

# 具有大范围运动和非线性变形的空间柔性梁在非惯性坐标系下的动力学分析\*

和兴锁<sup>†</sup> 闫业毫 邓峰岩

(西北工业大学工程力学系, 西安 710072)

(2011年3月21日收到; 2011年4月16日收到修改稿)

本文针对具有大范围运动和非线性变形的空间柔性梁, 导出其在运动规律已知的非惯性坐标系下的动力学方程. 通过计算分析, 发现在本文精确模型下, 其各矩阵项较原来的一次耦合模型增加了两类耦合项. 通过仿真研究, 发现由于这两类耦合项的作用造成了附加刚度项  $\mathbf{K}_1$ 、动力刚度项  $\mathbf{K}_d$  的变化, 而刚度项对结构的动力学特性具有较大的影响.

**关键词:** 大范围运动和非线性变形, 空间柔性梁, 非惯性坐标系, 动力学分析

**PACS:** 45.10.-b, 05.45.-a, 45.05.+x

## 1 引言

在航空航天结构中, 柔性梁是应用最广的部件, 因此对于柔性多体系统或刚-柔耦合多体系统的动力学问题已成为多体系统动力学领域的热门课题<sup>[1-4]</sup>. 传统的零次近似模型是基于结构动力学的建模理论而发展起来的一种建模方法, 它和一次耦合模型的区别在于, 一次耦合模型将横向变形的耦合项引入了纵向变形, 因而考虑了离心力的纵向效应<sup>[5-7]</sup>. 在研究柔性多体系统时, 常常要求对非惯性系下的柔性体结构动力学特性进行分析, 这时首先要建立柔性多体系统的动力学模型. 在以往的研究中, 国内外学者大多采用零次近似模型、一次耦合模型或者考虑附加刚度项或变形约束的耦合模型, 这些模型在处理柔性变形的模式时都进行了相应的简化处理. 因而在非惯性坐标系下, 利用这些

经简化变形模式处理的模型对运动柔性结构进行计算、仿真与分析时, 会产生一定的误差. 因而本文将要用作者所建立的精确耦合模型来研究具有大范围运动和非线性变形的空间柔性梁在非惯性坐标系下的动力学特性.

## 2 非惯性坐标系下空间柔性梁的动力学方程

根据有限元理论和拉格朗日方程, 可得空间柔性梁的动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{K}\mathbf{q}_f = \mathbf{Q}, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\mathbf{G}$  为陀螺矩阵,  $\mathbf{K}$  为刚度矩阵,  $\mathbf{Q}$  为广义力阵. 且有

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_{33} = \mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{22} + \mathbf{W}_{33} + \overline{\mathbf{W}}_{22} + \overline{\mathbf{W}}_{33} + \mathbf{W}_{44} + \overline{\mathbf{W}}_{34} + \overline{\mathbf{W}}_{24}, \\ \mathbf{G} &= 2\omega_1(\mathbf{W}_{32} - \mathbf{W}_{23}) + 2\omega_2(\mathbf{W}_{13} - \mathbf{W}_{31}) + 2\omega_3(\mathbf{W}_{21} - \mathbf{W}_{12}) \\ &\quad + (-\hat{\mathbf{W}}_{2,42}^T + \hat{\mathbf{W}}_{2,24}^T + \hat{\mathbf{W}}_{2,42} - \hat{\mathbf{W}}_{2,24})\omega_2 + (-\hat{\mathbf{W}}_{3,43}^T + \hat{\mathbf{W}}_{3,34}^T + \hat{\mathbf{W}}_{3,43} - \hat{\mathbf{W}}_{3,34})\omega_3, \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}_f + \mathbf{K}_d, \quad \mathbf{K}_d = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1, \\ \mathbf{K}_0 &= -\left( -\omega_1^2 (\mathbf{W}_{22} + \mathbf{W}_{33} - \overline{\mathbf{W}}_{22} - \overline{\mathbf{W}}_{33}) \right) \end{aligned}$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10672133) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: xingsuoh@nwpu.edu.cn

$$\begin{aligned}
 & +\frac{1}{2}\omega_2^2\left(2(\mathbf{W}_{11}+\mathbf{W}_{33})+2(\overline{\mathbf{W}}_{22}+\overline{\mathbf{W}}_{33})-\underline{\underline{b\overline{\mathbf{W}}}}_{34}+\underline{\underline{b\overline{\mathbf{W}}}}_{24}-2\overline{\mathbf{W}}_{33}\right) \\
 & +\frac{1}{2}\omega_3^2\left(2(\mathbf{W}_{11}+\mathbf{W}_{22})+2(\overline{\mathbf{W}}_{22}+\overline{\mathbf{W}}_{33})-\underline{\underline{b\overline{\mathbf{W}}}}_{24}+\underline{\underline{b\overline{\mathbf{W}}}}_{34}-2\overline{\mathbf{W}}_{22}\right) \\
 & +\omega_1\omega_2\left(-\underline{\underline{b\mathbf{W}}}_{21}-\underline{\underline{b\overline{\mathbf{W}}}}_{02,12}+\underline{\underline{b\hat{\mathbf{W}}}}_{2,34}+\underline{\underline{b\hat{\mathbf{W}}}}_{3,34}\right)+\omega_1\omega_3\left(-\underline{\underline{b\mathbf{W}}}_{31}-\underline{\underline{b\overline{\mathbf{W}}}}_{03,13}+\underline{\underline{b\hat{\mathbf{W}}}}_{2,24}-\underline{\underline{b\hat{\mathbf{W}}}}_{3,24}\right) \\
 & +\omega_2\omega_3\left(-\underline{\underline{b\mathbf{W}}}_{32}+\frac{1}{2}(\underline{\underline{b\overline{\mathbf{W}}}}_{03,23}+\underline{\underline{b\overline{\mathbf{W}}}}_{02,23})\right)+\dot{\omega}_1\left(\mathbf{W}_{32}-\mathbf{W}_{23}+\overline{\mathbf{W}}_{3,23}^{\text{T}}-\overline{\mathbf{W}}_{2,23}^{\text{T}}\right) \\
 & -\dot{\omega}_2\left(\mathbf{W}_{31}-\mathbf{W}_{13}-\overline{\mathbf{W}}_{3,13}^{\text{T}}-\overline{\mathbf{W}}_{1,3,24}^{\text{T}}+\hat{\mathbf{W}}_{2,42}^{\text{T}}-\hat{\mathbf{W}}_{2,24}^{\text{T}}\right) \\
 & -\dot{\omega}_3\left(\mathbf{W}_{12}-\mathbf{W}_{21}-\overline{\mathbf{W}}_{1,2,34}^{\text{T}}+\overline{\mathbf{W}}_{2,12}^{\text{T}}+\hat{\mathbf{W}}_{3,43}^{\text{T}}-\hat{\mathbf{W}}_{3,34}^{\text{T}}\right), \\
 \mathbf{K}_1 & = (\omega_2^2+\omega_3^2)\mathbf{D}-\left(\underline{\underline{\ddot{r}'_{01}}}-\underline{\underline{\omega_3\dot{r}'_{02}}}+\underline{\underline{\omega_2\dot{r}'_{03}}}\right)\mathbf{C}, \\
 \mathbf{Q} & = \omega_1\omega_2(\overline{\mathbf{Y}}_2^{\text{T}}-\mathbf{Z}_{12}^{\text{T}})+\omega_1\omega_3(\overline{\mathbf{Y}}_3^{\text{T}}-\mathbf{Z}_{13}^{\text{T}})+\omega_2^2\mathbf{Z}_{11}^{\text{T}}+\underline{\underline{\omega_2\omega_3(\overline{\mathbf{Y}}_{34}^{\text{T}}-\overline{\mathbf{Y}}_{24}^{\text{T}})}}+\omega_3^2\mathbf{Z}_{11}^{\text{T}} \\
 & -(\mathbf{Y}_1^{\text{T}}\ddot{r}'_{01}+\mathbf{Y}_2^{\text{T}}\ddot{r}'_{02}+\mathbf{Y}_3^{\text{T}}\ddot{r}'_{03}+(\overline{\mathbf{Y}}_{34}^{\text{T}}+\overline{\mathbf{Y}}_{24}^{\text{T}})\dot{\omega}_1-(\overline{\mathbf{Y}}_3^{\text{T}}+\mathbf{Z}_{13}^{\text{T}})\dot{\omega}_2+(\mathbf{Z}_{12}^{\text{T}}+\overline{\mathbf{Y}}_2^{\text{T}})\dot{\omega}_3) \\
 & +(\omega_2\mathbf{Y}_3^{\text{T}}-\omega_3\mathbf{Y}_2^{\text{T}})\dot{r}'_{01}+(\omega_3\mathbf{Y}_1^{\text{T}}-\omega_1\mathbf{Y}_3^{\text{T}})\dot{r}'_{02}+(\omega_1\mathbf{Y}_2^{\text{T}}-\omega_2\mathbf{Y}_1^{\text{T}})\dot{r}'_{03}.
 \end{aligned}$$

由于本文的完全几何非线性精确模型考虑了梁的扭转以及弯曲变形的相互影响,使得质量矩阵  $\mathbf{M}$ , 陀螺矩阵  $\mathbf{G}$ , 刚度矩阵  $\mathbf{K}$ , 广义力阵  $\mathbf{Q}$  中增加了划线项和双下划线项, 表明动力刚度项  $\mathbf{K}_d$  不仅与受变形模式影响的  $\mathbf{K}_0$  有关, 而且会随着基点速度和角速度的相互耦合而产生变化; 附加刚度项  $\mathbf{K}_1$  和广义力  $\mathbf{Q}$  中含有由于基点运动而产生的角速度和速度的耦合项, 即双下划线项.

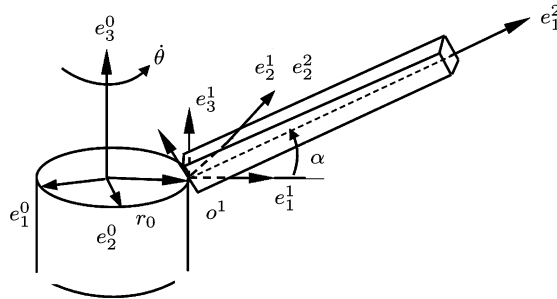


图1 固结在旋转中心刚体上的空间悬臂柔性梁

现考虑一空间悬臂柔性梁<sup>[8]</sup>如图1所示, 该柔性梁固结在中心体半径为  $R$  的旋转刚体上, 其转角、角速度和角加速度分别为  $\theta, \dot{\theta}$  和  $\ddot{\theta}$ . 惯性坐标系  $e^0$  绕  $e_3^0$  转动  $\theta$  角后得到过渡坐标系  $e^1, e^1$  绕  $e_2^1$  转动角度  $\alpha$  后得到连体坐标系  $e^2$ . 在过渡坐标系  $e^1$ 、惯性坐标系  $e^0$  和连体坐标系  $e^2$  下, 连体坐标系  $e^2$  的基点  $o^1$  的位置矢量分别为

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\text{T}}, \tag{2}$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{A}_{01}\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{A}_{12}^{\text{T}}\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0 & \sin(-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}^{\text{T}} \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos\alpha \\ 0 \\ -R\sin\alpha \end{bmatrix}. \tag{4}$$

在过渡坐标系  $e^1$ 、惯性坐标系  $e^0$  和连体坐标系  $e^2$  下, 连体坐标系  $e^2$  的基点  $o^1$  的速度矢量和加速度矢量分别为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & R\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{A}_{01}\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\dot{\theta}\sin\theta \\ R\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}'_0 = \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{A}_{12}^T\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0 & \sin(-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{bmatrix} -R\dot{\theta}^2 & R\ddot{\theta} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{A}_{01}\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\dot{\theta}^2\cos\theta - R\ddot{\theta}\sin\theta \\ -R\dot{\theta}^2\sin\theta + R\ddot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}'_0 = \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{A}_{12}^T\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0 & \sin(-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\dot{\theta}^2\cos\alpha \\ R\ddot{\theta} \\ R\dot{\theta}^2\sin\alpha \end{bmatrix}. \quad (10)$$

连体坐标系  $e^2$  的基点  $o^1$  的角速度矢量和角加速度矢量分别为

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{A}_{01}\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{A}_{12}^T\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0 & \sin(-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\sin\alpha \\ 0 \\ \dot{\theta}\cos\alpha \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ddot{\theta} \end{bmatrix}^T, \quad (14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \boldsymbol{A}_{01}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 & \dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_3 \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{A}_{12}^T\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0 & \sin(-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}\sin\alpha \\ 0 \\ \ddot{\theta}\cos\alpha \end{bmatrix}. \quad (16)$$

取梁的参数如文献 [9]. 设转动规律为 (加速时间  $T = 15$  s)

$$\dot{\theta} = \begin{cases} \frac{\Omega}{T}t - \frac{\Omega}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} & 0 < t \leq T, \\ \Omega & t > T. \end{cases} \quad (17)$$

1) 当  $R = 1$  m 时, 由 (7), (10), (13) 式, 附加刚度项  $\mathbf{K}_1$  受基点速度与角速度耦合作用的影响为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= (\omega_2^2 + \omega_3^2) \mathbf{D} - (\ddot{r}'_{01} - \omega_3 \dot{r}'_{02} + \omega_2 \dot{r}'_{03}) \mathbf{C} \\ &= \dot{\theta}^2 \cos^2 \alpha \mathbf{D} + R \dot{\theta}^2 \cos \alpha \mathbf{C} \\ &\quad + \underline{\underline{R \dot{\theta}^2 \cos \alpha \mathbf{C}}}. \end{aligned} \quad (18)$$

由于广义力  $\mathbf{Q}$  也受基点速度与角速度耦合作用的影响, 所以本文精确模型的各项矩阵  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{Q}$  较一次耦合模型增加了变形耦合项, 即划线项; 且  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{Q}$  与基点速度和角速度耦合作用有关, 由于附加刚度项  $\mathbf{K}_1$  随这种耦合作用增强而变大, 造成动力刚度项  $\mathbf{K}_d$  增加.

在  $R = 1$  m 时, 即基点速度和加速度不为零时. 本文精确模型中新增的变形耦合项和附加刚度项的增加, 使得梁在运动方向即  $\mathbf{e}_2^2$  方向的变形峰值和稳态幅值较一次耦合模型变小, 而非运动方向即  $\mathbf{e}_3^2$  方向, 在新增的变形耦合项和广义力中新增的速度和角速度耦合项的联合作用下, 广义力变大, 因而本文模型的变形较一次耦合模型变大. 随着倾角  $\alpha$  的增大, 横向角速度  $\omega_2 = \dot{\theta} \sin \alpha$  增大, 本文精确模型和一次耦合模型无论加速段还是稳定运动段, 其变形波动都急剧增加; 表明本文精确模型体现了基点速度和角速度的耦合作用, 并且包含了较完整的变形耦合项, 在运动方向主要受到新增变形耦合和新增附加刚度项的作用, 表现为较“刚硬”的变形模式; 在非运动方向由于广义力中的速度和角速度耦合项作用较为明显, 使得梁“变软”.

由于零次模型未考虑附加刚度项  $\mathbf{K}_1$ , 所以转速较大时不能反映动力刚化现象; 由于未考虑动力刚化效应, 所以在给定转速较小时, 无论稳定运动段还是加速段, 本文精确模型和一次耦合模型的峰值和稳定运动的幅均小于零次模型值. 由上述分析可见, 对于空间柔性梁, 需要根据其不同的变形方向分别进行研究讨论. 在运动方向和非运动方向, 变形耦合项、附加刚度项、速度和角速度耦合项起的作用有所不同.

2) 空间梁末端具有初始变形时. 设  $\mathbf{e}_2^2$  方向变形位移为  $v = 0.1$  m,  $\mathbf{e}_3^2$  方向变形位移为  $w = 0.1$  m. 给定  $R = 0$  m,  $1$  m,  $\alpha = \pi/6, \pi/3, \Omega = 2$  rad/s. 本文

计算并比较了利用本文精确模型、一次耦合模型和零次模型计算得到的端点变形位移.

在有初始变形的情况下, 在运动方向, 本文精确模型的变形位移峰值略小于一次耦合模型;  $R = 0$  时, 在非运动方向两种模型无明显差别;  $R \neq 0$  时, 在非运动方向, 本文精确模型变形大于一次耦合模型. 无论  $R$  是否为零, 两种模型即便在运动稳定段 (15 s) 后, 振幅依旧较大, 说明初始变形能够引起结构变形位移的较大波动. 随着运动的稳定, 这种波动并不趋于收敛, 因而应该尽量避免结构的初始变形. 比较不同模型在不同恒定转速, 即  $\dot{\theta} = \Omega, \ddot{\theta} = 0$  时, 频率如表 1 和表 2. A, B, C 对应为本文精确模型、一次耦合模型、考虑  $\mathbf{G}$  项的零次模型.

由分析特征值对应的特征向量知, 当  $\Omega = 0$  时, 本文精确模型的第一、二、三、四、五、六、…… 阶频率分别对应为  $\mathbf{e}_2^2$  方向、 $\mathbf{e}_3^2$  方向弯曲变形模态,  $x$  轴方向的扭转变形模态,  $\mathbf{e}_2^2$  方向、 $\mathbf{e}_3^2$  方向弯曲变形模态,  $x$  轴方向的扭转变形模态. 一次耦合模型和零次模型的第一、二、三、四、五、六、…… 阶频率分别对应为  $\mathbf{e}_2^2$  方向、 $\mathbf{e}_3^2$  方向、 $\mathbf{e}_2^2$  方向、 $\mathbf{e}_3^2$  方向、 $\mathbf{e}_2^2$  方向、 $\mathbf{e}_3^2$  方向的弯曲变形模态.

利用本文精确模型得到的在  $\Omega \neq 0$  时, 第一阶频率对应的  $\mathbf{e}_2^2$  方向、 $\mathbf{e}_3^2$  方向弯曲变形模态接近, 而  $\Omega = 0$  时  $\mathbf{e}_2^2$  方向稍微大些, 因而近似认为第一阶频率主要对应  $\mathbf{e}_2^2$  方向的弯曲变形模态; 在  $\Omega = 0$  时, 对于弯曲变形的模态数值在  $\mathbf{e}_3^2$  方向比  $\mathbf{e}_2^2$  方向大些, 因而近似认为第二阶频率主要对应  $\mathbf{e}_3^2$  方向弯曲变形模态; 类似地可得到第四、五、六、七、…… 阶频率主要对应  $\mathbf{e}_2^2, \mathbf{e}_3^2, \mathbf{e}_2^2$  方向的弯曲变形模态、 $x$  轴方向的扭转变形模态.

由于结构的振动主要受系统低阶频率影响, 为便于比较对照, 选取三种模型的前三阶频率加以比较说明. 对于本文精确模型 (A) 分别对应为  $\mathbf{e}_2^2, \mathbf{e}_3^2$  方向的弯曲变形模态,  $x$  轴方向的扭转变形模态; 对于一次耦合模型 (B)、零次模型 (C) 分别对应为  $\mathbf{e}_2^2, \mathbf{e}_3^2, \mathbf{e}_2^2$  方向的弯曲变形模态.

### 3 算例及结果分析

比较表 2 可发现, 本文精确模型下, 第三阶扭转频率在  $R = 0, 1$  m 时均相同, 说明扭转频率与基点速度、加速度无关, 且随转动速度增加 (即基

点角速度也随之增加)略有降低. 对应于相同的弯曲变形模态, 本文精确模型 (A)、一次耦合模型 (B) 和零次模型 (C) 的第一、二阶频率具有可比性. 当  $R = 0$  时, 随着转速的增加, 本文精确模型 (A) 的第一、二阶频率较一次耦合模型 (B) 略微增大, 三种模型的第一阶频率都随转速的增加而减小, 但零次模型 (C) 的减小速度较快; 三种模型的第二阶频率都随转速的升高而升高, 但零次模型 (C) 升高较慢. 当  $R = 1 \text{ m}$  时, 随着转速的增加, 本文精确模型 (A) 的第一、二阶频率高于一次耦合模型 (B), 三种模型的第一阶频率都随转速的增加而减小, 但

零次模型 (C) 的减小速度较快, 当转速较大时, 零次模型 (C) 无解. 同时注意 B, C 模型的第三阶频率, 可发现 B 模型的频率随着转速的升高而增加, C 模型的频率随着转速的升高而降低, 说明对空间梁而言动力刚化效应表现在高阶频率上.

做本文精确模型与一次耦合模型各阶频率差值 A-B 随转动速度和中心体半径的变化如表 3 和表 4 所示. 随中心体半径增加和转速的升高, 即基点运动速度和基点角速度的提高, 两种模型的频率差异变大.  $R = 0$  时, 单纯的变形耦合项对频率的影响较小.

表 1  $R = 1 \text{ m}$  时,  $\alpha = \pi/6$  第一阶频率随转速的变化, 近似对应为  $e_3^2$  方向的弯曲变形模态

$\Omega/(\text{rad/s})$	0	1	2	3	4	5
A	3.797811	3.706225	3.547652	3.431595	3.377487	3.375668
B	3.797811	3.688866	3.482066	3.292674	3.144959	3.032688
C	3.797811	3.554165	2.937290	1.970846	—	—

表 2  $R = 1 \text{ m}$  时,  $\alpha = \pi/6$  第三阶频率随转速的变化, A 对应为  $x$  轴方向的扭转变形模态, B, C 近似对应为  $e_2^2$  方向的弯曲变形模态

$\Omega/(\text{rad/s})$	0	1	2	3	4	5
A	1.812067	1.812066	1.812063	1.812058	1.812051	1.812041
B	2.382577	2.390128	2.412594	2.449429	2.499804	2.562696
C	2.382577	2.378389	2.365945	2.345572	2.317752	2.283037

表 3 第一阶频率差值随中心体半径  $R$ , 以及转速  $\Omega$  的变化关系

$R/\text{m}$	$\Omega/(\text{rad/s})$	0	1	2	3	4	5
0	0	$2.1245 \times 10^{-6}$	$7.6726 \times 10^{-6}$	$1.6285 \times 10^{-5}$	$2.8285 \times 10^{-5}$	$4.4378 \times 10^{-5}$	
1	0	$1.7359 \times 10^{-2}$	$6.5586 \times 10^{-2}$	$1.3892 \times 10^{-1}$	$2.3253 \times 10^{-1}$	$3.4298 \times 10^{-1}$	
2	0	$3.4473 \times 10^{-2}$	$1.2782 \times 10^{-1}$	$2.6366 \times 10^{-1}$	$4.2790 \times 10^{-1}$	$6.1047 \times 10^{-1}$	
3	0	$5.1353 \times 10^{-2}$	$1.8708 \times 10^{-1}$	$3.7739 \times 10^{-1}$	$5.9861 \times 10^{-1}$	$8.3581 \times 10^{-1}$	
4	0	$6.8006 \times 10^{-2}$	$2.4371 \times 10^{-1}$	$4.8232 \times 10^{-1}$	$7.5157 \times 10^{-1}$	1.0337	
5	0	$8.4438 \times 10^{-2}$	$2.9796 \times 10^{-1}$	$5.8000 \times 10^{-1}$	$8.9106 \times 10^{-1}$	1.2119	

表 4 第二阶频率差值随中心体半径  $R$ , 以及转速  $\Omega$  的变化关系

$R/\text{m}$	$\Omega/(\text{rad/s})$	0	1	2	3	4	5
0	0	$1.5788 \times 10^{-7}$	$1.3373 \times 10^{-6}$	$3.6495 \times 10^{-6}$	$6.6529 \times 10^{-6}$	$9.9580 \times 10^{-6}$	
1	0	$1.2767 \times 10^{-2}$	$5.0069 \times 10^{-2}$	$1.0630 \times 10^{-1}$	$1.7441 \times 10^{-1}$	$2.4894 \times 10^{-1}$	
2	0	$2.5446 \times 10^{-2}$	$9.8815 \times 10^{-2}$	$2.0705 \times 10^{-1}$	$3.3520 \times 10^{-1}$	$4.7285 \times 10^{-1}$	
3	0	$3.8036 \times 10^{-2}$	$1.4632 \times 10^{-1}$	$3.0287 \times 10^{-1}$	$4.8458 \times 10^{-1}$	$6.7684 \times 10^{-1}$	
4	0	$5.0539 \times 10^{-2}$	$1.9264 \times 10^{-1}$	$3.9426 \times 10^{-1}$	$6.2424 \times 10^{-1}$	$8.6458 \times 10^{-1}$	
5	0	$6.2957 \times 10^{-2}$	$2.3785 \times 10^{-1}$	$4.8167 \times 10^{-1}$	$7.5555 \times 10^{-1}$	1.0388	

## 4 结论

本文研究结果表明,考虑完全几何非线性变形后,模型所增加的变形耦合项并未产生显著的软化效应,相反使得梁略为“刚硬”,同时,在本文精确模型下,新增的基点速度与角速度的耦合项,在运动速度较大情况下会对模型的计算仿真带来影响.

本文计算和仿真结果表明,无论采用本文精确

模型、一次耦合模型还是零次模型,对于具有初始变形的柔性梁,其变形运动均具有较大的波动,即使刚体运动恒定后,其变形运动依然有很大的波动,说明应该避免结构初始变形.

计算和仿真结果也表明,在非运动方向,变形耦合以及基点速度和角速度的耦合作用使得梁“变软”.但在运动方向,空间柔性梁结构的变形耦合项以及基点速度和角速度耦合项都有使梁“刚化”的趋势.

- 
- [1] Fu J L, Chen B Y, Tang Y F, Fu H 2008 *Chin. Phys.* **17** 3942
- [2] Fu J L, Chen L Q, Liu R W 2004 *Chin. Phys.* **13** 1748
- [3] Liu Y Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1
- [4] Fu J L, Chen B Y, Fu H, Zhao G L, Liu R W, Zhu Z Y, 2011 *Sci. Chin. Phys. Mech. Astron.* **54** 288
- [5] Fu J L, Chen B Y, Chen L Q 2010 *Chin. Phys. Mech. Astron.* **53** 1687
- [6] He X S, Deng F Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1 (in Chinese) [和兴锁, 邓峰岩 2009 物理学报 **59** 1]
- [7] He X S, Deng F Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1434 (in Chinese) [和兴锁, 邓峰岩 2010 物理学报 **59** 1434]
- [8] Liu J Y 2000 *Ph. D. Thesis* (Shanghai: Shanghai Jiao tong University), (in Chinese) [刘锦阳 2000 博士论文, (上海: 上海交通大学)]
- [9] Deng F Y, He X S, Li L, Zhang J 2007 *Multibody Syst. Dyn.* **18** 559

# Analysis of dynamic properties of a spatial flexible beam with large overall motion and nonlinear deformation in non-inertial reference frame\*

He Xing-Suo<sup>†</sup> Yan Ye-Hao Deng Feng-Yan

(Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 21 March 2011; revised manuscript received 16 April 2011)

## Abstract

In this paper, the dynamic properties of a spatial flexible beam with large overall motion and nonlinear deformation in non-inertial reference frame are investigated. The dynamic response of the present model is compared with those of zero-order approximate model and one-order coupling model. Then changing of dynamic stiffening terms due to the new coupling terms is discussed according to different models. At the same time, the effect of initial static deformation on the tip is considered to study the vibrant deformation of flexible beam. In addition, when the overall motion is free, the rigid-flexible coupling dynamic theory is extended to spatial structure from planar structure. The difference among zero-order approximate model, one-order coupling model and the present exact model is revealed by the frequency spectrum analysis method and concludes that the speed of overall motion is a vital cause for the difference among different models. And the dynamic stiffening phenomenon still exists in a rigid-flexible coupling system while the overall motion is free.

**Keywords:** large overall motion and nonlinear deformation, spatial flexible beam, non-inertial reference frame, dynamic analysis

**PACS:** 45.10.-b, 05.45.-a, 45.05.+x

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10672133).

<sup>†</sup> E-mail: xingsuoh@nwpu.edu.cn