一类多频激励相对转动非线性动力学模型的重正规化解*

唐荣荣†

(湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

(2012 年 3 月 7 日收到; 2012 年 3 月 31 日收到修改稿)

用摄动理论研究了一类多频激励下具有非线性弹性力和摩阻力的相对转动非线性动力学模型. 探讨了各种组合频率之间的关系, 给出了使多种类型共振同时发生的条件, 并用重正规化方法得出了模型在各相应条件下解的渐近表达式.

关键词: 相对转动, 动力学模型, 重正规, 渐近表达式

PACS: 02.30.MV

1 引 言

在工程领域中广泛存在着相对转动非线性动力学模型. 由于这些模型往往含有许多非线性因素, 具有较为复杂的动力学行为, 因此探讨其解的存在性和稳定性、寻求不同动力响应解的表达式具有重要的理论意义和应用价值.

近年来, 转动系统相对论分析力学的研究日趋活跃, 许多学者致力于探索运用现代数学中的各种方法研究相对转动非线性动力学问题, 已有一些研究成果问世 [1−8]. 其中文献 [1] 用分析方法研究了非线性动力系统的建模, 探讨了多自由度系统的动力学行为. 文献 [2, 3] 用多尺度法研究了外扰激励下相对转动非线性动力系统, 分别得到了相关系统的几类不同共振响应下的近似解. 文献 [4, 5] 应用变量梯度法和平均化法研究了多频激励下的非线性相对转动动力系统, 分别得到了相关系统在一些组合谐波响应下的近似解和组合共振分叉解. 文献 [6, 7] 用同伦映射方法和 Yoshizawa 的非线性系统周期解理论, 研究了具有一般强迫周期力项的相对转动非线性动力学模型, 分别得到了相关模型的任意阶近似解和相应自治系统惟一极限环的存在性以及稳定性条件. 文献 [7] 利用 Melnikov 方法研究了一类相对转动非线性动力系统的混沌表现, 得出了混沌发生的必要条件.

在非线性问题的研究中, 运用现代数学的不同方法探索解决各学科领域中涌现出的非线性模型是应用数学界非常关注的一个问题. 除了上述方法之外, 近年来重正规化法、边界层修正法、匹配法、L-P (Lindstcdt-Poincare) 方法、合成展开法等在解决实际模型的过程中也得以发展和优化 [9−16]. 作者利用上述方法也探讨了一些类型的非线性问题 [17−20].

在相对转动非线性动力系统的研究中, 为了解决由于解的表达式中存在长期项而影响解适用范围的问题, 往往针对系统发生的某种类型的单一共振, 消除长期项获得有效近似解. 但值得充分注意的是: 在多频激励下当非线性系统产生某一种共振时, 在适当的条件下, 系统其他的一些共振也会同时发生. 因此研究系统同时发生多种共振的条件, 探讨在多种共振同时发生时模型近似解的表达式具有理论意义和应用价值. 本文用摄动理论探讨一类多频激励下具有非线性弹性力和摩阻力的二质

* 国家自然科学基金 (批准号: 11071205) 和浙江省自然科学基金 (批准号: Y6090164) 资助的课题.

† E-mail: rrtang@hutc.zj.cn

量相对转动非线性动力学模型, 研究使不同共振同时发生的外激励频率取值条件, 并用重正规化方法给出在相应条件下多种共振同时发生时解的重正规渐近表达式.

对于相对转动动力系统, 在工程中极为关注的是相对转角的变化. 记相对转角差为 $y = \varphi_2 - \varphi_1$, 其中 φ_i 和 $\dot{\varphi}_i, i = 1, 2$ 分别为两个集中质量的转角和转速 [3,4]. 在文献 [3, 4] 中模型的基础上, 以下考虑一类更为广泛的二质量相对转动非线性动力学模型:

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) + \varepsilon(\alpha y'(t) + \beta y'^3(t) + \gamma y^3(t)) = \sum_{i=1}^{2} A_i \cos(\rho_i t + \varphi_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^{2} B_j \cos(\sigma_j t + \psi_j), \tag{1}$$

其中 $\omega_0^2 y(t) + \varepsilon\gamma y^3(t)$ 为非线性弹性力项, $\varepsilon(\alpha y'(t) + \beta y'^3(t))$ 为非线性摩阻力项, $\omega_0, \alpha, \beta, \gamma, \varphi_i, \psi_j, A_i, B_j$ 为正常数, $i = 1, 2, j = 1, 2, \varepsilon$ 为正的小参数. 外激励频率满足

$$[\mathrm{H}_1]\ \rho_i \neq \omega_0, \quad \rho_1 < \rho_2, \quad i = 1, 2,$$
$$[\mathrm{H}_2]\ \sigma_j \neq \omega_0, \quad \sigma_1 < \sigma_2, \quad j = 1, 2.$$

2 主要结果

2.1 方程 (1) 的转化

设 $\tau = \omega(\varepsilon) t$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}. \tag{2}$$

将 (2) 式代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} &\omega^2 y''(\tau) + \omega_0^2 y(\tau) + \varepsilon(\alpha\omega y'(\tau) \\ &+ \beta\omega^3 y'^3(\tau) + \gamma y^3(\tau)) \\ =& \sum_{i=1}^{2} A_i \cos(\rho_i \tau \omega^{-1} + \varphi_i) \\ &+ \varepsilon \sum_{j=1}^{2} B_j \cos(\sigma_j \tau \omega^{-1} + \psi_j). \end{aligned} \tag{3}$$

设

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots, \tag{4}$$

其中 $\omega_l, l = 1, 2, \cdots$ 为待定常数. 并设方程 (3) 解的形式表达式为

$$y(\tau) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \cdots. \tag{5}$$

将 (4), (5) 式代入 (3) 式, 比较 ε 的同次幂系数, 有

$$y_0'' + \omega_0^2 y_0 = \sum_{i=1}^{2} A_i \cos(\rho_i \tau + \varphi_i), \tag{6}$$

$$y_k'' + \omega_0^2 y_k = Q_k(y_\lambda'', y_\mu', y_\nu, \tau, \omega_l) \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{7}$$

其中 $Q_k(y_\lambda'', y_\mu', y_\nu, \tau, \omega_l)$ 是 $y_\lambda'', y_\mu', y_\nu, \tau, \omega_l$ 的连续函数, $0 \leqslant \lambda, \mu, \nu < k, 1 \leqslant l \leqslant k$. 易知当 $k = 1$ 时,

$$\begin{aligned} Q_1 =& -2\omega_1 y_0'' - \alpha y_0' - \beta y_0'^3 - \gamma y_0^3 \\ &+ \omega_1 \sum_{i=1}^{2} A_i \rho_i \sin(\rho_i \tau + \varphi_i) \\ &+ \sum_{j=1}^{2} B_j \cos(\sigma_j t + \psi_j). \end{aligned}$$

由于 $Q_k (k = 1, 2, \cdots)$ 中具有关于 y_0 和 y_0' 的非线性项, 因此 (7) 式的外激励项具有多种形式的组合频率. 当 $\rho_i (i = 1, 2)$ 和 $\sigma_j (j = 1, 2)$ 的取值满足一定条件时, 其中某些频率将达到固有频率 ω_0, 从而使方程的解中产生长期项, 即产生相应的共振现象. 因此需要对 (7) 式中的外激励项分类探讨.

2.2 外激励频率取值对解的性态无影响的项

由非齐次方程理论, 可得 (6) 式的通解为

$$y_0 = C_0 \cos(\omega_0 \tau + \theta) + \sum_{i=1}^{2} \frac{A_i}{\omega_0^2 - \rho_i^2} \cos(\rho_i \tau + \varphi_i), \tag{8}$$

其中 C_0 和 θ 为任意常数. 由 (7), (8) 式得

$$\begin{aligned} y_1'' + \omega_0^2 y_1 = \Bigg\{& 2\omega_1 \bigg[C_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 \tau + \theta) \\ &+ \sum_{i=1}^{2} \frac{A_i \rho_i^2}{\omega_0^2 - \rho_i^2} \cos(\rho_i \tau + \varphi_i) \bigg] \\ &+ \alpha \bigg[\omega_0 C_0 \sin(\omega_0 \tau + \theta) \\ &+ \sum_{i=1}^{2} \frac{A_i \rho_i}{\omega_0^2 - \rho_i^2} \sin(\rho_i \tau + \varphi_i) \bigg] \\ &+ \omega_1 \sum_{i=1}^{2} A_i \rho_i \sin(\rho_i \tau + \varphi_i) \\ &+ \sum_{j=1}^{2} B_j \cos(\sigma_j \tau + \psi_j) \Bigg\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{\beta\left[\omega_0 C_0\sin(\omega_0\tau+\theta)\right.\right.\\
&\left.+\sum_{i=1}^{2}\frac{A_i\rho_i}{\omega_0^2-\rho_i^2}\sin(\rho_i\tau+\varphi_i)\right]^3\\
&-\gamma\left[C_0\cos(\omega_0\tau+\theta)\right.\\
&\left.\left.+\sum_{i=1}^{2}\frac{A_i}{\omega_0^2-\rho_i^2}\cos(\rho_i\tau+\varphi_i)\right]^3\right\}\\
&=f_1(\tau)+f_2(\tau). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

设 $y_1''+\omega_0^2 y_1=f_p(\tau)(p=1,2)$ 的相应特解为 $y_{1,p}$. 为以下讨论方便, 记 $(\omega_0^2-\rho_i^2)^{-1}=C_i(i=1,2)$. 由条件 [$\mathrm{H}_1$], [$\mathrm{H}_2$] 以及 $f_1(\tau)$ 的结构, 易得 $y_1''+\omega_0^2 y_1=f_1(\tau)$ 的特解为

$$
\begin{aligned}
y_{1,1}=&\left\{\omega_0\omega_1 C_0\tau\sin(\omega_0\tau+\theta)\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}\alpha C_0\tau\cos(\omega_0\tau+\theta)\right\}\\
&+\left\{\sum_{i=1}^{2}A_i\rho_i^2 C_i^{-2}\cos(\rho_i\tau+\varphi_i)\right.\\
&\left.+\sum_{i=1}^{2}A_i\rho_i C_i^{-1}(\omega_1+\alpha C_i^{-1})\sin(\rho_i\tau+\varphi_i)\right\}\\
&+\omega_1\sum_{j=1}^{2}B_j G_j^{-1}\cos(\sigma_j\tau+\psi_j)\\
=&\,y_{1,1,1}+y_{1,1,2}+y_{1,1,3}, \qquad (10)
\end{aligned}
$$

其中 $y_{1,1,1}$ 为长期项, $y_{1,1,2}$ 和 $y_{1,1,3}$ 分别为与激励频率 ρ_i 和 σ_j 相关的非长期项, $i,j=1,2$.

$f_2(\tau)$ 由一些组合频率为 $2\omega_0-\rho_i,\omega_0\pm\rho_i\pm\rho_j$, $\rho_i\pm\rho_j\pm\rho_k$ 的项构成, 注意到在条件 [H_1] 下 ρ_i 的取值仍具有充分的自由, 因此这些组合频率与固有频率 ω_0 间具有较为复杂的关系. 因此将 $f_2(\tau)$ 的各项进行分类:

$$
\begin{aligned}
f_2(\tau)=&\,\beta\left[\omega_0 C_0\sin(\omega_0\tau+\theta)\right.\\
&\left.+\sum_{i=1}^{2}A_i C_i\rho_i\sin(\rho_i\tau+\varphi_i)\right]^3\\
&-\gamma\left[C_0\cos(\omega_0\tau+\theta)\right.\\
&\left.+\sum_{i=1}^{2}A_i C_i\cos(\rho_i\tau+\varphi_i)\right]^3\\
=&\,f_{2,1}(\tau)+f_{2,2}(\tau)+f_{2,3}(\tau), \qquad (11)
\end{aligned}
$$

其中 $f_{2,k}(\tau),k=1,2,3$ 分别表示频率显为 ω_0 的项、对应于 $\rho_i(i=1,2)$ 的任意取值所产生的组合频率恒不为 $\pm\omega_0$ 的项、对应 $\rho_i(i=1,2)$ 的不同取值, 相应产生的组合频率需要讨论是否为 $\pm\omega_0$的项.

由 (11) 式得

$$
\begin{aligned}
f_{2,1}(\tau)=&\,\beta\left\{\frac{3}{2}C_0\omega_0\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\sin(\omega_0\tau+\theta)\right.\\
&\left.+C_0^3\omega_0^3\frac{3}{4}\sin(\omega_0\tau+\theta)\right\}\\
&-\gamma\left\{\frac{3}{2}C_0\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\cos(\omega_0\tau+\theta)\right.\\
&\left.+C_0^3\frac{3}{4}\cos(\omega_0\tau+\theta)\right\}.
\end{aligned}
$$

由于 $f_{2,1}(\tau)$ 中各项的频率均为 ω_0, 故这些项均使方程 $y_1''+\omega_0^2 y_1=f_{2,1}(\tau)$ 的解中产生长期项. 易得 $y_1''+\omega_0^2 y_1=f_{2,1}(\tau)$ 的解为

$$
\begin{aligned}
y_{1,2,1}=&-\beta\left[\frac{3}{8}\omega_0^2C_0^3\tau\cos(\omega_0\tau+\theta)\right.\\
&\left.+\frac{3}{4}C_0\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\tau\cos(\omega_0\tau+\theta)\right]\\
&-\gamma\left[\frac{3}{8}\omega_0^{-1}C_0^3\tau\sin(\omega_0\tau+\theta)\right.\\
&\left.+\frac{3}{4}C_0\omega_0^{-1}\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\tau\sin(\omega_0\tau+\theta)\right]\\
=&\,y_{1,2,1(1)}+y_{1,2,1(2)}, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

其中 $y_{1,2,1(1)}$ 和 $y_{1,2,1(2)}$ 分别为与 β 和 γ 相关的长期项.

由 (11) 式得

$$
\begin{aligned}
f_{2,2}(\tau)=&\,\beta\left\{\frac{-1}{4}C_0^3\omega_0^3\cos(3\omega_0\tau+3\theta)\right.\\
&+\frac{3}{2}C_0^2\omega_0^2\sum_{i=1}^{2}A_iC_i\rho_i\sin(\rho_i\tau+\varphi_i)\\
&-\frac{3}{4}C_0^2\omega_0^2\sum_{i=1}^{2}A_iC_i\rho_i\\
&\times\sin((2\omega_0+\rho_i)\tau+(2\theta+\varphi_i))\\
&-\frac{3}{4}C_0\omega_0\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\rho_i^2\\
&\times[\sin((\omega_0+2\rho_i)\tau+(\theta+2\varphi_i))\\
&+\sin((\omega_0-2\rho_i)\tau+(\theta-2\varphi_i))]\\
&-\frac{3}{2}C_0\omega_0A_1A_2C_1C_2\rho_1\rho_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times[\sin((\omega_0+\rho_1+\rho_2)\tau+(\theta+\varphi_1+\varphi_2))\\
&-\sin((\omega_0-\rho_1+\rho_2)\tau+(\theta-\varphi_1-\varphi_2))]\\
&+\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{2}A_i^3C_i^3\rho_i^3\sin(\rho_i\tau+\varphi_i)\\
&+\frac{3}{2}A_1A_2C_1C_2\rho_1\rho_2\,[A_1C_1\rho_1\sin(\rho_2\tau+\varphi_2)\\
&+A_2C_2\rho_2\sin(\rho_1\tau+\varphi_2)]\Big\}\\
&-\gamma\Big\{C_0^3\frac{1}{4}\cos(3\omega_0\tau+3\theta)\\
&+\frac{3}{2}C_0^2\sum_{i=1}^{2}A_iC_i\cos(\rho_i\tau+\varphi_i)\\
&+\frac{3}{4}C_0^2\sum_{i=1}^{2}A_iC_i\cos((2\omega_0+\rho_i)\tau\\
&+(2\theta+\varphi_i))\\
&+\frac{3}{4}C_0\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\,[\cos((\omega_0+2\rho_i)\tau\\
&+(\theta+2\varphi_i))\\
&+\cos((\omega_0-2\rho_i)\tau+(\theta-2\varphi_i))]\\
&+\frac{3}{2}C_0A_1A_2C_1C_2\,[\cos((\omega_0+\rho_1+\rho_2)\tau\\
&+(\theta+\varphi_1+\varphi_2))+\cos((\omega_0-\rho_1+\rho_2)\tau\\
&+(\theta-\varphi_1-\varphi_2))]\\
&+\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{2}A_i^3C_i^3\cos(\rho_i\tau+\varphi_i)\\
&+\frac{3}{2}A_1A_2C_1C_2\,[A_1C_1\cos(\rho_2\tau+\varphi_2)\\
&+A_2C_2\cos(\rho_1\tau+\varphi_2)]\Big\}.
\end{aligned}
$$

由于在条件 [H$_1$] 下, 无论 $\rho_i(i=1,2)$ 怎样取值, 必有 $(2\omega_0+\rho_i)\neq\pm\omega_0$, $(\omega_0\pm2\rho_i)\neq\pm\omega_0$, $(\omega_0+\rho_1+\rho_2)\neq\pm\omega_0$, $(\omega_0-\rho_1+\rho_2)\neq\pm\omega_0$, 于是由非齐次线性方程解的结构知 $f_{2,2}(\tau)$ 中各项均不使方程 $y_1''+\omega_0^2y_1=f_{2,2}(\tau)$ 的解中产生长期项.

为方便以下讨论, 设 $y_1''+\omega_0^2y_1=f_{2,2}(\tau)$ 的解为

$$
y_{1,2,2}=y_{1,2,2(1)}+y_{1,2,2(2)},\tag{13}
$$

其中 $y_{1,2,2(1)}$ 为 $y_1''+\omega_0^2y_1=f_{2,2}(\tau)$ 的解中与 β 相关的项, $y_{1,2,2(2)}$ 为与 γ 相关的项.

利用三角函数恒等变形, 由 (9), (11), (13) 式得

$$
\begin{aligned}
y_{1,2,2(1)}=\beta\Bigg\{&\Bigg[\frac{-1}{4}\frac{C_0^3\omega_0^3}{(\omega_0^2-9\omega_0^2)}\cos(3\omega_0\tau+3\theta)\\
&+\frac{3}{2}C_0^2\omega_0^2\Bigg(\sum_{i=1}^{2}A_iC_i^2\rho_i\sin(\rho_i\tau+\varphi_i)\\
&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{A_iC_i\rho_i}{(\omega_0^2-(2\omega_0+\rho_i)^2)}\\
&\times\sin((2\omega_0+\rho_i)\tau+(2\theta+\varphi_i))\Bigg)\\
&-\frac{3}{4}C_0\omega_0\sum_{i=1}^{2}\frac{A_i^2C_i^2\rho_i^2}{(\omega_0^2-(\omega_0+2\rho_i)^2)}\\
&\times\sin((\omega_0+2\rho_i)\tau+(\theta+2\varphi_i))\\
&-\frac{3}{4}C_0\omega_0\sum_{i=1}^{2}\frac{A_i^2C_i^2\rho_i^2}{(\omega_0^2-(\omega_0-2\rho_i)^2)}\\
&\times\sin((\omega_0-2\rho_i)\tau+(\theta-2\varphi_i))\\
&-\frac{3}{2}C_0\omega_0\frac{A_1A_2C_1C_2\rho_1\rho_2}{(\omega_0^2-(\omega_0+\rho_1+\rho_2)^2)}\\
&\times\sin((\omega_0+\rho_1+\rho_2)\tau+(\theta+\varphi_1+\varphi_2))\\
&+\frac{3}{2}C_0\omega_0\frac{A_1A_2C_1C_2\rho_1\rho_2}{(\omega_0^2-(\omega_0-\rho_1+\rho_2)^2)}\\
&\times\sin((\omega_0-\rho_1+\rho_2)\tau+(\theta-\varphi_1+\varphi_2))\Bigg]\\
&+\frac{3}{2}A_1A_2C_1^2C_2^2\rho_1\rho_2\Bigg[A_1\rho_1\sin(\rho_2\tau+\varphi_2)\\
&+\frac{3}{2}A_2\rho_2\sin(\rho_1\tau+\varphi_1)\Bigg]\\
&+\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{2}A_i^3C_i^4\rho_i^3\sin(\rho_i\tau+\varphi_i)\Bigg\}.
\end{aligned}\tag{14}
$$

类似地, 由 (9), (11), (13) 式得

$$
\begin{aligned}
y_{1,2,2(2)}=-\gamma\Bigg\{&\Bigg[C_0^3\frac{1}{4(\omega_0^2-9\omega_0^2)}\cos(3\omega_0\tau+3\theta)\\
&+\frac{3}{2}C_0^2\sum_{i=1}^{2}A_iC_i^2\cos(\rho_i\tau+\varphi_i)\\
&+\frac{3}{4}C_0^2\sum_{i=1}^{2}\frac{A_iC_i}{(\omega_0^2-(2\omega_0+\rho_i)^2)}\\
&\times\cos((2\omega_0+\rho_i)\tau+(2\theta+\varphi_i))\\
&+\frac{3}{4}C_0\sum_{i=1}^{2}\frac{A_i^2C_i^2}{(\omega_0^2-(\omega_0+2\rho_i)^2)}\\
&\times\cos((\omega_0+2\rho_i)\tau+(\theta+2\varphi_i))\\
&+\frac{3}{4}C_0\sum_{i=1}^{2}\frac{A_i^2C_i^2}{(\omega_0^2-(\omega_0-2\rho_i)^2)}\\
&\times\cos((\omega_0-2\rho_i)\tau+(\theta-2\varphi_i))
\end{aligned}
$$

$$+\frac{3}{2}C_0\frac{A_1A_2C_1C_2}{(\omega_0^2-(\omega_0+\rho_1+\rho_2)^2)}$$
$$\times\cos((\omega_0+\rho_1+\rho_2)\tau+(\theta+\varphi_1+\varphi_2))$$
$$+\frac{3}{2}C_0\frac{A_1A_2C_1C_2}{(\omega_0^2-(\omega_0-\rho_1+\rho_2)^2)}$$
$$\times\cos\left((\omega_0-\rho_1+\rho_2)\,\tau+(\theta-\varphi_1+\varphi_2)\right)\Big]$$
$$+\frac{3}{2}A_1A_2C_1^2C_2^2\left[A_1\cos(\rho_2\tau+\varphi_2)\right.$$
$$\left.+A_2\cos(\rho_1\tau+\varphi_1)\right]$$
$$\left.+\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{2}A_i^3C_i^4\cos(\rho_i\tau+\varphi_i)\right\}. \qquad (15)$$

由于 (14) 和 (15) 式各项均不为长期项, 从而均不导致发生共振.

2.3 外激励频率取值对解的性态有影响的项

$f_{2,3}(\tau)$ 中各项的频率与固有频率 ω_0 的关系随着 $\rho_i(i=1,2)$ 的不同取值而变化. 为方便讨论和应用, 以下分成分别与 β 和 γ 相关的两部分.

由 (11) 式得 $f_{2,3}(\tau)$ 中与 β 相关的项为

$$f_{2,3}^*(\tau)=\beta\left\{\frac{3}{4}\omega_0^2C_0^2\sum_{i=1}^{2}A_iC_i\rho_i\sin\left((2\omega_0-\rho_i)\tau\right.\right.$$
$$\left.+(2\theta-\varphi_i)\right)-\frac{3}{2}\omega_0C_0A_1A_2C_1C_2\rho_1\rho_2$$
$$\times[\sin((\omega_0-\rho_1-\rho_2)\tau+(\theta-\varphi_1-\varphi_2))$$
$$-\sin((\omega_0+\rho_1-\rho_2)\tau+(\theta+\varphi_1-\varphi_2))]$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2}A_i^3C_i^3\rho_i^3\sin(3\rho_i\tau+3\varphi_i)$$
$$-\frac{3}{4}A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2$$
$$\times[\sin((2\rho_1+\rho_2)\tau+(2\varphi_1+\varphi_2))$$
$$-\sin((2\rho_1-\rho_2)\tau+(2\varphi_1-\varphi_2))]$$
$$-\frac{3}{4}A_2^2C_2^2\rho_2^2A_1C_1\rho_1$$
$$\times[\sin((2\rho_2+\rho_1)\tau+(2\varphi_2+\varphi_1))$$
$$\left.-\sin((2\rho_2-\rho_1)\tau+(2\varphi_2-\varphi_1))]\right\}$$
$$=\sum_{d=1}^{10}f_{2,3,d}^*(\tau). \qquad (16)$$

类似地, 得 $f_{2,3}(\tau)$ 中与 γ 相关的项为

$$f_{2,3}^{**}(\tau)=-\gamma\left\{\frac{3}{4}C_0^2\sum_{i=1}^{2}A_iC_i\cos\left((2\omega_0-\rho_i)\tau\right.\right.$$
$$\left.+(2\theta-\varphi_i)\right)+\frac{3}{2}C_0A_1A_2C_1C_2$$
$$\times\left[\cos\left((\omega_0-\rho_1-\rho_2)\,\tau+(\theta-\varphi_1-\varphi_2)\right)\right.$$
$$\left.+\cos\left((\omega_0+\rho_1-\rho_2)\tau+(\theta+\varphi_1-\varphi_2)\right)\right]$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2}A_i^3C_i^3\cos(3\rho_i\tau+3\varphi_i)$$
$$+\frac{3}{4}A_1^2C_1^2A_2C_2$$
$$\times[\cos((2\rho_1+\rho_2)\tau+(2\varphi_1+\varphi_2))$$
$$+\cos((2\rho_1-\rho_2)\tau+(2\varphi_1-\varphi_2))]$$
$$+\frac{3}{4}A_2^2C_2^2A_1C_1$$
$$\times[\cos((2\rho_2+\rho_1)\tau+(2\varphi_2+\varphi_1))$$
$$\left.+\cos((2\rho_2-\rho_1)\tau+(2\varphi_2-\varphi_1))]\right\}$$
$$=\sum_{d=1}^{10}f_{2,3,d}^{**}. \qquad (17)$$

对 (16) 和 (17) 式中每一相同的 d, $f_{2,3,d}^{**}(\tau)$ 与 $f_{2,3,d}^*(\tau)$ 具有相同的频率.

我们注意到, 一方面, 在条件 [H_1] 下, 相对 ρ_1, ρ_2 的不同取值, 对每个确定的 d, 自由项 $f_{2,3,d}^*(\tau)$ 的组合频率 $v_{2,3,d}^*$ 都有两种可能: $v_{2,3,d}^*=\pm\omega_0$ 或 $v_{2,3,d}^*\neq\pm\omega_0$. 在这两种情形下, 方程 $y_1''+\omega_0^2y_1=f_{2,3,d}^*(\tau)$ 解的性态和表达式不同, 当 $v_{2,3,d}^*=\pm\omega_0$ 时产生相应的共振. 类似地, 方程 $y_1''+\omega_0^2y_1=f_{2,3,d}^{**}(\tau)(d=1,2,\cdots,10)$ 解的性态和表达式也均随着其频率 $v_{2,3,d}^{**}$ 与 ω_0 的关系而不同. 另一方面, 在 $\rho_i(i=1,2)$ 取值适当时, 将使多个频率同时达到 $\pm\omega_0$, 从而使多个共振同时发生. 因此, 要得出方程 $y_1''+\omega_0^2y_1=f_{2,3}(\tau)$ 在各种不同情形下解的表达式, 首先须对每一个确定的 d, 得出当组合频率 $v_{2,3,d}^*,v_{2,3,d}^{**}=\pm\omega_0$ 或 $v_{2,3,d}^*,v_{2,3,d}^{**}\neq\pm\omega_0$ 两种情形下的解的不同表达式, 在此基础上进一步确定多项组合频率 $v_{2,3,d}^*$, $v_{2,3,d}^{**}$ 同时达到 $\pm\omega_0$ 的条件, 再在相应条件下得出多个共振同时发生时解的表达式.

2.3.1 对应每个 d, 相应方程在不同情形下解的表达式

以下给出方程 $y_1''+\omega_0^2y_1=f_{2,3,d}^*(\tau)$ 和 $y_1''+\omega_0^2y_1=f_{2,3,d}^{**}(\tau)$ 解的表达式, 分别记为 $y_{1,2,3,d}^*(\tau)$ 和 $y_{1,2,3,d}^{**}(\tau)(d=1,2,\cdots,10)$.

当 $d=1,2$ 时, 由条件 [H_1] 知对任意的 ρ_1,ρ_2, 必有 $2\omega_0-\rho_i\neq\omega_0$, 因此对不同的 ρ_1,ρ_2 只可能有 $2\omega_0-\rho_i=-\omega_0$ 和 $2\omega_0-\rho_i\neq-\omega_0$ 两种情形, 故有

$$y^{*}_{1,2,3,d}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\frac{3}{4}\beta\omega_0^2C_0^2A_iC_i\rho_i}{(\omega_0^2-(2\omega_0-\rho_i)^2)}\sin((2\omega_0-\rho_i)\tau+(2\theta-\varphi_i))=y^{*}_{1,2,3,d(1)}(\tau)\quad\left(\omega_0\neq\dfrac{p_i}{3}\right),\\ \dfrac{3}{8}\beta\omega_0C_0^2A_iC_i\rho_i\tau\cos(\omega_0\tau-(2\theta-\varphi_i))=y^{*}_{1,2,3,d(2)}(\tau)\quad\left(\omega_0=\dfrac{p_i}{3}\right),\end{cases}\tag{18}$$

$$y^{**}_{1,2,3,d}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{-\frac{3}{4}\gamma C_0^2A_iC_i}{(\omega_0^2-(2\omega_0-\rho_i)^2)}\cos((2\omega_0-\rho_i)\tau+(2\theta-\varphi_i))=y^{**}_{1,2,3,d(1)}(\tau)\quad\left(\omega_0\neq\dfrac{p_i}{3}\right),\\ -\dfrac{3}{8}\gamma C_0^2\omega_0^{-1}A_iC_i\tau\sin(\omega_0\tau-(2\theta-\varphi_i))=y^{**}_{1,2,3,d(2)}(\tau)\quad\left(\omega_0=\dfrac{p_i}{3}\right),\end{cases}\tag{19}$$

其中 $d=1$ 时 $i=1$, $d=2$ 时 $i=2$.

当 $d=3$ 时, 由条件 $[\mathrm{H}_1]$ 知, 对任意的 ρ_1,ρ_2, 必有 $(\omega_0-\rho_1-\rho_2)\neq\omega_0$, 故只可能出现 $(\omega_0-\rho_1-\rho_2)=-\omega_0$ 与 $(\omega_0-\rho_1-\rho_2)\neq-\omega_0$ 两种情形, 故有

$$y^{*}_{1,2,3,3}(\tau)=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\beta\omega_0C_0\dfrac{A_1A_2C_1C_2\rho_1\rho_2}{(\omega_0^2-(\omega_0-\rho_1-\rho_2)^2)}\sin((\omega_0-\rho_1-\rho_2)\tau+(\theta-\varphi_1-\varphi_2))\\ =y^{*}_{1,2,3,3(1)}(\tau)\quad\left(\omega_0\neq\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}\right),\\ -\dfrac{3}{4}\beta C_0A_1A_2C_1C_2\rho_1\rho_2\tau\cos(\omega_0\tau-(\theta-\varphi_1-\varphi_2))=y^{*}_{1,2,3,3(2)}(\tau)\quad\left(\omega_0=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}\right)\end{cases}\tag{20}$$

$$y^{**}_{1,2,3,3}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\gamma C_0\dfrac{A_1A_2C_1C_2}{(\omega_0^2-(\omega_0-\rho_1-\rho_2)^2)}\cos\left((\omega_0-\rho_1-\rho_2)\tau+(\theta-\varphi_1-\varphi_2)\right)\\ =y^{**}_{1,2,3,3(1)}(\tau)\quad\left(\omega_0\neq\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}\right),\\ \dfrac{3}{4}\gamma C_0\omega_0^{-1}A_1A_2C_1C_2\tau\sin(\omega_0\tau-(\theta-\varphi_1-\varphi_2))=y^{**}_{1,2,3,3(2)}(\tau)\quad\left(\omega_0=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}\right).\end{cases}\tag{21}$$

当 $d=4$ 时, 由条件 $[\mathrm{H}_1]$ 知 $(\omega_0+\rho_1-\rho_2)\neq\omega_0$, 只可能出现 $(\omega_0+\rho_1-\rho_2)=-\omega_0$ 与 $(\omega_0+\rho_1-\rho_2)\neq-\omega_0$ 两种情形, 故有

$$y^{*}_{1,2,3,4}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\beta\omega_0C_0\dfrac{A_1A_2C_1C_2\rho_1\rho_2}{(\omega_0^2-(\omega_0+\rho_1-\rho_2)^2)}\sin((\omega_0+\rho_1-\rho_2)\tau+(\theta+\varphi_1-\varphi_2))\\ =y^{*}_{1,2,3,4(1)}(\tau)\quad\left(\omega_0\neq\dfrac{\rho_2-\rho_1}{2}\right),\\ \dfrac{3}{4}\beta C_0A_1A_2C_1C_2\rho_1\rho_2\tau\cos(\omega_0\tau-(\theta+\varphi_1-\varphi_2))=y^{*}_{1,2,3,4(2)}(\tau)\quad\left(\omega_0=\dfrac{\rho_2-\rho_1}{2}\right),\end{cases}\tag{22}$$

$$y^{**}_{1,2,3,4}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\gamma C_0\dfrac{A_1A_2C_1C_2}{(\omega_0^2-(\omega_0+\rho_1-\rho_2)^2)}\cos((\omega_0+\rho_1-\rho_2)\tau+(\theta-\varphi_1-\varphi_2))\\ =y^{**}_{1,2,3,4(1)}(\tau)\quad\left(\omega_0\neq\dfrac{\rho_2-\rho_1}{2}\right),\\ \dfrac{3}{4}\gamma C_0\omega_0^{-1}A_1A_2C_1C_2\tau\sin(\omega_0\tau-(\theta+\varphi_1-\varphi_2))=y^{**}_{1,2,3,4(2)}(\tau)\quad\left(\omega_0=\dfrac{\rho_2-\rho_1}{2}\right).\end{cases}\tag{23}$$

当 $d=5,6$ 时, 因对正数 $\rho_i(i=1,2)$ 的不同取值, $3\rho_i$ 只有等于 ω_0 或不等于 ω_0 两种情形, 故有

$$y^{*}_{1,2,3,d}(\tau)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}\beta\dfrac{A_i^3C_i^3\rho_i^3}{(\omega_0^2-9\rho_i^2)}\sin(3\rho_i\tau+3\varphi_i)=y^{*}_{1,2,3,d(1)}(\tau)\quad(\omega_0\neq3\rho_i),\\ \dfrac{1}{8}\beta\omega_0^{-1}A_i^3C_i^3\rho_i^3\tau\cos(\omega_0\tau+3\varphi_i)=y^{*}_{1,2,3,d(2)}(\tau)\quad(\omega_0=3\rho_i),\end{cases}\tag{24}$$

$$y^{**}_{1,2,3,d}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\gamma\dfrac{A_i^3C_i^3}{(\omega_0^2-9\rho_i^2)}\cos(3\rho_i\tau+3\varphi_i)=y^{**}_{1,2,3,d(1)}(\tau)\quad(\omega_0\neq 3\rho_i)\,,\\ \dfrac{1}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_i^3C_i^3\tau\sin(\omega_0\tau+3\varphi_i)=y^{**}_{1,2,3,d(2)}(\tau)\quad(\omega_0=3\rho_i)\,,\end{cases}\tag{25}$$

其中 $d=5$ 时 $i=1, d=6$ 时 $i=2$.

当 $d=7$ 时, 由于 ω_0,ρ_1,ρ_2 均为正常数, 故对任意的 ρ_1,ρ_2, 都有 $2\rho_1+\rho_2\neq-\omega_0$, 对不同的 ρ_1,ρ_2, 只可能有 $(2\rho_1+\rho_2)=\omega_0$ 和 $(2\rho_1+\rho_2)\neq\omega_0$ 两种情形,故有

$$y^{*}_{1,2,3,7}(\tau)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}\beta\dfrac{A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2}{(\omega_0^2-(2\rho_1+\rho_2)^2)}\sin((2\rho_1+\rho_2)\tau+(2\varphi_1+\varphi_2))=y^{*}_{1,2,3,7(1)}(\tau)\\ (\omega_0\neq 2\rho_1+\rho_2)\,,\\ \dfrac{3}{8}\beta\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2\tau\cos(\omega_0\tau+(2\varphi_1+\varphi_2))=y^{*}_{1,2,3,7(2)}(\tau)\\ (\omega_0=2\rho_1+\rho_2)\,,\end{cases}\tag{26}$$

$$y^{**}_{1,2,3,7}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\gamma\dfrac{A_1^2C_1^2A_2C_2}{(\omega_0^2-(2\rho_1+\rho_2)^2)}\cos((2\rho_1+\rho_2)\tau+(2\varphi_1+\varphi_2))=y^{**}_{1,2,3,7(1)}(\tau)\\ (\omega_0\neq 2\rho_1+\rho_2)\,,\\ \dfrac{3}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2A_2C_2\tau\sin(\omega_0\tau+(2\varphi_1+\varphi_2))=y^{**}_{1,2,3,7(2)}(\tau)\\ (\omega_0=2\rho_1+\rho_2)\,.\end{cases}\tag{27}$$

当 $d=8$ 时, 由条件 $[\mathrm{H}_1]$ 知组合频率 $2\rho_1-\rho_2$ 相对于 ρ_1,ρ_2 的不同取值, 可产生 $2\rho_1-\rho_2=\omega_0$, $2\rho_1-\rho_2=-\omega_0$ 或 $2\rho_1-\rho_2\neq\pm\omega_0$ 的三种不同情形, 故有

$$y^{*}_{1,2,3,8}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\beta\dfrac{A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2}{(\omega_0^2-(2\rho_1-\rho_2)^2)}\sin((2\rho_1-\rho_2)\tau+(2\varphi_1-\varphi_2))=y^{*}_{1,2,3,8(1)}(\tau)\\ (\omega_0\neq 2\rho_1-\rho_2\text{且}\omega_0\neq-2\rho_1+\rho_2)\\ -\dfrac{3}{8}\beta\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2\tau\cos(\omega_0\tau+(2\varphi_1-\varphi_2))=y^{*}_{1,2,3,8(2)}(\tau)\\ (\omega_0=2\rho_1-\rho_2)\,,\\ \dfrac{3}{8}\beta\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2\tau\cos(\omega_0\tau-(2\varphi_1-\varphi_2))=y^{*}_{1,2,3,8(3)}(\tau)\\ (\omega_0=-2\rho_1+\rho_2)\,,\end{cases}\tag{28}$$

$$y^{**}_{1,2,3,8}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\gamma\dfrac{A_1^2C_1^2A_2C_2}{(\omega_0^2-(2\rho_1-\rho_2)^2)}\cos((2\rho_1-\rho_2)\tau+(2\varphi_1-\varphi_2))=y^{**}_{1,2,3,8(1)}(\tau)\\ (\omega_0\neq 2\rho_1-\rho_2\text{且}\omega_0\neq-2\rho_1+\rho_2)\,,\\ \dfrac{3}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2A_2C_2\tau\sin(\omega_0\tau+(2\varphi_1-\varphi_2))=y^{**}_{1,2,3,8(2)}(\tau)\quad(\omega_0=2\rho_1-\rho_2)\,,\\ \dfrac{3}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2A_2C_2\tau\sin(\omega_0\tau-(2\varphi_1-\varphi_2))=y^{**}_{1,2,3,8(3)}(\tau)\quad(\omega_0=-2\rho_1+\rho_2)\,.\end{cases}\tag{29}$$

当 $d=9$ 时, 类似于 $d=7$ 的情形, 有

$$y_{1,2,3,9}^{*}(\tau)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}\beta\dfrac{A_2^2C_2^2\rho_2^2A_1C_1\rho_1}{(\omega_0^2-(2\rho_2+\rho_1)^2)}\sin((2\rho_2+\rho_1)\tau+(2\varphi_2+\varphi_1))=y_{1,2,3,9(1)}^{*}(\tau)\\ \quad(\omega_0\neq 2\rho_2+\rho_1),\\ \dfrac{3}{8}\beta\omega_0^{-1}A_2^2C_2^2\rho_2^2A_1C_1\rho_1\tau\cos(\omega_0\tau+(2\varphi_1+\varphi_2))=y_{1,2,3,9(2)}^{*}(\tau)\\ \quad(\omega_0=2\rho_2+\rho_1),\end{cases}\tag{30}$$

$$y_{1,2,3,9}^{**}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\gamma\dfrac{A_2^2C_2^2A_1C_1}{(\omega_0^2-(2\rho_2+\rho_1)^2)}\cos((2\rho_2+\rho_1)\tau+(2\varphi_2+\varphi_1))=y_{1,2,3,9(1)}^{**}(\tau)\\ \quad(\omega_0\neq 2\rho_2+\rho_1),\\ \dfrac{3}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_2^2C_2^2A_1C_1\tau\sin(\omega_0\tau+(2\varphi_1+\varphi_2))=y_{1,2,3,9(2)}^{**}(\tau)\quad(\omega_0=2\rho_2+\rho_1).\end{cases}\tag{31}$$

当 $d=10$ 时, 由条件 $[\mathrm{H}_1]$, 对任意的 ρ_1,ρ_2, 都有 $2\rho_2-\rho_1\neq-\omega_0$. 相对于 ρ_1,ρ_2 的不同取值, 只可能有 $2\rho_2-\rho_1=\omega_0$ 和 $2\rho_2-\rho_1\neq\omega_0$ 两种情形. 故有

$$y_{1,2,3,10}^{*}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\beta\dfrac{A_2^2C_2^2\rho_2^2A_1C_1\rho_1}{(\omega_0^2-(2\rho_2-\rho_1)^2)}\sin((2\rho_2-\rho_1)\tau+(2\varphi_2-\varphi_1))=y_{1,2,3,10(1)}^{*}(\tau)\\ \quad(\omega_0\neq 2\rho_2-\rho_1),\\ -\dfrac{3}{8}\beta\omega_0^{-1}A_2^2C_2^2\rho_2^2A_1C_1\rho_1\tau\cos(\omega_0\tau+(2\varphi_1-\varphi_2))=y_{1,2,3,10(2)}^{*}(\tau)\\ \quad(\omega_0=2\rho_2-\rho_1),\end{cases}\tag{32}$$

$$y_{1,2,3,10}^{**}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\gamma\dfrac{A_2^2C_2^2A_1C_1}{(\omega_0^2-(2\rho_2-\rho_1)^2)}\cos((2\rho_2-\rho_1)\tau+(2\varphi_2-\varphi_1))=y_{1,2,3,10(1)}^{**}(\tau)\\ \quad(\omega_0\neq 2\rho_2-\rho_1),\\ \dfrac{3}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_2^2C_2^2A_1C_1\tau\sin(\omega_0\tau+(2\varphi_2-\varphi_1))=y_{1,2,3,10(2)}^{**}(\tau)\\ \quad(\omega_0=2\rho_2-\rho_1).\end{cases}\tag{33}$$

综上可知, 对 $d=1,2,\cdots,10$, 方程 $y_1''+\omega_0^2y_1=f_{2,3,d}^{*}(\tau)$ 和 $y_1''+\omega_0^2y_1=f_{2,3,d}^{**}(\tau)$ 的解 $y_{1,2,3,d}^{*}$ 和 $y_{1,2,3,d}^{**}$ 完全确定.

2.3.2 多种共振同时发生的条件

在条件 $[\mathrm{H}_1]$ 下, 当 $\rho_i(i=1,2)$ 的取值使 $f_{2,3}(\tau)$ 中的多项频率同时达到 $\pm\omega_0$ 时, 系统多种共振同时发生.

表 1 给出了 $f_{2,3}(\tau)$ 中多项频率同时为 $\pm\omega_0$ 的所有可能出现的情形以及各情形下外激励频率 ρ_1, ρ_2 的取值应满足的条件.

2.4 多种共振同时发生时解的渐近展开式

综上由 (5), (8), (10), (12)—(15), (18)—(33) 式, 可得 (1) 式解的统一渐近表达式为

$$\begin{aligned}y&=y_0+\varepsilon\left[y^{*}+y^{**}+\sum_{d=1}^{10}(y_{1,2,3,d(h)}^{*}+y_{1,2,3,d(h)}^{**})\right]\\&\quad+O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{34}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1$, y^{*} 和 y^{**} 均与外激励频率取值无关, $y^{*}=y_{1,1,2}+y_{1,1,3}+y_{1,2,2(1)}+y_{1,2,2(2)}$ 是非

长期项, $y^{**}=y_{1,1,1}+y_{1,2,1(1)}+y_{1,2,1(2)}$ 是长期项. $\sum\limits_{d=1}^{10}(y^{*}_{1,2,3,d(h)}+y^{**}_{1,2,3,d(h)})$ 中各项均与外激励频率取值相关, 当 h 为 1 时为非长期项, 当 h 为 2 和 3 时为长期项, 这里 h 的取值由 $\rho_i(i=1,2)$ 的取值条件确定.

以下以 $2\rho_1-\rho_2=\omega_0$ 的情形为例, 来展示由上述结论可较为方便地分类求出相应解的表达式. 即首先由表 1 确定其他组合频率可与 $2\rho_1-\rho_2$ 同时达到 ω_0 的所有可能情形, 针对每种情形确定相应的长期项, 利用重正规理论以及表达式中一些待定量的可选择性解决长期项, 得到发生一种或同时发生多种共振情形下相应解的重正规化渐近表达式.

表 1　$f_{2,3}(\tau)$ 中各项频率为 $\pm\omega_0$ 时激励频率 ρ_1,ρ_2 的相应取值条件

	$2\rho_2+\rho_1$	$2\rho_1+\rho_2$	$2\rho_2-\rho_1$	$2\rho_1-\rho_2$	$\rho_2-2\rho_1$	$3\rho_1$	$3\rho_2$	$\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)$	$\frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)$	$\frac{1}{3}\rho_1$	$\frac{1}{3}\rho_2$
$2\rho_2+\rho_1$											
$2\rho_1+\rho_2$			$\rho_2=3\rho_1$ $\omega_0=5\rho_1$								
$2\rho_2-\rho_1$		$\rho_2=3\rho_1$ $\omega_0=5\rho_1$				$\rho_2=2\rho_1$ $\omega_0=3\rho_1$					
$2\rho_1-\rho_2$									$\rho_2=\frac{5}{3}\rho_1$ $\omega_0=\frac{1}{3}\rho_1$	$\rho_2=\frac{5}{3}\rho_1$ $\omega_0=\frac{1}{3}\rho_1$	$\rho_2=\frac{3}{2}\rho_1$ $\omega_0=\frac{1}{2}\rho_1$
$\rho_2-2\rho_1$						$\rho_2=5\rho_1$ $\omega_0=3\rho_1$		$\rho_2=5\rho_1$ $\omega_0=3\rho_1$		$\rho_2=\frac{7}{3}\rho_1$ $\omega_0=\frac{1}{3}\rho_1$	
$3\rho_1$			$\rho_2=2\rho_1$ $\omega_0=3\rho_1$		$\rho_2=5\rho_1$ $\omega_0=3\rho_1$			$\rho_2=5\rho_1$ $\omega_0=3\rho_1$	$\rho_2=7\rho_1$ $\omega_0=3\rho_1$		$\rho_2=9\rho_1$ $\omega_0=3\rho_1$
$3\rho_2$											
$\frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)$					$\rho_2=5\rho_1$ $\omega_0=3\rho_1$	$\rho_2=5\rho_1$ $\omega_0=3\rho_1$					
$\frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)$				$\rho_2=\frac{5}{3}\rho_1$ $\omega_0=\frac{1}{3}\rho_1$		$\rho_2=7\rho_1$	$\omega_0=3\rho_1$			$\rho_2=\frac{5}{3}\rho_1$ $\omega_0=\frac{1}{3}\rho_1$	
$\frac{1}{3}\rho_1$				$\rho_2=\frac{5}{3}\rho_1$ $\omega_0=\frac{1}{3}\rho_1$	$\rho_2=\frac{7}{3}\rho_1$ $\omega_0=\frac{1}{3}\rho_1$				$\rho_2=\frac{5}{3}\rho_1$ $\omega_0=\frac{1}{3}\rho_1$		
$\frac{1}{3}\rho_2$				$\rho_2=\frac{3}{2}\rho_1$ $\omega_0=\frac{1}{2}\rho_1$		$\rho_2=9\rho_1$ $\omega_0=3\rho_1$					

由表 1 知在 $f_{2,3}(\tau)$ 各项所有可能出现的组合频率中, 只有 $\frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)$, $\frac{1}{3}\rho_1$ 和 $\frac{1}{3}\rho_2$ 能在 $\rho_i(i=1,2)$ 适当取值条件下与 $2\rho_1-\rho_2$ 同时为 ω_0. 当 $2\rho_1-\rho_2$ 为 ω_0 时有以下三种情形.

1) $2\rho_1-\rho_2$, $\frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)$, $\frac{1}{3}\rho_1$ 同时为 ω_0

由 [H$_1$] 和表 1 知 $\rho_i(i=1,2)$ 的取值满足条件 $\rho_2=\frac{5}{3}\rho_1$ 且 $\omega_0=\frac{1}{3}\rho_1$ 时, $2\rho_1-\rho_2$, $\frac{1}{2}(\rho_2-\rho_1)$, $\frac{1}{3}\rho_1$ 同时为 ω_0, 由 (5), (8), (10), (12), (14), (15), (18)—(34) 式得此时模型 (1) 解中的长期项为

$$y^{**}+y^{*}_{1,2,3,1(2)}+y^{**}_{1,2,3,1(2)}+y^{*}_{1,2,3,4(2)}+y^{**}_{1,2,3,4(2)}+y^{*}_{1,2,3,8(2)}+y^{**}_{1,2,3,8(2)}.$$

由重正规理论, 令 $\tau\sin(\omega_0\tau+\theta)$ 和 $\tau\cos(\omega_0\tau+\theta)$ 系数为零, 得

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\alpha C_0-\beta\frac{3}{8}\omega_0^2C_0^3-\beta\frac{3}{4}C_0\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\\
&+\frac{3}{8}\beta\omega_0C_0^2A_1C_1\rho_1\cos(3\theta-\varphi_1)\\
&+\frac{3}{8}\gamma C_0^2\omega_0^{-1}A_1C_1\sin(3\theta-\varphi_1)\\
&+\frac{3}{4}\beta C_0A_1A_2C_1C_2\rho_1\rho_2\cos(2\theta+\varphi_1-\varphi_2)\\
&-\frac{3}{4}\gamma C_0\omega_0^{-1}A_1A_2C_1C_2\sin(2\theta+\varphi_1-\varphi_2)\\
&-\frac{3}{8}\beta\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2\cos(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{3}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2A_2C_2\sin(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)\\
&=0,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_0\omega_1C_0-\gamma\left[\frac{3}{8}\omega_0^{-1}C_0^3+\frac{3}{4}C_0\omega_0^{-1}\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\right]\\
&-\frac{3}{8}\gamma C_0^2\omega_0^{-1}A_1C_1\cos(3\theta-\varphi_1)\\
&+\frac{3}{8}\beta\omega_0C_0^2A_1C_1\rho_1\sin(3\theta-\varphi_1)\\
&+\frac{3}{4}\beta C_0A_1A_2C_1C_2\rho_1\rho_2\sin(2\theta+\varphi_1-\varphi_2)\\
&+\frac{3}{4}\gamma C_0\omega_0^{-1}A_1A_2C_1C_2\cos(2\theta+\varphi_1-\varphi_2)\\
&+\frac{3}{8}\beta\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2\sin(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)\\
&+\frac{3}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2A_2C_2\cos(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

此时由 (34)—(36) 式, 得方程 (1) 的重正规化解

$$
\begin{aligned}
&y_{(1)}\\
&=y_0+\varepsilon\left[y_1^*+\sum_{\substack{d=2\\ 且d\neq4,d\neq8}}^{10}(y_{1,2,3,d(1)}^*+y_{1,2,3,d(1)}^{**})\right]\\
&\quad+O(\varepsilon^2),
\end{aligned}
\tag{37}
$$

其中 $0<\varepsilon\ll1$, 任意常数 C_0 和待定常数 ω_1 由 (35) 和 (36) 式确定.

2) $2\rho_1-\rho_2$, $\frac{1}{3}\rho_2$ 同时为 ω_0

由 $[\mathrm{H}_1]$ 和表 1 知 $\rho_i(i=1,2)$ 的取值满足条件 $\rho_2=\frac{3}{2}\rho_1$ 且 $\omega_0=\frac{1}{2}\rho_1$ 时, $2\rho_1-\rho_2$, $\frac{1}{3}\rho_2$ 同时为 ω_0, 由 (5), (8), (10), (12), (14), (15), (18)—(34) 式得此时模型 (1) 式解中的长期项为

$$
\begin{aligned}
&y^{**}+y_{1,2,3,2(2)}^*+y_{1,2,3,2(2)}^{**}\\
&+y_{1,2,3,8(2)}^*+y_{1,2,3,8(2)}^{**}.
\end{aligned}
$$

由重正规理论, 令两类长期项的系数为零, 得

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\alpha C_0-\beta\frac{3}{8}\omega_0^2C_0^3-\beta\frac{3}{4}C_0\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\\
&+\frac{3}{8}\beta\omega_0C_0^2A_2C_2\rho_2\cos(3\theta-\varphi_2)\\
&+\frac{3}{8}\gamma C_0^2\omega_0^{-1}A_2C_2\sin(3\theta-\varphi_2)\\
&-\frac{3}{8}\beta\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2\cos(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)\\
&+\frac{3}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2A_2C_2\sin(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)\\
&=0,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_0\omega_1C_0-\gamma\left[\frac{3}{8}\omega_0^{-1}C_0^3+\frac{3}{4}C_0\omega_0^{-1}\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\right]\\
&+\frac{3}{8}\beta\omega_0C_0^2A_2C_2\rho_2\sin(3\theta-\varphi_2)\\
&-\frac{3}{8}\gamma C_0^2\omega_0^{-1}A_2C_2\cos(3\theta-\varphi_1)\\
&+\frac{3}{8}\beta\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2\sin(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)\\
&+\frac{3}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2A_2C_2\cos(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

此时得方程 (1) 的重正规化解为

$$
\begin{aligned}
&y_{(2)}\\
&=y_0+\varepsilon\left[y^*+\sum_{\substack{d=1\\ 且d\neq2,d\neq8}}^{10}(y_{1,2,3,d(1)}^*+y_{1,2,3,d(1)}^{**})\right]\\
&\quad+O(\varepsilon^2),
\end{aligned}
\tag{40}
$$

其中 $0<\varepsilon\ll1$, 任意常数 C_0 和待定系数 ω_1 由 (38) 和 (39) 式确定.

3) 仅 $2\rho_1-\rho_2=\omega_0$, 其他组合频率均不为 ω_0

由 $[\mathrm{H}_1]$ 和表 1 知 $\rho_i(i=1,2)$ 取值满足条件 $\rho_2\neq\frac{5}{3}\rho_1$ 且 $\rho_2\neq\frac{3}{2}\rho_1$ 时, 在所有的组合频率中不可能存在与 $2\rho_1-\rho_2$ 同时达到 ω_0 的频率, 类似于上述探讨知此时模型 (1) 解中的长期项为 $y^{**}+y_{1,2,3,8(2)}^*+y_{1,2,3,8(2)}^{**}$.

类似地, 由重正规理论, 令两类长期项的系数为零, 得

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\alpha C_0-\beta\frac{3}{8}\omega_0^2C_0^3-\beta\frac{3}{4}C_0\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\\
&-\frac{3}{8}\beta\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2\cos(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)\\
&+\frac{3}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2A_2C_2\sin(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)\\
&=0,
\end{aligned}
\tag{41}
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_0\omega_1C_0-\gamma\left[\frac{3}{8}\omega_0^{-1}C_0^3+\frac{3}{4}C_0\omega_0^{-1}\sum_{i=1}^{2}A_i^2C_i^2\right]\\
&+\frac{3}{8}\beta\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2\rho_1^2A_2C_2\rho_2\\
&\times\sin(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)\\
&+\frac{3}{8}\gamma\omega_0^{-1}A_1^2C_1^2A_2C_2\\
&\times\cos(2\varphi_1-\varphi_2-\theta)\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

此时得方程 (1) 的重正规解为

$$\begin{aligned} & y_{(3)} \\ & = y_0 + \varepsilon\left[y^* + \sum_{\substack{d=1 \\ \text{且}d\neq 8}}^{10}(y^*_{1,2,3,d(1)} + y^{**}_{1,2,3,d(1)})\right] \\ & \quad + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{43}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1, C_0$ 和 ω_1 由 (41) 和 (42) 式确定.

类似地, 对于其他各种发生单一共振或同时发生多种共振的情形, 利用 (5)—(34) 式以及表 1 可较方便地得出模型 (1) 解的重正规渐近展开式.

3 结 论

相对转动系统是工程领域中广泛存在的动力传递基本动力系统, 本文探讨的相对转角的变化问题是工程中极受关注的问题. 多频激励下的相对转动非线性动力系统, 在一定的条件下, 系统将同时发生多种类型的共振, 因此具有较为复杂的动力学行为. 目前相关研究文献中, 以某种单一共振为前提得出解的近似表达式为多见, 而本文用摄动理论探讨了一类在复合多频激励下具有非线性弹性力和摩阻力的二质量相对转动非线性动力学模型, 得出了使不同共振同时发生的外激励频率取值条件, 并在各种相应情形下用重正规化方法给出了多种共振同时发生时相对转角变化的渐近表达式.

由本文 2.4 节中 (35)—(43) 式, 可知在条件 $[\mathrm{H}_1]$, $[\mathrm{H}_2]$ 下非线性模型 (1) 式的一阶渐近解中的长期项仅与具有一般振幅的外激励频率 $\rho_i(i=1,2)$ 的取值有关, 而与小振幅外激励频率 $\sigma_j(j=1,2)$ 无关, 由表 1 及 (18)—(34) 式易知在其他各种情形中也有此结论. 由此揭示了外激励频率 $\rho_i(i=1,2)$ 的取值直接影响系统一阶次共振的发生和类型, 而小振幅外激励频率 $\sigma_j(j=1,2)$ 仅对更高阶次的共振有影响. 故可知在应用中要控制或利用次共振, 调整具有一般振幅的外激励频率 $\rho_i(i=1,2)$ 是有效的.

在本文探讨的模型 (1) 中令 $A_i=0(i=1,2)$, $B_2=0, \psi_1=0$, 即文献 [3] 中研究的具有非线性弹性力项和非线性摩阻力项的谐波激励问题. 在本文探讨的模型 (1) 中令 $\beta=0$, $B_j=0(j=1,2)$, 即文献 [4] 中研究的具有非线性弹性力的相对转动非自治问题. 以上 2.4 节的 (3) 中用重正规化法得到的相应结果与文献 [3, 4] 中应用多尺度法等其他方法得到的相应结果是相符的. 本文用重正规化方法探讨了模型 (1) 式, 其结果丰富了已有文献的结果, 为相关类型的的相对转动动力系统关于共振的分析与控制提供了理论依据, 也为相关类型的非线性模型的研究提供了一种较为有效的方法.

[1] Hu H Y 2000 *Applied Nonlinear Dynamics* (Beijing: Aviation Industry Press) (in Chinese) [胡海岩 2000 应用非线性动力学 (北京: 航空工业出版社)]

[2] Shi P M, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3678 (in Chinese) [时培明, 刘彬 2007 物理学报 **56** 3678]

[3] Shi P M, Liu B, Liu S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4675 (in Chinese) [时培明, 刘彬, 刘爽 2008 物理学报 **57** 4675]

[4] Meng Z, Liu B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1329 (in Chinese) [孟宗, 刘彬 2008 物理学报 **57** 1329]

[5] Yang S P, Yuan X R 1998 *Acta Nonlinear Dynamical Sin.* **3** 223 (in Chinese) [杨绍普, 袁向荣 1998 非线性动力学学报 **3** 223]

[6] Mo J Q, Cheng R J, Ge H X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040203 (in Chinese) [莫嘉琪, 程荣军, 葛红霞 2011 物理学报 **60** 040203]

[7] Shi P M, Liu B, Hou D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1321 (in Chinese) [时培明, 刘彬, 侯东晓 2008 物理学报 **57** 1321]

[8] Wang K, Guan X P, Qiao J M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3648 (in Chinese) [王坤, 关新平, 乔杰敏 2010 物理学报 **59** 3648]

[9] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems* (Basel: Birkhauserm Verlag AG)

[10] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Pertubation* (Amsterdamm: North-Holland Publishing Co.)

[11] Hovhannisyanm G, Vulanovic R 2008 *Nonlinear Stud.* **15** 297

[12] Barbu L, Cosma E 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **351** 392

[13] Xu Y H, Yao J S, Mo J Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 020202 (in Chinese) [许永红, 姚静荪, 莫嘉琪 2012 物理学报 **61** 020202]

[14] Xu H, Chen L H, Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 100201 (in Chinese) [徐惠, 陈丽华, 莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 100201]

[15] Mo J Q, Liu S D, Tang R R 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4403 (in Chinese) [莫嘉琪, 刘树德, 唐荣荣 2010 物理学报 **59** 4403]

[16] Ji Y, Bi Q S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4431 (in Chinese) [季颖, 毕勤胜 2009 物理学报 **58** 4431]

[17] Tang R R 2008 *Acta Math. Sci.* **28** 546 (in Chinese) [唐荣荣 2008 数学物理学报 **28** 546]

[18] Tang R R 2008 *Appl. Math. J.* **31** 232 (in Chinese) [唐荣荣 2008 应用数学学报 **31** 232]

[19] Tang R R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 494 (in Chinese) [唐荣荣 2006 物理学报 **55** 494]

[20] Tang R R 2008 *Acta Math. Sci.* **28** 1128 (in Chinese) [唐荣荣 2008 数学物理学报 **28** 1128]

The renormalization solution for a class of relative rotation nonlinear dynamic model with multi-frequency excitation*

Tang Rong-Rong†

(*Faculty of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou* 313000, *China*)

(Received 7 March 2012; revised manuscript received 31 March 2012)

Abstract

Using the perturbation theory, a class of relative rotation nonlinear dynamical model possessing nonlinear elastic force, friction force and multi-frequency excitation is investigated. The relations for the frequency syntheses are investigated, and the conditions under which multi-typical resonance happens at the same time are given. Using the renormalization method, the asymptotic expansions for the solutions of the model under corresponding conditions are obtained.

Keywords: relative rotation, dynamic model, renormalization method, asymptotic expansions

PACS: 02.30.MV

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11071205) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6090164).

† E-mail: rrtang@hutc.zj.cn