示 R 的信号首先散射到 R' , 然后再散射到 TRM 的部分. 类似地有, $h_{R'}(t) = h_{R'}^R(t) + \sum_{k=0}^N h_{R'}^k(t)$. 当散射体的分布是随机的, R 和 R' 相对于 R_k 的距离差就是随机的, 显然 $|d_{RS_k} - d_{R'S_k}| \leq \lambda_S$. 相应地, 谱线 $h_R^k(t)$ 与 $h_{R'}^k(t)$ 相比就会有一个随机的时差, 范围是 $\left[-\frac{\lambda_S}{c}, \frac{\lambda_S}{c}\right]$, 其中 c 是光速.

实际的物理系统需要考虑有限的 d_S , 那么, 冲激响应函数中经过一次散射的谱线大约有 $\frac{d_S}{c}$ 的时间展宽, 经过 m 次散射的谱线大约有 $m \frac{d_S}{c}$ 的时间展宽, 谱线的最小展宽大约是 $\frac{d_S}{c}$. 只有 $h_R(t)$ 与 $h_{R'}(t)$ 的谱线之间的随机时差超过最小谱线宽度, $\langle h_R(t) h_{R'}(t) \rangle$ 才有可能趋于一个随机噪声, 否则谱线 $h_R(t)$ 和 $h_{R'}(t)$ 的重叠部分就会把信号泄露给 R' . 所以 $d_S \leq \lambda_S < \frac{\lambda_C}{2}$ 是实现 R 和 R' 之间空间超分辨的必要条件, 或者说系统本身必须存在亚波长结构才有可能展示时间反演超分辨现象.

2.2 散射体空间分布对超分辨的影响

要想实现 R 和 R' 之间的超分辨, 对于绝大多数的 j 和 k , 必须满足

$$|(d_{RS_k} - d_{RS_j}) - (d_{R'S_k} - d_{R'S_j})| > d_S, \quad (1)$$

(1) 式的含义是: $h_R^k(t)$ 与 $h_R^j(t)$ 之间存在时差 $(d_{RS_k} - d_{RS_j})/c$, $h_{R'}^k(t)$ 与 $h_{R'}^j(t)$ 之间也有时差 $(d_{R'S_k} - d_{R'S_j})/c$, 只有绝大多数的时差之差大于 d_S/c (最小谱线宽度), 系统对于 λ_C 载波才有可能表现出空间超分辨特性.

(1) 式可化为对 R' 的求解问题:

$$\begin{aligned} (d_{RS_k} - d_{RS_j}) - d_S &> |R_k - R'| - |R_j - R'|, \\ (d_{RS_k} - d_{RS_j}) + d_S &< |R_k - R'| - |R_j - R'|. \end{aligned} \quad (2)$$

记 (2) 式解出的关于 R' 的空间区域为 D_{kj} . D_{kj} 分两种情况: 第一, D_{kj} 是一对旋转双曲面“夹层”之外的区域. 这一对双曲面的旋转轴是 R_k 和 R_j 的连线, 两个双曲面互不相交, 分别与旋转轴有一个交点, 两个交点的距离为 d_S . 夹层区域是由散射体 j 和 k 贡献出的不可分辨区域, 夹层外是可能分辨的区域 D_{kj} . 第二, (2) 式中有一个不等式的解是空集, D_{kj} 是由一个旋转双曲面确定出来的, 旋转轴也是 R_k 和 R_j 的连线. 双曲面的一边是可能分辨的区域 D_{kj} , 另一边是不可分辨的区域.

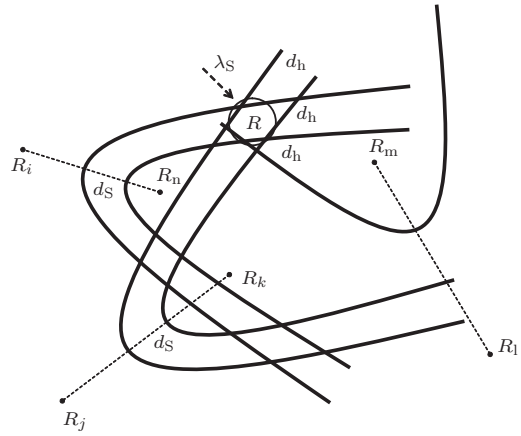


图 2 信息聚焦区域形成示意图

由于点 $R \notin D_{kj}$, 所以 R 不可能出现在成对旋转双曲面的夹层外. 对于有 N 个散射体的系统, 在 R 点附近共有 C_N^2 个不可分辨区域互相交叠, 形成信息聚焦区域, 如图 2 阴影区域所示. 假设 d_h 是成对的旋转双曲面在 R 点附近的平均间距, 当散射体数目足够多且随机分布时, 可以用 d_h 来定义信息聚焦区域的大小, 即分辨半径. 在以 R 点为球心, $\frac{\lambda_S}{2}$ 为半径的球外任选一点 R' , 如果没有覆盖到 R' 点的 D_{kj} 的数目 $N_{NC}(R')$ 满足 $\frac{\max[N_{NC}(R')]}{C_N^2} \approx \frac{1}{e}$, 则称 $\frac{\lambda_S}{2}$ 为分辨半径.

如图 3 所示, 按分辨半径的定义可以估算出 d_h 与 λ_S 的关系.

$$\text{由 } \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\theta \sin \theta d\theta}{4\pi} \approx \frac{1}{e}, \text{ 得到 } \frac{1 - \cos \theta}{2} \approx$$

$\frac{1}{e}$, 又 $\sin \theta = \frac{d_h}{\lambda_S}$, 所以

$$\lambda_S \approx \frac{e}{4\sqrt{e-1}} d_h \approx 1.04 d_h. \quad (3)$$

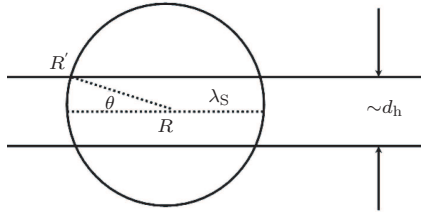


图3 估算 d_h 与 λ_S 的关系

容易证明: 第一, 总有 $d_h > d_S$; 第二, 当 $d_S \rightarrow 0^+$ 时, 有 $d_h \rightarrow 0^+$; 第三, 当 $d_{S_k S_j} \ll d_{RS_k} \approx d_{RS_j}$ 时, $d_h \propto d_{RS_k}$, 从而有 $d_h \gg d_{S_k S_j} \geq d_S$; 第四, 当 $d_{S_k S_j}$, d_{RS_k} 和 d_{RS_j} 三者比较接近时, 可以粗略估计 $d_h \approx d_S$. 再结合 (3) 式我们可以得到

第一, 因为总有 $d_h > d_S$, 所以要想系统对 λ_C 载波信号展现空间超分辨特性, 系统本身的空间结构必须足够精细, 即 $d_S < \frac{\lambda_S}{1.04} < \frac{\lambda_C}{2.08}$, 这与前文未考虑散射体空间分布时得到的结论一致.

第二, 当散射体的线度 d_S 和间距确定时, 它们处在远场还是近场对于超分辨的贡献是明显不同的. 远场情形下, 有 $d_h \gg d_S$, 即 $\lambda_S \gg d_S$, 贡献微弱; 近场情形下, λ_S 与 d_S 相当, 贡献较大. 所以, 对于 R 和 R' 而言, 远场的 TRM 不是散射的主角, 尽管 TRM 完成了时间反演这一关键的步骤.

再结合 2.1 节的分析, 容易得到进一步的推论: 远场大的腔体 ($d_S \gg \lambda_C$) 对于超分辨几乎没有贡献. 这与它在文献 [7] 中发挥能量的收集作用并不矛盾, 因为这种远场的行为受到不确定性原理的限制, 在时间反演传播的条件下至多给出瑞利衍射极限, 而文献 [7] 中的近场亚波长结构才是形成空间超分辨的关键因素. 文献 [8] 中, 体系在有亚波长结构但没有腔体情况下展示了良好的空间超分辨现象, 在没有亚波长结构但有腔体情况下无法展示空间超分辨现象, 这一结果佐证了我们的推论.

3 库仑场突破微波衍射极限

微波衍射极限可以由量子力学的不确定性原理给出. 但是在近场区域内散射体之间信息和能量

的传输不再以微波辐射场为主, 而是让位给占主导地位库仑场来直接传输. 由于库仑场传输机理只关心电荷的空间分布, 所以对应的分辨率极限只与散射体的线度和空间分布有关. 在近场光学超分辨现象的研究中, 根据自洽场理论^[11,12], 光场与物体的相互作用被近似为光场与偶极子的相互作用, 探针与成像样品之间的相互作用也被看作偶极子之间的相互作用.

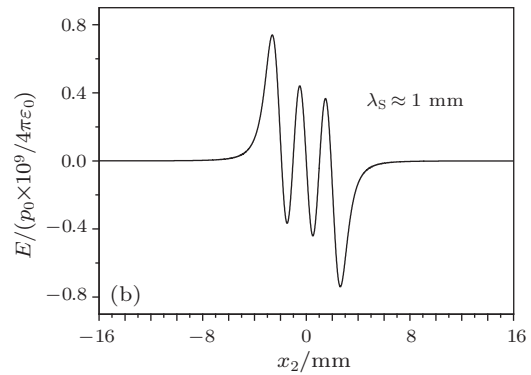
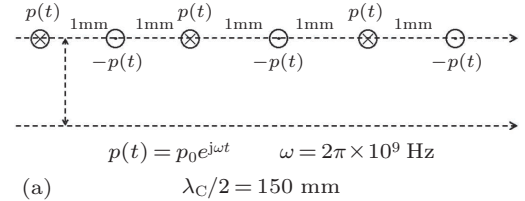


图4 库仑场传输机理展示超分辨率 (a) 一维偶极子阵列模型; (b) 6 个反相位偶极子激发的库仑场

真空中振荡偶极子的电磁场^[13]在球坐标下可表示为

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{p_0 k^3}{4\pi\epsilon} \left(\frac{2}{(kr)^3} + \frac{2j}{(kr)^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} \cos \theta, \\ E_\theta &= \frac{p_0 k^3}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{(kr)^3} + \frac{j}{(kr)^2} - \frac{1}{(kr)} \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta, \\ B_\varphi &= \frac{p_0 \sqrt{\mu} k^3}{4\pi\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{j}{(kr)^2} - \frac{1}{(kr)} \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

当 $1 \gg kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}$, 即 $r \ll \lambda$ (近场) 时, (4) 式过渡到

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_0 \cos \theta}{r^3} e^{j\omega t}, \\ E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0 \sin \theta}{r^3} e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (5)$$

图 4(a) 是真空中一维偶极子阵列模型, 用来演示库仑场直接传输机理是如何突破微波衍射极限

的. 六个偶极子在 x_1 轴上依次相距 1 mm 平行排列, x_2 轴与 x_1 轴平行, 距离 x_1 轴 1 mm. 偶极子振荡方向垂直于 x_1 和 x_2 轴所在的平面, $p(t) = p_0 e^{j\omega t}$, $\omega = 2\pi \times 10^9$ Hz, $\lambda_C \approx \frac{3 \times 10^8}{10^9}$ m = 300 mm, 六个偶极子的相位依次相差 π .

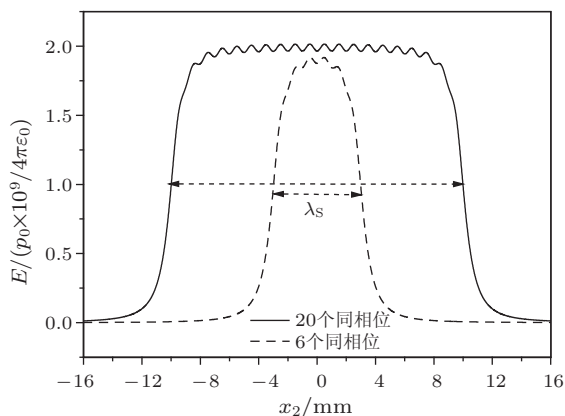


图5 同相位偶极子激发的库仑场

图 4(b) 中的纵坐标 E 是图 4(a) 中六个偶极子在 x_2 轴上的叠加电场的振幅, 单位间隔是 $\frac{p_0 \times 10^9}{4\pi\epsilon_0}$, 横坐标是 x_2 轴, 单位间隔是 1 mm. 可以发现 x_2 方向的聚焦范围 $\lambda_S \ll \frac{\lambda_C}{2}$, 实现了该方向的超分辨. 三维偶极子分布则可以实现三维超分辨率特性.

如何在狭小的空间内激发出大范围的随机相位? 因为用库仑场直接传输机理来解释超分辨现象时, 如果激发库仑场的偶极子之间的相位是随空间缓变的, 那么, 库仑场随空间也就是缓变的, 随之分辨区域也将增大. 假如图 4(a) 中六个偶极子是同相位的, 则图 4(b) 变成图 5 中较粗的曲线, 聚焦区域 λ_S 随之增大. 图 5 中较细的曲线则是 20 个同相位偶极子的结果, 可以预见 λ_S 将随着体系的增大而增大.

根据 (5) 式可以知道偶极子激发的库仑电场是

全方向的. 任选一个过 z 轴 (极化方向) 的大圆, 圆上电场方向相对于 z 轴的角度记为 ψ . 如图 6, 俯仰角 θ 从 0° 变化到 180° 的过程中, ψ 从 0° 变化到 360° , 电场方向旋转一圈. 大圆绕 z 轴再旋转一圈, 即 φ 从 0° 变化到 360° , 则可知库仑电场是全方向的. 所以, 随机摆放的偶极子之间互相激励振荡的相位是大范围随机的.

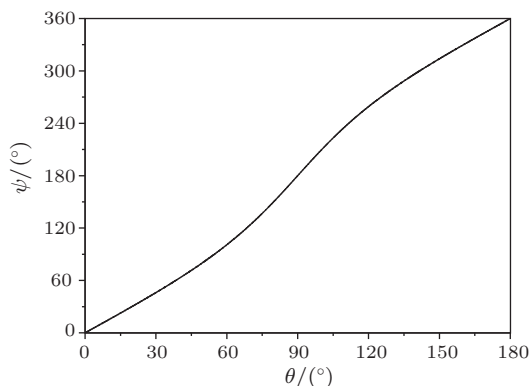


图6 偶极子激发的库仑电场相对于极化轴的角度 ψ 随空间俯仰角 θ 的变化

4 结论

空间超分辨的必要条件是系统存在亚波长结构. 近场亚波长结构对超分辨贡献较大, 远场亚波长结构对超分辨贡献很小, 连续散射界面, 诸如大的腔体对于超分辨几乎没有贡献. 偶极辐射在远场主要表现为辐射场, 在近场主要表现为库仑场. 库仑场传输不受微波衍射极限的限制, 当近场散射体足够精细, 并且相互作用的相位是大范围随机的, 那么库仑场就可以突破微波衍射极限实现时间反演超分辨.

如何设计近场的亚波长结构实现辐射场与库仑场之间的高效转换? 此问题涉及超分辨微结构天线的设计, 是值得进一步深入研究的重要课题.

- [1] Parvulescu A, Clay C S 1965 *Radio Elec. Eng.* **29** 223
- [2] Derode A, Roux P, Fink M 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4206
- [3] Kim S, Edelmann G F, Kuperman W A, Hodgkiss W S, Song H C 2001 *J. Acoust. Soc. Amer.* **110** 820
- [4] Edelmann G F, Akal T, Hodgkiss W S, Kim S, Kuperman W A, Song H C 2002 *IEEE J. Ocean. Eng.* **27** 602

- [5] Chang Y, Fetterman H R, Newberg I L, Panaretos S K 1998 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **46** 1910
- [6] Lerosey G, Rosny J D, Tourin A, Derode A, Montaldo G, Fink M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 1939041
- [7] Lerosey G, Rosny J D, Tourin A, Fink M 2007 *Science* **315** 1119
- [8] Ge G D, Wang B Z, Huang H Y, Zheng G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58**

- 8249 (in Chinese) [葛广顶, 王秉中, 黄海燕, 郑罡 2009 物理学报 **58** 8249]
- [9] Oestges C, Kim A D, Papanicolaou G, Paulraj A J 2005 *IEEE Trans. Antennas Propagation* **53** 283
- [10] Rosny J D, Lerosey G, Fink M 2010 *IEEE Trans. Antennas Propagation* **58** 3139
- [11] Girard C, Courjon D 1990 *Phys. Rev. B* **42** 9340
- [12] Girard C, Bouju X 1992 *J. Opt. Soc. Am. A* **9** 298
- [13] Bi D X 1985 *Theory of Electromagnetic Fields* (Beijing: Electronic Industries Press) p347 (in Chinese) [毕德显 1985 电磁场理论 (北京: 电子工业出版社) 第 347 页]

Mechanism of spatial super-resolution of time-reversed microwave system*

Chen Ying-Ming Wang Bing-Zhong[†] Ge Guang-Ding

(Institute of Applied Physics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

(Received 20 December 2010; revised manuscript received 21 March 2011)

Abstract

Time-reversed system with a sub-wavelength structure is one of the necessary conditions for the system to show spatial super-resolution characteristics. In the near field zone, Coulomb field predominates the transmission of signals. The resolution limit of Coulomb field is characterized only by the sizes and the spatial distribution of scatterers, which is useful for obtaining the super-resolution beyond the diffraction limit.

Keywords: time reverse, super-resolution, sub-wavelength structure

PACS: 41.20.Jb, 41.20.-q, 03.50.De

* Project supported by the High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2008AA01Z206), the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20100185110021), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61071031).

[†] E-mail: bzwang@uestc.edu.cn