力学系统的二阶梯度表示*

楼智美 1)† 梅凤翔 2)

1) (绍兴文理学院物理系, 绍兴 312000)

2) (北京理工大学力学系, 北京 100081)

(2011 年 3 月 14 日收到; 2011 年 4 月 23 日收到修改稿)

研究力学系统运动微分方程的梯度表示以及二阶梯度表示. 将完整和非完整力学系统的微分方程在正则坐标下表出. 给出系统成为梯度系统以及二阶梯度系统的条件. 举例说明结果的应用.

关键词: 完整力学系统, 非完整力学系统, 梯度

PACS: 45.10.Hj, 02.30.Hq

1 引 言

关于力学系统对称性与守恒量的研究已取得重要进展, 如文献 [1—22], 但涉及的问题都是整数阶的. 事实上, 在一些实际模型中分数阶模型比整数阶模型更合适 [1,2], 因此, 分数维动力学研究已经成为理论物理, 力学和应用数学等诸多领域的热点问题. 文献 [1] 指出, 任意正阶 $\alpha \neq 1$(包括 α 为整数) 的分数维梯度系统, 都称为分数维的. 文献 [1] 中研究了 Lorenz 方程, Rössler 系统在阶 $\alpha = 2$ 时可当作分数维梯度系统. 可见, 梯度系统和二阶梯度系统是分数维梯度系统的特殊情况, 也是开展分数维动力学研究的基础. 研究力学系统的梯度和二阶梯度表示, 能得到力学系统的势函数, 由势函数可以进一步研究系统的稳定性、分岔等特性. 本文主要研究力学系统的梯度和二阶梯度表示. 首先, 将完整和非完整力学系统的运动微分方程表为正则形式; 其次, 给出方程可表示为梯度系统的条件; 第三, 给出方程可表示为二阶梯度系统的条件; 最后, 给出两个算例以说明结果的应用.

2 系统的运动微分方程

对于完整力学系统, 其运动微分方程可表示成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s, \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{1}$$

其中 $L = L(q, \dot{q})$ 为系统的 Lagrange 函数, $Q_s = Q_s(q, \dot{q})$ 为与广义坐标 q_s 相应的广义力.

引进广义动量和 Hamilton 函数

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, \quad H(q, p) = p_s\dot{q}_s - L, \tag{2}$$

则方程 (1) 可表示为正则形式

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \tilde{Q}_s, \tag{3}$$

其中 $\tilde{Q}_s(q, p) = Q_s(q, \dot{q}(q, p))$ 为正则坐标表示的广义力.

为便于研究系统的梯度表示, 将方程 (3) 表为如下形式:

$$\dot{a}^\mu = \Omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu} + F_\mu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, 2n), \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}
(\Omega^{\mu\nu}) &= \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}, \\
a^s &= q_s, a^{n+s} = p_s,\ F_s = 0, \\
F_{s+n} &= \tilde{Q}_s, \quad (s = 1, 2, \cdots n).
\end{aligned} \tag{5}$$

完整力学系统运动微分方程 (1) 化成一阶形式 (4) 后, 便可研究它的梯度表示以及二阶梯度表示.

对于非完整力学系统, 设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s (s = 1, 2, \cdots, n)$ 来确定. 系统的运动受有 g 个彼此独立稳定的双面理想 Chetaev 型非完整

* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 10932002) 资助的课题.

† E-mail: louzhimei@usx.edu.cn

© 2012 中国物理学会 Chinese Physical Society

约束

$$f_\beta(q,\dot q)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g), \tag{6}$$

系统的运动微分方程可表为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s},\quad (s=1,2,\cdots,n), \tag{7}$$

其中 $L=L(q,\dot q)$ 为系统的 Lagrange 函数, $Q_s=Q_s(q,\dot q)$ 为与坐标 q_s 相应的广义力, λ_β 为约束乘子. 假设系统非奇异, 即设

$$\det\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_s\partial \dot q_k}\Big)\neq 0, \tag{8}$$

则在运动微分方程积分之前, 可求出 λ_β 为 $q,\dot q$ 的函数, 于是方程 (7) 可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\varLambda_s,\quad (s=1,2,\cdots,n), \tag{9}$$

其中广义非完整约束反力 $\varLambda_s$ 已表为 $q,\dot q$ 的函数, 即

$$\varLambda_s=\varLambda_s(q,\dot q)=\lambda_\beta(q,\dot q)\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s}. \tag{10}$$

称方程 (9) 为与非完整系统 (6), (7) 相应的完整系统的运动微分方程. 如果运动的初始条件满足非完整约束方程 (6), 即

$$f_\beta(q_0,\dot q_0)=0, \tag{11}$$

则相应完整系统 (9) 的解就给出非完整系统 (6), (7) 的运动 [3,4]. 因此, 只要研究方程 (9) 的梯度表示. 根据 (2) 式, 方程 (9) 可表为

$$\dot q_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\ \dot p_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\tilde Q_s+\tilde\varLambda_s,\quad (s=1,2,\cdots,n), \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde Q_s(q,p)&=Q_s(q,\dot q(q,p)),\\ \tilde\varLambda_s(q,p)&=\varLambda_s(q,\dot q(q,p)),\end{aligned} \tag{13}$$

进而, 方程 (12) 可表为

$$\dot a^\mu=\varOmega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}+F_\mu,\quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n), \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}(\varOmega^{\mu\nu})&=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & 1_{n\times n}\\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix},\\ a^s&=q_s,\ a^{n+s}=p_s,\\ F_s&=0,\ F_{s+n}=\tilde Q_s(a)+\tilde\varLambda_s(a),\end{aligned} \tag{15}$$

非完整力学系统 (6), (7) 化成一阶形式 (14) 后, 便可研究它的梯度表示以及二阶梯度表示.

3 力学系统的梯度表示

方程 (4), (14) 一般不是一个梯度系统. 如果满足条件

$$\frac{\partial}{\partial a^\rho}\Big(\varOmega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}+F_\mu\Big)-\frac{\partial}{\partial a^\mu}\Big(\varOmega^{\rho\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}+F_\rho\Big)=0,\ \times(\mu,\nu,\rho=1,2,\cdots,2n), \tag{16}$$

则方程 (4), (14) 是一个梯度系统. 进而, 如果还满足条件

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial a^\rho}-\frac{\partial F_\rho}{\partial a^\mu}=0, \tag{17}$$

则 (16) 式成为

$$\frac{\partial}{\partial a^\rho}\Big(\varOmega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}\Big)-\frac{\partial}{\partial a^\mu}\Big(\varOmega^{\rho\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}\Big)=0. \tag{18}$$

在条件 (16) 下, 可求得势函数 $V=V(a)$ 使得

$$\varOmega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}+F_\mu=-\frac{\partial V}{\partial a^\mu}. \tag{19}$$

4 力学系统的二阶梯度表示

方程 (4), (14) 一般不是一个二阶梯度系统. 如果满足条件

$$\frac{\partial^2}{\partial a^{\rho 2}}\Big(\varOmega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}+F_\mu\Big)-\frac{\partial^2}{\partial a^{\mu 2}}\times\Big(\varOmega^{\rho\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}+F_\rho\Big)=0, \tag{20}$$

则方程 (4), (14) 是一个二阶梯度系统. 特别地, 如果还满足条件

$$\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial a^{\rho 2}}-\frac{\partial^2 F_\rho}{\partial a^{\mu 2}}=0, \tag{21}$$

则 (20) 式成为

$$\frac{\partial^2}{\partial a^{\rho 2}}\Big(\varOmega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}\Big)-\frac{\partial^2}{\partial a^{\mu 2}}\Big(\varOmega^{\rho\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}\Big)=0, \tag{22}$$

在条件 (20) 下, 可求得势函数 $V=V(a)$ 使得

$$\varOmega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu}+F_\mu=-\frac{\partial^2 V}{\partial a^{\mu 2}}. \tag{23}$$

5 算 例

为说明上述结果, 给出如下两个算例.

例 1 完整力学系统的 Lagrange 函数和广义力分别为

$$L=\frac12(\dot q_1^2+\dot q_2^2)-\frac12 q_2^2,\ Q_1=-\dot q_2,\ Q_2=0. \tag{24}$$

方程 (3) 给出

$$\dot q_1=p_1,\ \dot q_2=p_2,\ \dot p_1=-p_2,\ \dot p_2=-q_2.$$

方程 (4) 给出

$$\dot a^1=a^3,\ \dot a^2=a^4,\ \dot a^3=-a^4,\ \dot a^4=-a^2.$$

容易验证, 条件 (16) 不满足, 因此, 它不是一个梯度系统. 但是, (20) 式成立, 因此, 它是一个二阶梯度系统. 由 (23) 式可求得势函数

$$V = -\frac{1}{2}a^3(a^1)^2 - \frac{1}{2}a^4(a^2)^2 + \frac{1}{2}a^4(a^3)^2 + \frac{1}{2}a^2(a^4)^2. \tag{25}$$

例 2 非完整力学系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),\ Q_1 = \dot{q}_1,\ Q_2 = -2q_1,$$
$$f = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 - q_2 = 0. \tag{26}$$

方程 (7) 给出

$$\ddot{q}_1 = \lambda + \dot{q}_1, \quad \ddot{q}_2 = \lambda - 2q_1,$$

联合约束方程可求得约束乘子

$$\lambda = \frac{1}{2}(\dot{q}_2 - \dot{q}_1 + 2q_1),$$

于是有

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{2}(\dot{q}_2 + \dot{q}_1) + q_1,\ \ddot{q}_2 = \frac{1}{2}(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - q_1.$$

而方程 (14) 给出

$$\dot{a}^1 = a^3, \quad \dot{a}^2 = a^4,$$
$$\dot{a}^3 = \frac{1}{2}(a^4 + a^3) + a^1,$$
$$\dot{a}^4 = \frac{1}{2}(a^4 - a^3) + a^1.$$

容易验证 (16) 式不成立, 因此它不是一个梯度系统. 但是, (20) 式成立, 因此它是一个二阶梯度系统. 由 (23) 式可求得势函数

$$V = -\frac{1}{2}a^3(a^1)^2 - \frac{1}{2}a^4(a^2)^2 - \frac{1}{2}(a^3)^2(\frac{1}{2}a^4 + a^1) - \frac{1}{12}(a^3)^3 + \frac{1}{2}(a^4)^2(\frac{1}{2}a^3 + a^1) - \frac{1}{12}(a^4)^3. \tag{27}$$

6 结 论

本文将完整和非完整力学系统的运动微分方程表示成正则形式, 给出了力学系统的运动微分方程成为梯度系统以及成为二阶梯度系统的条件. 一般说来, 二阶梯度系统不是一个通常的梯度系统.

[1] Tarasov V E 2010 *Fractional Dynamics* (Beijing: Higher Education Press)

[2] Zhou S, Fu J L, Liu Y S 2010 *Chin. Phys.* B **20** 120301

[3] Novoselov V S 1966 *Variational Methods in Mechanics* (Leningrad: L G V Press) (in Russian)

[4] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础 (北京：北京工业学院出版社)]

[5] Mei F X 2000 *Appl. Mech. Rev.* **53** 283

[6] Lou Z M 2006 *Chin. Phys.* **15** 891

[7] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 1

[8] Zhang R C 2000 *Chin. Phys.* **9** 561

[9] Lou Z M 2007 *Chin. Phys.* **16** 1182

[10] Wang S Y, Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[11] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[12] Mei F X, Zheng G H 2002 *Acta Mech. Sin.* **18** 414

[13] Mei F X 2002 *Chin. Sci. Bull.* **47** 2019

[14] Mei F X, Xu X J 2005 *Chin. Phys.* **14** 449

[15] Xie J F, Gang T Q, Mei F X 2008 *Chin. Phys.* B **17** 390

[16] Sarlet W, Cantrijn F 1981 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **14** 2227

[17] Hojman S A1983 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **16** 1383

[18] Bloch A M, Krishnaprasad P S, Marsden J E, Murray R M 1996 *Arch. Rational Mech. Anal.* **136** 21

[19] Kara A, Mahomed F 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 23

[20] Beksert X, Park J H 2009 *Eur. Phys. J.* C **61** 141

[21] Jiang W A, Li Z J, Lou S K 2011 *Chin. Phys.* B **20** 030202

[22] Dong W S, Huang B X, Fang J H 2011 *Chin. Phys.* B **20** 010204

A second order gradient representation of mechanics system*

Lou Zhi-Mei[1)†] Mei Feng-Xiang[2)]

1) (*Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing* 312000, *China*)

2) (*Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

(Received 14 March 2011; revised manuscript received 23 April 2011)

Abstract

A gradient representation and a second order gradient representation of the mechanics system are studied. The differential equations of motion of the holonomic and nonholonomic mechanics systems are expressed in the canonical coordinates. A condition under which the system can be considered as a gradient system is given. A condition under which the system can be considered as a second order gradient system is obtained. Two examples are given to illustrate the application of the result.

Keywords: holonomic mechanics system, nonholonomic mechanics system, gradient

PACS: 45.10.Hj, 02.30.Hq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10932002).

† E-mail: louzhimei@usx.edu.cn