

线偏振拉盖尔 - 高斯光束的远场发散特性*

周国泉†

(浙江农林大学理学院, 临安 311300)

(2011 年 2 月 22 日收到; 2011 年 3 月 29 日收到修改稿)

利用稳相法和矢量结构理论, 导出了线偏振拉盖尔 - 高斯光束的矢量结构项 TE 项和 TM 项在远场的解析表达式. 进而利用 TE 项和 TM 项的远场能流分布, 给出了 TE 项和 TM 项的功率占总功率比例的度量式, 同时还给出了线偏振拉盖尔 - 高斯光束、TE 项和 TM 项三者远场发散角的解析式以及三者远场发散角间的关系式. 所得到的公式不仅适用于傍轴情形, 而且还适用于非傍轴情形. 通过数值计算, 分析了 TE 项和 TM 项在远场的功率占总功率的比例与参数 f 和模数间的依赖关系; 还分析了拉盖尔 - 高斯光束、TE 项和 TM 项的远场发散角随参数 f 、模数和线偏振角的变化关系. 这一研究从矢量结构本性揭示了线偏振拉盖尔 - 高斯光束的远场发散特性, 丰富了对其传输特性的认识.

关键词: 拉盖尔 - 高斯光束, 远场发散角, 矢量结构

PACS: 42.25Bs, 41.85.Ew

1 引言

在柱坐标系中, 球面激光谐振腔产生的高阶模即为拉盖尔 - 高斯光束^[1]. 拉盖尔 - 高斯光束可用锁频技术^[2]、计算全息技术^[3]、厄米 - 高斯光束经像散模式转换器转换^[4]、模式选择^[5]和空间光调制器^[6]等方法产生. 拉盖尔 - 高斯光束可用于原子俘获^[7]、原子导引^[8]和纳米粒子俘获^[9]等. 拉盖尔 - 高斯光束在自由空间和经傍轴光学系统的传输特性已得到广泛研究^[10-17]. 在傍轴范围内, 拉盖尔 - 高斯光束是用波动方程的缓变近似解表征. 运用微扰级数展开法可给出拉盖尔 - 高斯光束的非傍轴级数解^[18]. 但当束腰宽度很小时, 级数解不能很好地收敛. 运用瑞利衍射积分公式, 也可将拉盖尔 - 高斯光束拓展到非傍轴领域^[19-21], 但是所得到的解析公式在传输距离远大于波长时才是严格的解析结果. 当然, 描述拉盖尔 - 高斯光束还可以直接从麦克斯韦方程组出发. 在此情形下, 拉盖尔 - 高斯光束展示了其矢量结构特性^[22,23]. 本文不采用常用的光束传输的非傍轴矢量矩理论^[24,25], 而另辟溪径从矢量结构出发去研究拉盖尔 - 高斯光束

的远场发散特性, 以丰富了对其传输特性的认识.

2 拉盖尔 - 高斯光束远场矢量结构的发散性

由于线偏振是最常见也是最简单的情形, 因此本文中将拉盖尔 - 高斯光束视为线偏振处理. 在直角坐标系中, 一线偏振拉盖尔 - 高斯光束向自由半空间 $z \geq 0$ 传输, z 轴为光束传输轴. 线偏振拉盖尔 - 高斯光束可分为偶模和奇模. 先考虑偶模, 然后再考虑奇模. 对于偶模线偏振拉盖尔 - 高斯光束, 其在源平面 $z = 0$ 上的电场分布为

$$\begin{bmatrix} E_x(x_0, y_0, 0) \\ E_y(x_0, y_0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}\rho_0}{w_0} \right)^m L_n^m \left(\frac{2\rho_0^2}{w_0^2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{\rho_0^2}{w_0^2} \right) \cos(m\phi_0), \quad (1)$$

式中, $\rho_0 = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$, $\phi_0 = \tan^{-1}(y_0/x_0)$, w_0 为高斯半宽度. Jones 矢量 $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ 表征拉盖尔 - 高

* 国家自然科学基金 (批准号: 61178016) 资助的课题.

† E-mail: zhouguoquan178@sohu.com

斯光束的线偏振态. L_n^m 为连带拉盖尔多项式. n 和 m 分别为径向和角向的模数. (x_0, y_0) 为源平面上的横向直角坐标, (ρ_0, φ_0) 为源平面上的径向和角向坐标. 利用电磁光束的矢量结构理论 [22,23,26-28] 和稳相法 [29], 可将远场偶模拉盖尔 - 高斯光束的电

场表示成 TE 项和 TM 项之和, 即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\text{TE}}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{TM}}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

其中 $\mathbf{E}_{\text{TE}}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{E}_{\text{TM}}(\mathbf{r})$ 分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{TE}}(\mathbf{r}) = & -\frac{i^{2n-m+1} z_r z}{r^2} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2} f r} \right)^m L_n^m \left(\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{4 f^2 r^2} + i k r \right) \\ & \times \cos(m\phi) \sin(\phi - \alpha) (\sin \phi \mathbf{i} - \cos \phi \mathbf{j}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{TM}}(\mathbf{r}) = & -\frac{i^{2n-m+1} z_r}{r^2} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2} f r} \right)^m L_n^m \left(\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{4 f^2 r^2} + i k r \right) \cos(m\phi) \cos(\phi - \alpha) \\ & \times (z \cos \phi \mathbf{i} + z \sin \phi \mathbf{j} - \rho \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 分别为直角坐标系的三个基矢量, $f = 1/kw_0$, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为光波长, $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, $\phi = \tan^{-1}(y/x)$, $z_r = kw_0^2/2$ 为共焦参数. 相应地, 远场偶模拉盖尔 - 高斯光束的磁场也可以表示成 TE 项和 TM 项之和, 即

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{\text{TE}}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_{\text{TM}}(\mathbf{r}), \quad (5)$$

其中 $\mathbf{H}_{\text{TE}}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{H}_{\text{TM}}(\mathbf{r})$ 分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{TE}}(\mathbf{r}) = & -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{i^{2n-m+1} z_r z}{r^3} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2} f r} \right)^m L_n^m \left(\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{4 f^2 r^2} + i k r \right) \cos(m\phi) \sin(\phi - \alpha) \\ & \times (z \cos \phi \mathbf{i} + z \sin \phi \mathbf{j} - \rho \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{TM}}(\mathbf{r}) = & \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{i^{2n-m+1} z_r}{r} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2} f r} \right)^m L_n^m \left(\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{4 f^2 r^2} + i k r \right) \cos(m\phi) \cos(\phi - \alpha) \\ & \times (\sin \phi \mathbf{i} - \cos \phi \mathbf{j}), \end{aligned} \quad (7)$$

式中, ε_0 和 μ_0 分别为真空中的电容率和磁导率. TE 项是指光束的电场垂直于传输轴 (z 轴); 而 TM 项是指与光束相关联的磁场垂直于传输轴. 由于电场的散度条件必须满足以及矢量角谱中平面波谱的偏振方向一定垂直于其波矢, 拉盖尔 - 高斯光束的矢量结构是唯一的. 显然, TE 项和 TM 项在远场正交. 这里所得到的 TE 项和 TM 项不仅适用于傍轴情形, 而且还适用于非傍轴情形.

TE 项和 TM 项在远场的能流分别为

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle_{\text{TE}} = & \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}_{\text{TE}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{\text{TE}}^*(\mathbf{r})]_z \\ = & \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{z_r^2 z^3}{2 r^5} \left(\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right)^m \left[L_n^m \left(\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right) \right]^2 \exp \left(-\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right) \cos^2(m\phi) \sin^2(\phi - \alpha), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\langle S_z \rangle_{\text{TM}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{z_r^2 z}{2 r^3} \left(\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right)^m \left[L_n^m \left(\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right) \right]^2 \exp \left(-\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right) \cos^2(m\phi) \cos^2(\phi - \alpha), \quad (9)$$

式中, Re 表示取实部, 星号表示复共轭. 因此, 偶模线偏振拉盖尔 - 高斯光束在远场的能流为

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle = & \langle S_z \rangle_{\text{TE}} + \langle S_z \rangle_{\text{TM}} \\ = & \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{z_r^2 z}{2 r^5} \left(\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right)^m \left[L_n^m \left(\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right) \right]^2 \exp \left(-\frac{\rho^2}{2 f^2 r^2} \right) \cos^2(m\phi) [z^2 + \rho^2 \cos^2(\phi - \alpha)]. \end{aligned} \quad (10)$$

TE 项的远场功率为

$$P_{\text{TE}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S_z \rangle_{\text{TE}} dx dy. \quad (11)$$

将 (8) 式代入 (11) 式, 可得

$$P_{\text{TE}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\pi z_r^2}{8} \int_0^1 \sqrt{1-\tau} \left(\frac{\tau}{2f^2} \right)^m \left[L_n^m \left(\frac{\tau}{2f^2} \right) \right]^2 \exp \left(-\frac{\tau}{2f^2} \right) d\tau, \quad (12)$$

式中, ρ^2/r^2 已被变量 τ 取代, 但未作任何近似处理. TE 项的功率与线偏振角 α 无关. 要得到 TE 项功率的解析式, 首先得将连带拉盖尔多项式展开 [30]

$$L_n^m \left(\frac{\tau}{2f^2} \right) = \sum_{s=0}^n (-1)^s C_{n+m}^{m-s} \frac{1}{s!} \left(\frac{\tau}{2f^2} \right)^s, \quad (13)$$

式中, $C_{n+m}^{m-s} = (n+m)! / [(n-s)!(m+s)!]$. 其次, 将根式展开 [30]

$$(1-\tau)^a = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} a(a-1) \cdots (a-l+1) \frac{(-1)^l \tau^l}{l!}, \quad \tau < 1. \quad (14)$$

经积分, 最终 TE 项在远场的功率为

$$P_{\text{TE}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\pi z_r^2}{8} \sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{n-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} (T_{s_1+s_2+l+m} - T_{s_1+s_2+l+m+1}) \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}, \quad (15)$$

其中, 多项式 T_m 定义为 [30]

$$T_m = \int_0^1 \exp \left(-\frac{\tau}{2f^2} \right) \tau^m d\tau = (2f^2)^{m+1} \left[m! - \Gamma \left(m+1, \frac{1}{2f^2} \right) \right], \quad (16)$$

式中, $\Gamma(m+1, 1/2f^2)$ 是不完全 Gamma 函数. 类似的, TM 项在远场的功率为

$$P_{\text{TM}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\pi z_r^2}{8} \sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{n-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} T_{s_1+s_2+l+m} \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}. \quad (17)$$

偶模线偏振拉盖尔 - 高斯光束在远场的功率为

$$\begin{aligned} P &= P_{\text{TE}} + P_{\text{TM}} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\pi z_r^2}{8} \sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{n-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} (2T_{s_1+s_2+l+m} - T_{s_1+s_2+l+m+1}) \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m} \end{aligned} \quad (18)$$

TE 项在远场的功率占总功率的百分比为

$$C_{\text{TE}} = \frac{P_{\text{TE}}}{P} = \frac{\sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{n-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} (T_{s_1+s_2+l+m} - T_{s_1+s_2+l+m+1}) \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}}{\sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{n-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} (2T_{s_1+s_2+l+m} - T_{s_1+s_2+l+m+1}) \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}}. \quad (19)$$

TM 项在远场的功率占总功率的百分比为

$$C_{\text{TM}} = \frac{P_{\text{TM}}}{P} = 1 - C_{\text{TE}}. \quad (20)$$

远场发散角的定义为

$$\tan \theta_x = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{W_x(z)}{z}, \quad \tan \theta_y = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{W_y(z)}{z}, \quad (21)$$

其中, $W_x(z)$ 和 $W_y(z)$ 是在 z 平面上的横向光束宽度, 由下式给出:

$$W_j^2(z) = \frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j^2 \langle S_z \rangle dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S_z \rangle dx dy}, \quad j = x \text{ 或 } y. \quad (22)$$

经运算, TE 项的远场发散角为

$$\theta_{x\text{TE}} = \tan^{-1} \left\{ \left[\frac{(1 + 2 \sin^2 \alpha) \sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} T_{s_1+s_2+l+m+1} \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}}{\sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} (T_{s_1+s_2+l+m} - T_{s_1+s_2+l+m+1}) \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}} \right]^{1/2} \right\}, \quad (23)$$

$$\theta_{y\text{TE}} = \tan^{-1} \left\{ \left[\frac{(1 + 2 \cos^2 \alpha) \sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} T_{s_1+s_2+l+m+1} \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}}{\sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} (T_{s_1+s_2+l+m} - T_{s_1+s_2+l+m+1}) \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}} \right]^{1/2} \right\}. \quad (24)$$

类似地, TM 项的远场发散角为

$$\theta_{x\text{TM}} = \tan^{-1} \left\{ \left[\frac{(1 + 2 \cos^2 \alpha) \sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l+1)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} T_{s_1+s_2+l+m+1} \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}}{\sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} T_{s_1+s_2+l+m} \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}} \right]^{1/2} \right\}, \quad (25)$$

$$\theta_{y\text{TM}} = \tan^{-1} \left\{ \left[\frac{(1 + 2 \sin^2 \alpha) \sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l+1)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} T_{s_1+s_2+l+m+1} \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}}{\sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} T_{s_1+s_2+l+m} \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}} \right]^{1/2} \right\}. \quad (26)$$

TE 项、TM 项和偶模线偏振拉盖尔 - 高斯光束的光束宽度之间有如下关系:

$$\begin{aligned} W_j^2(z) &= 4 \left(\frac{P_{\text{TE}}}{P} \frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j^2 \langle S_z \rangle_{\text{TE}} dx dy}{P_{\text{TE}}} + \frac{P_{\text{TM}}}{P} \frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j^2 \langle S_z \rangle_{\text{TM}} dx dy}{P_{\text{TM}}} \right) \\ &= C_{\text{TE}} W_{j\text{TE}}^2(z) + C_{\text{TM}} W_{j\text{TM}}^2(z). \end{aligned} \quad (27)$$

因此, 可利用 TE 项和 TM 项的远场发散角计算偶模线偏振拉盖尔 - 高斯光束的远场发散角

$$\tan^2 \theta_j = C_{\text{TE}} \tan^2 \theta_{j\text{TE}} + C_{\text{TM}} \tan^2 \theta_{j\text{TM}}. \quad (28)$$

偶模线偏振拉盖尔 - 高斯光束远场发散角的具体表达式为

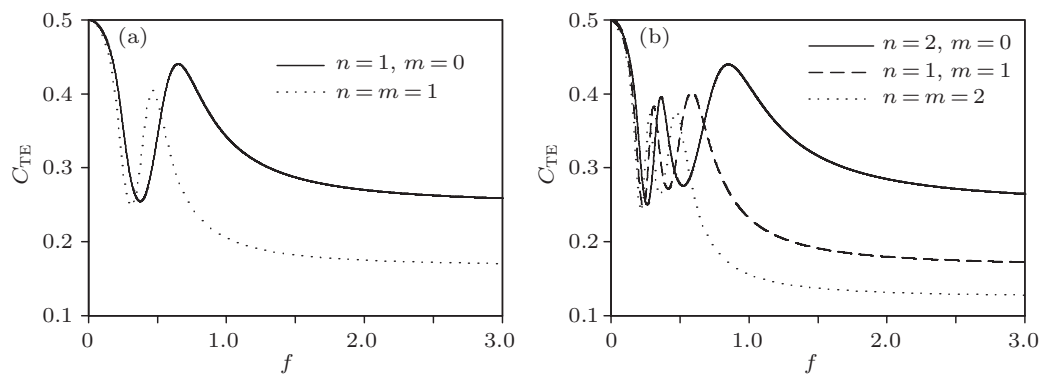
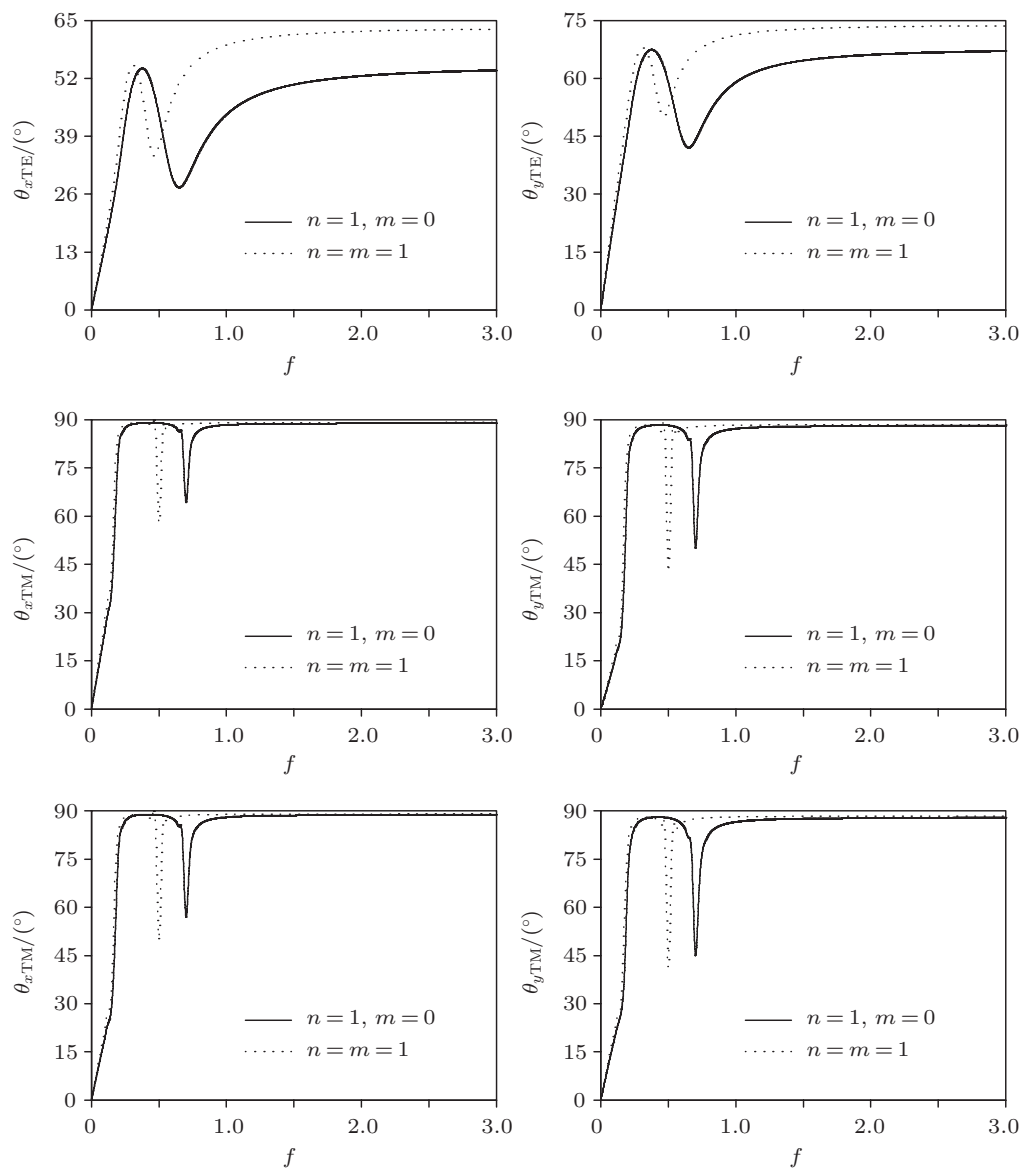
$$\theta_x^- \tan^{-1} \left\{ \left[\frac{A_1 + (1 + 2 \cos^2 \alpha) A_2}{\sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} (2T_{s_1+s_2+l+m} - T_{s_1+s_2+l+m+1}) \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}} \right]^{1/2} \right\}, \quad (29)$$

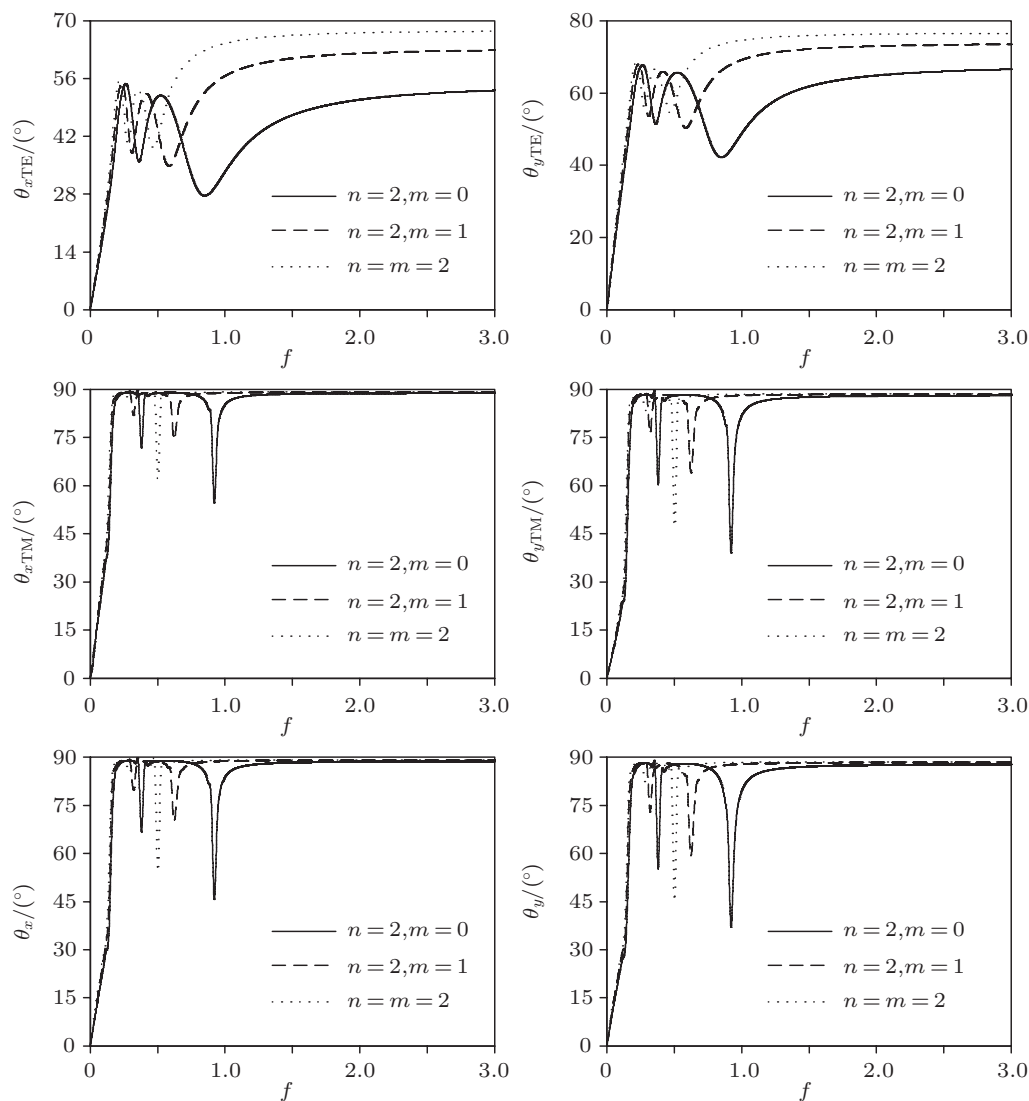
$$\theta_y^- \tan^{-1} \left\{ \left[\frac{A_1 + (1 + 2 \sin^2 \alpha) A_2}{\sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} (2T_{s_1+s_2+l+m} - T_{s_1+s_2+l+m+1}) \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}} \right]^{1/2} \right\}, \quad (30)$$

其中 A_1 和 A_2 分别为

$$A_1 = 4 \sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} (T_{s_1+s_2+l+m+1} - T_{s_1+s_2+l+m+2}) \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}, \quad (31)$$

$$A_2 = \sum_{s_1=0}^n \sum_{s_2=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s_1+s_2} (2l+1)!}{2^{2l} s_1! s_2! (l!)^2} C_{n+m}^{m-s_1} C_{n+m}^{m-s_2} T_{s_1+s_2+l+m+2} \left(\frac{1}{2f^2} \right)^{s_1+s_2+m}. \quad (32)$$


 图1 C_{TE} 随参数 f 的变化关系

 图2 径向模数 $n=1$ 的拉盖尔-高斯光束、TE 项和 TM 项的远场发散角随参数 f 的变化关系


 图3 径向模数 $n = 2$ 的拉盖尔 - 高斯光束、TE 项和 TM 项的远场发散角随参数 f 的变化关系

若为奇模线偏振拉盖尔 - 高斯光束, 其在源平面 $z = 0$ 上的电场分布为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} E_x(x_0, y_0, 0) \\ E_y(x_0, y_0, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}\rho_0}{w_0} \right)^m L_n^m \left(\frac{2\rho_0^2}{w_0^2} \right) \\ & \times \exp \left(-\frac{\rho_0^2}{w_0^2} \right) \sin(m\phi_0). \end{aligned} \quad (33)$$

运用上面相同的方法可得到 TE 项、TM 项和奇模线偏振拉盖尔 - 高斯光束的远场发散角. 它们的计算公式等同于相应的 TE 项、TM 项和偶模线偏振拉盖尔 - 高斯光束远场发散角的计算公式.

3 数值计算与分析

不论偶模和奇模, 线偏振拉盖尔 - 高斯光束及其 TE 项、TM 项的远场发散角计算公式相同, 下面就以偶模为数值计算的例子. C_{TE} 取决于参数 f 和模数. 图 1 给出了 C_{TE} 随参数 f 的变化关系, 图 1(a) 中的实线和虚线分别对应于模数 $n = 1, m = 0$ 和 $n = m = 1$. 图 1(b) 中的实线、短划线和虚线分别对应于模数 $n = 2, m = 0$ 和 $n = 2, m = 1$ 及 $n = m = 2$. 随参数 f 的增大, C_{TE} 总体趋势是减小的. 当 $n = 1$ 时, C_{TE} 对 f 的曲线有一次波动; 当 $n = 2$ 时, C_{TE} 对 f 的曲线有两次波动. 波动的次数是由径向模数 n 所决定, 是拉盖尔多项式的存在导致波动的产生. 只有当 f 等于零

时, 不论模数为何值 C_{TE} 都等于 0.5. 也就是说仅当 $f = 0$, TE 项和 TM 项对总功率的贡献相同. 一般情况下, TM 项对总功率的贡献均要大于 TE 项对总功率的贡献. 从图 1 还可以看出, 角向模数 m 越大, TE 项在 f 相对较大的情况下对总功率的贡献就越小. 由于 $C_{\text{TM}} = 1 - C_{\text{TE}}$, 其随参数 f 的变化曲线就不再给出.

图 2 给出了径向模数 $n = 1$ 的线偏振拉盖尔 - 高斯光束及其 TE 项、TM 项的远场发散角随参数 f 的变化曲线, 图中实线和虚线分别对应于角向模数 $m = 0$ 和 $m = 1$, 线偏振角 α 为零. 随着参数 f 的增大, TE 项两个横向远场发散角先快速增大、后减小、再缓慢增大且趋向于一最大值. 对

于 TE 项而言, x 方向和 y 方向上远场发散角的极大值出现在 f 值相同的地方, 并且随着角向模数 m 的增大, 远场发散角的极大值出现在 f 值略小一点的地方; 而 x 方向和 y 方向上远场发散角的极小值虽出现的位置相同, 但一增大角向模数 m , 极小值出现的位置明显减小, 且极小值也明显增大. 随着角向模数 m 的增大, 远场发散角在 f 值较大时也变得更大. 随着参数 f 的增大, TM 项两个横向远场发散角先快速增大, 然后趋向于一最大值, 但有 1 次下探的过程. 随着角向模数 m 的增大, 远场发散角下探出现在 f 值更小的地方, 除此以外没有别的区别. 由于 TM 项对总功率的贡献要大于 TE 项对总功率的贡献, 所以拉盖尔 - 高斯光束两个横向远

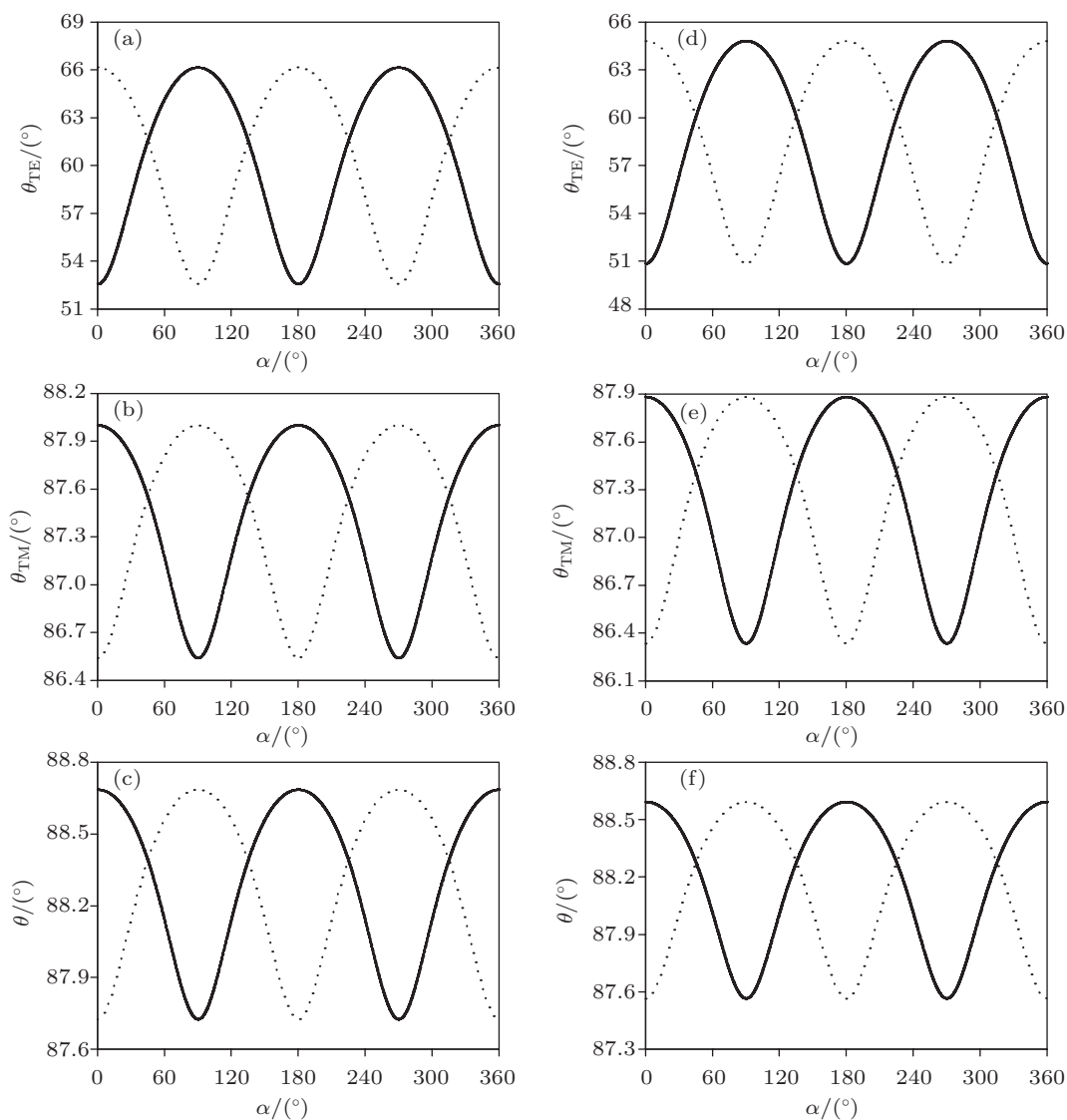


图 4 $f = 2$ 的拉盖尔 - 高斯光束及其 TE 项、TM 项的远场发散角随线偏振角 α 的变化关系

场发散角更接近于 TM 项相应的两个横向远场发散角. 从图 2 还可以看出, x 方向和 y 方向上的远场发散角是不相同的; 其次, 拉盖尔 - 高斯光束和 TM 项的最大远场发散角要比 TE 项的大得多. 图 3 给出了径向模数 $n = 2$ 的线偏振拉盖尔 - 高斯光束及其 TE 项、TM 项的远场发散角随参数 f 的变化曲线, 图中实线、短划线和虚线分别对应于角向模数 $m = 0, m = 1$ 和 $m = 2$, 线偏振角 α 仍为零. 当 $n = 2$ 时, TE 项的远场发散角随参数的 f 增大有两次起伏产生, 第二个波峰处的远场发散角略比第一个波峰处的小, 而第二个波谷处的远场发散角却要比第一个波谷处的小得多. 当 $n=2$ 时, TM 项的远场发散角有两次下探, 且第二次下探要比第一次下探得深. 除上述情况外, 图 3 中各远场发散角随参数 f 的变化规律与图 2 中的类似. 当然, 由于模数不同, 即使参数 f 相同, 远场发散角也不见得一定相同.

图 4 给出了 $f = 2$ 的线偏振拉盖尔 - 高斯光束及其 TE 项、TM 项的远场发散角随线偏振角 α 的变化关系. 图 4(a), (b) 和 (c) 对应于模数 $n = 1, m = 0$; (d), (e) 和 (f) 对应于模数 $n = 2, m = 0$; 实线和虚线分别表示 x 方向和 y 方向上的远场发散角. 拉盖尔 - 高斯光束及 TE 项、TM 项的远场发散角随线偏振角 α 呈周期性变化, 周期为 180° . 当 α 在 $[0, 45^\circ]$, $[135^\circ, 225^\circ]$ 和 $[315^\circ, 360^\circ]$ 范围内, TE 项 y 方向上的远场发散角大于 x 方向上的远场发散角; 当 α 在 $[45^\circ, 135^\circ]$ 和 $[225^\circ, 315^\circ]$ 范围内, TE 项 x 方向上的远场发散角大于 y 方向上的远场发散角. 当 α 在 $[0, 45^\circ]$, $[135^\circ, 225^\circ]$ 和 $[315^\circ, 360^\circ]$ 范围内, TM 项 x 方向上的远场发散角大于 y 方向上的远场发散角; 当 α 在 $[45^\circ, 135^\circ]$ 和 $[225^\circ, 315^\circ]$ 范围内, TM 项 y 方向上的远场发散角大于 x 方向上的远场发散角. 对于拉盖尔 - 高斯光束, 其两个横向远场发散角间的大小关系与 TM 项的相同. 从图 4 还可以看出, 不同模数的拉盖尔 - 高斯光束及其 TE 项、TM 项的远场发散角随线偏振角 α 的变化规律是相同的; 其次, 不同模数的拉盖尔 - 高斯光束及其 TE 项、TM 项的远场发散角

在相同的 f 值和相同的线偏振角时其值也不相同.

4 结 论

利用矢量结构理论和稳相法, 导出了线偏振拉盖尔 - 高斯光束的矢量结构在远场的解析表达式. 进而借助于数学处理技巧, 给出了度量矢量结构项 TE 项和 TM 项功率占总功率比例的解析式, 还给出了线偏振拉盖尔 - 高斯光束、TE 项和 TM 项远场发散角的解析式以及三者远场发散角间的关系通式. 通过数值计算, 分析了 TE 项和 TM 项功率占总功率的比例与参数 f 和模数间的依赖关系, 考量了拉盖尔 - 高斯光束、TE 项和 TM 项的远场发散角随参数 f 、模数和线偏振角的变化关系. 结果表明, TE 项功率占总功率的比例随参数 f 的增大总体趋势是减小的, 但在这减小过程中有起伏波动, 起伏的次数是由径向模数所决定, 角向模数的增大使得起伏出现的位置减小和起伏的幅度降低; TM 项功率占总功率的比例随参数 f 的增大总体趋势是先增大后趋向于一饱和值, 但在这增大过程中也有起伏波动, 波动的次数同样是由径向模数所决定的, 角向模数则影响起伏出现的位置和起伏的幅度; TE 项的远场发散角随参数 f 的增大而增大且最终趋向于一饱和值, 在这增大过程中有起伏, 起伏的次数是由径向模数所决定, 而角向模数则影响远场发散角起伏所导致的极值位置和极值大小; TM 项的远场发散角随参数 f 的增大先快速增大而后趋向于一最大值, 但在这过程中有几次下探, 下探的次数取决于径向模数, 随角向模数的增大远场发散角的下探出现在 f 值更小的地方; 由于 TM 项对总功率的贡献要大于 TE 项对总功率的贡献, 因而导致拉盖尔 - 高斯光束的远场发散角的变化规律更接近于 TM 项远场发散角的变化规律; 拉盖尔 - 高斯光束及其 TE 项、TM 项的远场发散角随线偏振角 α 呈周期性变化, 周期为 180° . 这一研究从矢量结构本性揭示了线偏振拉盖尔 - 高斯光束的远场发散特性, 丰富了对其传输特性的认识.

- [1] Kogelnik H, Li T 1966 *Proc. IEEE* **54** 1312
- [2] Tamm C 1988 *Phys. Rev. A* **38** 5960
- [3] He H, Heckenberg N R, Rubinsztein-Dunlop H 1995 *J. Mod. Opt.* **42** 217
- [4] Hasegawa T, Shimizu T 1999 *Opt. Commun.* **160** 103
- [5] Ishaaya A A, Davidson N, Friesem A A 2005 *Opt. Express* **13** 4952
- [6] Matsumoto N, Ando T, Inoue T, Ohtake Y, Fukuchi N, Hara T 2008 *J. Opt. Soc. Am. A* **25** 1642
- [7] Kuga T, Torii Y, Shiokawa N, Hirano T 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4713
- [8] Arlt J, Hitomi T, Dholakia K 2000 *Appl. Phys. B* **71** 549
- [9] Bradshaw D, Andrews D 2005 *Opt. Lett.* **30** 3039
- [10] Jarutis V, Paskauskas R, Stabinis A 2000 *Opt. Commun.* **184** 105
- [11] Simon R, Agarwal G S 2000 *Opt. Lett.* **25** 1313
- [12] Seshadri S R 2002 *Opt. Lett.* **27** 1872
- [13] Orlov S, Stabinis A 2003 *Opt. Commun.* **226** 97
- [14] Mei Z R, Zhao D M 2004 *J. Opt. Soc. Am. A* **21** 2375
- [15] Mei Z R, Zhao D M, Gu J G 2004 *Opt. Commun.* **240** 337
- [16] Mei Z R, Zhao D M 2004 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **6** 1005
- [17] Sheppard C J R 2009 *Opt. Express* **17** 3690
- [18] Takenaka T, Yokota M, Fukumitsu O 1985 *J. Opt. Soc. Am. A* **2** 826
- [19] Duan K L, Wang B Z, Lü B D 2005 *J. Opt. Soc. Am. A* **22** 1976
- [20] Mei Z R, Zhao D M 2007 *Opt. Express* **15** 11942
- [21] Zhou G Q 2008 *Opt. Laser Technol.* **40** 930
- [22] Zhou G Q 2006 *Opt. Lett.* **31** 2616
- [23] Zhou G Q 2010 *High Power Laser and Particle Beams* **22** 1187 (in Chinese)[周国泉 2010 强激光与粒子束 **22** 1187]
- [24] Zhou G Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4710 (in Chinese) [周国泉 2005 物理学报 **54** 4710]
- [25] Kang X P, Lü B D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4564 (in Chinese) [康水平, 吕百达 2006 物理学报 **55** 4564]
- [26] Martínez-Herrero R, Mejías P M, Bosch S, Carnicer A 2001 *J. Opt. Soc. Am. A* **18** 1678
- [27] Deng D M, Guo Q 2007 *Opt. Lett.* **32** 2711
- [28] Tang H Q, Li X G, Zhou G Q, Zhu K C 2009 *Opt. Commun.* **282** 478
- [29] Carter W H 1972 *J. Opt. Soc. Am.* **62** 1195
- [30] Gradshteyn I S, Ryzhik I M 1980 *Table of integrals, series, and products* (New York: Academic Press)

Far-field divergent properties of linearly polarized Laguerre-Gauss beams*

Zhou Guo-Quan[†]

(School of Sciences, Zhejiang A & F University, Lin'an 311300, China)

(Received 22 February 2011; revised manuscript received 29 March 2011)

Abstract

Based on the method of stationary phase and the theorem of the vectorial structure, the analytical expressions for the vectorial terms, namely the TE and TM terms, of a linearly polarized Laguerre-Gauss beam are derived in the far-field. According to the far-field energy flux distributions of the TE and TM terms, the ratios of the powers of the TE and TM terms to the power of the Laguerre-Gauss beam are given. The analytical formulae of the far-field divergence angles of the Laguerre-Gauss beam and its TE and TM terms are presented, respectively. A relation among the far-field divergence angles of the TE term, the TM term, and the Laguerre-Gauss beam is also derived. The formulae obtained are applicable not only to the paraxial case, but also to the non-paraxial case. The dependences of the ratios of the powers of the TE and TM terms to the whole power on f -parameter and mode number are numerically examined. The effects of the f -parameter, the mode number, and the linearly polarized angle on the far-field divergence angle of the Laguerre-Gauss beam and its TE and TM terms are also analyzed. This research reveals the far-field divergent properties of the linearly polarized Laguerre-Gauss beam from the vectorial structure, and enriches the recognition of the propagation characteristics of the linearly polarized Laguerre-Gauss beam.

Keywords: Laguerre-Gauss beam, far-field divergence angle, vectorial structure

PACS: 42.25Bs, 41.85.Ew

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61178016).

[†] E-mail: zhouguoquan178@sohu.com