

Kepler 方程的共形不变性、Mei 对称性与守恒量

刘洪伟^{1)2)†} 李玲飞²⁾ 杨士通¹⁾

1) (吉林大学数学研究所, 长春 130012)

2) (东北电力大学理学院, 吉林 132012)

(2011 年 12 月 10 日收到; 2012 年 4 月 4 日收到修改稿)

研究 Kepler 系统在无限小变换下的共形不变性、Mei 对称性. 给出该系统与总能量、角动量不同的新守恒量. 并在广义坐标和广义速度构成的空间中讨论这些守恒量的独立性.

关键词: Kepler 方程, 共形不变性, Lie 对称性, Mei 对称性

PACS: 02.20.Sv, 11.30.-j

1 引言

众所周知, 对于力学系统守恒量的研究是一经典课题. 利用对称性寻求系统的守恒量已成为近年力学领域的一个热门方向. 研究方法主要有 Noether 对称性^[1]、Lie 对称性^[2]及形式不变性^[3] (Mei 对称性^[4,5]). 特别是近 10 年来, Mei 对称性的方法被广泛应用于各类力学系统, 已成为研究系统守恒量的常用方法之一. 文献 [3] 研究了 Lagrange 系统的形式不变性, 以 Kepler 方程为例给出了形式不变性的无限小生成元, 而此生成元不满足 Noether 对称性, 因此没能给出由形式不变性导致的守恒量. 文献 [6—8] 研究了 Kepler 系统的 Noether 对称性、Lie 对称性及其直接或间接导致的守恒量, 然而得到的只是平凡守恒量或总能量或角动量. 文献 [9, 10] 研究了 Lagrange 系统、广义 Hamilton 系统的共形不变性与守恒量. 那么对于 Kepler 系统的共形不变性、Mei 对称性以及能否由这些对称性得到与总能量和角动量独立的新守恒量还有待于进一步研究. 本文具体研究 Kepler 系统在无限小变换下的共形不变性、Mei 对称性及其导致的守恒量, 并讨论所得守恒量的独立性.

† E-mail: hwliu_99@163.com

2 平面 Kepler 系统

平面 Kepler 系统的运动微分方程为

$$E_s(L) = 0 \quad (s = 1, 2), \quad (1)$$

其中 $E_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}$ 为 Euler 算子, Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

其中 q_s 为广义坐标, $\dot{q}_s$ 为广义速度, μ 为常数. 由 (1) 式求得广义加速度 $\ddot{q}_s$ ^[11], 在这里记作 α_s , 具体表达式为

$$\ddot{q}_1 = -\mu q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} = \alpha_1, \quad (3a)$$

$$\ddot{q}_2 = -\mu q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} = \alpha_2. \quad (3b)$$

由 (3) 式令

$$F_s = \ddot{q}_s - \alpha_s \quad (s = 1, 2). \quad (4)$$

3 无限小变换

引入时间不变的无限小变换

$$t^* = t, \quad q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \mathbf{q}), \quad (5)$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_s 为无限小生成元.

引入无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}, \quad (6)$$

其一次扩展为

$$X^{(1)} = \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \dot{\xi}_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \quad (7)$$

其二次扩展为

$$X^{(2)} = \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \dot{\xi}_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + \ddot{\xi}_s \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \quad (8)$$

4 对称性与守恒量

在无限小变换 (5) 式下, 系统 (3) 式的 Lie 对称性确定方程 [11] 为

$$\frac{\bar{d}}{dt} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k} \xi_k + \frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_k, \quad (9)$$

其中 $\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}$.

同时文献 [11] 指出, 如果生成元 ξ_s 满足 (9) 式, 且存在函数 $\lambda = \lambda(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, 使得

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{d}}{dt} \ln \lambda = 0, \quad (10)$$

则系统的 Lie 对称性导致的 Hojman 守恒量为

$$I_H = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\lambda \xi_s)}{\partial q_s} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\lambda \frac{\bar{d}}{dt} \xi_s)}{\partial \dot{q}_s} = \text{const.} \quad (11)$$

定义 1^[9] 对于 F_s , 如果无限小变换 (5) 式的生成元 ξ_s 满足

$$X^{(2)} F_s = \ell_s^k F_k, \quad (12)$$

则称二阶微分方程是共形不变性的, 其中 ℓ_s^k 为共形因子, (12) 式称为共形不变性的确定方程.

在无限小变换 (5) 式下, 系统 (4) 式的共形不变性同时是 Lie 对称性的充分必要条件 [9,10]:

$$\ell_s^k = \frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}. \quad (13)$$

定义 2^[11] 在无限小变换 (5) 式下, 运动方程 (1) 的形式保持不变, 即

$$E_s(L^*) = 0, \quad (14)$$

这种不变性称为 Mei 对称性.

Mei 对称性判据 对于系统 (1) 式, 如果无限小变换 (5) 式的生成元 ξ_s 满足

$$E_s(X^{(1)}(L)) = 0, \quad (15)$$

则相应的不变性为 Mei 对称性.

如果系统 (1) 式的 Mei 对称性的生成元 ξ_s 以及规范函数 $G_M = G_M(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 满足如下结构方程 [12]

$$\frac{\bar{d}}{dt} G_M + q_s \frac{\bar{d}}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \dot{q}_s \frac{\bar{d}}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} = 0, \quad (16)$$

则系统的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量为

$$I_M = G_M + q_s \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} = \text{const.} \quad (17)$$

5 共形不变性与 Hojman 守恒量

定理 1 对于平面 Kepler 系统 (1) 而言, 如果共形不变性的生成元 ξ_s 满足 (13) 式, 且存在函数 $\lambda = \lambda(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, 使得 (10) 式成立, 则 Kepler 系统的共形不变性导致 Hojman 守恒量 (11) 式.

对于平面 Kepler 系统 (1) 式, 首先考虑系统的共形不变性, 计算

$$\begin{aligned} X^{(2)} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} &= \left(\xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \dot{\xi}_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + \ddot{\xi}_s \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s} \right) \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \dot{\xi}_1 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\xi}_2 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} + \ddot{\xi}_1 \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_1} + \ddot{\xi}_2 \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_2} \right) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 + \mu q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \ddot{q}_2 + \mu q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \quad (18) \end{aligned}$$

注意到 F_1, F_2 中不含有变量 $\dot{q}_1, \dot{q}_2$, (18) 式简化为

$$\begin{aligned} X^{(2)} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} &= \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \ddot{\xi}_1 \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_1} + \ddot{\xi}_2 \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_2} \right) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 + \mu q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \ddot{q}_2 + \mu q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \quad (19) \end{aligned}$$

展开 (19) 式右端项得

$$X^{(2)} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 + \xi_1 \mu (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} - 3\mu q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} (\xi_1 q_1 + \xi_2 q_2) \\ \ddot{\xi}_2 + \xi_2 \mu (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} - 3\mu q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} (\xi_1 q_1 + \xi_2 q_2) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

设 $\ell_s^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 由 $X^{(2)}F_s = \ell_s^k F_k$, 即有 (21) 式成立

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi}_1 + \xi_1 \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} - 3\mu q_1(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{5}{2}}(\xi_1 q_1 + \xi_2 q_2) \\ \ddot{\xi}_2 + \xi_2 \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} - 3\mu q_2(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{5}{2}}(\xi_1 q_1 + \xi_2 q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 + \mu q_1(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \ddot{q}_2 + \mu q_2(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

在 (21) 式中, 令 $\xi_1 q_1 + \xi_2 q_2 = 0$, 生成元可有如下两组特解.

1) 取无限小生成元为

$$\xi_1 = q_2, \quad \xi_2 = -q_1, \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 有 } X^{(2)}F_s = \ell_s^k F_k \text{ 成立.}$$

2) 取无限小生成元 $\xi_1 = -q_2, \quad \xi_2 = q_1$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 仍有 } X^{(2)}F_s = \ell_s^k F_k \text{ 成立.}$$

情形 2) 与情形 1) 类似, 这里只考虑情形 1). 对于生成元 (22) 式, 计算得

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{dt} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_1 &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_k} \xi_k = \alpha_2, \\ \frac{\bar{d}}{dt} \frac{\bar{d}}{dt} \xi_2 &= \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_k} \xi_k = \alpha_1, \end{aligned} \quad (23)$$

生成元 (22) 式满足 Lie 对称性确定方程 (9) 式, 同时有

$$\begin{aligned} X^{(2)} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} &= \left(\xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \dot{\xi}_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + \ddot{\xi}_s \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s} \right) \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (24)$$

于是, 有下述等式成立:

$$\ell_s^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}. \quad (25)$$

生成元 (22) 式对于系统 (1) 式而言, 共形不变性同时是 Lie 对称性. 注意 (10) 式有解

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

$$\lambda_2 = \mu q_2(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} - q_2 \dot{q}_1^2 + q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2, \quad (27)$$

$$\lambda_3 = \mu q_1(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} - q_1 \dot{q}_2^2 + q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2. \quad (28)$$

由 (22), (26) 式导致平凡的 Hojman 守恒量为 $I_{H1} = 0$.

由 (22), (27) 式导致的 Hojman 守恒量为

$$\begin{aligned} I_{H2} &= -\frac{\mu q_1(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} - q_1 \dot{q}_2^2 + q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2}{\mu q_2(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} - q_2 \dot{q}_1^2 + q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2} \\ &= \text{const.} \end{aligned} \quad (29)$$

由 (22), (28) 式导致的 Hojman 守恒量为 $I_{H3} = -\frac{1}{I_{H2}}$.

6 Mei 对称性与 Mei 守恒量

对于生成元 (22) 式, 注意到 $X^{(1)}(L) = 0$, $E_s(X^{(1)}(L)) \equiv 0$, 故 (22) 式也是 Mei 对称性的生成元, 取规范函数分别为 $G_{M1} = \lambda_1$, $G_{M2} = \lambda_2$, $G_{M3} = \lambda_3$, 满足 (16) 式, 由 (17) 式给出系统 (1) 式的 Mei 守恒量分别为

$$I_{M1} = -\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{const}, \quad (30)$$

$$I_{M2} = \mu q_2(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} - q_2 \dot{q}_1^2 + q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 = \text{const}, \quad (31)$$

$$I_{M3} = \mu q_1(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} - q_1 \dot{q}_2^2 + q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 = \text{const}. \quad (32)$$

其中 (30) 式为系统的总能量, 守恒量 (31), (32) 式尚未在文献中见到. 引入系统的角动量 [7,8]

$$I_4 = q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 = \text{const}. \quad (33)$$

对于 Kepler 系统 (1) 式, 得到系统非平凡的守恒量. 它们之间具有如下的关系式

$$\begin{aligned} I_{H2} &= -\frac{I_{M3}}{I_{M2}}, \\ I_{M1} &= \frac{q_1 I_{M2} + q_2 I_{M3} - \dot{q}_1 \dot{q}_2 (q_1^2 + q_2^2)}{2q_1 q_2}, \\ I_4 &= \frac{q_1 I_{M2} - q_2 I_{M3}}{q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2}. \end{aligned} \quad (34)$$

将 (3) 式化为一阶常微分方程组, 在广义坐标和广义速度构成的空间中, 可以检验四个守恒量 I_{M1} , I_{M2} , I_{M3} , I_4 中任意三个都独立, 但四个守恒量 I_{M1} , I_{M2} , I_{M3} , I_4 不相互独立. 这样, 由 Mei 对称性得到了与总能量、角动量独立的新守恒量 (31) 或 (32) 式. 至此, 对于 Kepler 系统已有三个相互独立的守恒量. 由无限小生成元 (22) 式求得一次扩展的具体表达式并计算得

$$\begin{aligned} X^{(1)}(I_{M1}) &= 0, \quad X^{(1)}(I_{M2}) = -I_{M3}, \\ X^{(1)}(I_{M3}) &= I_{M2}, \quad X^{(1)}(I_4) = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

即无限小生成元向量的一次扩展作用到系统的守恒量上结果仍为系统的守恒量或常数. 至此, 提出一般性结论.

设一力学系统的运动方程为

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (36)$$

引入一般无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon \xi_0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \end{aligned} \quad (37)$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_s 为无限小生成元.

无限小变换 (37) 式的一次扩展为

$$X^{(1)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \left(\frac{\bar{d}}{dt} \xi_s - \dot{q}_s \frac{\bar{d}}{dt} \xi_0 \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \quad (38)$$

其中 $\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}$ $s = (1, 2, \dots, n)$.

定理 2 设 $I = I(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 是系统 (36) 式的任意一个守恒量, 若 $X^{(1)}(I) = f$, 则 f 仍为系统的守

恒量或常数. 其中 $X^{(1)}$ 是无限小生成元向量的一次扩展.

证明 对于任意函数 $A(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, 有下述等式成立 [13]:

$$\frac{\bar{d}}{dt} X^{(1)}\{A\} = X^{(1)} \left\{ \frac{\bar{d}A}{dt} \right\} + \frac{\bar{d}\xi_0}{dt} \frac{\bar{d}A}{dt}, \quad (39)$$

计算得

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{dt} f &= \frac{\bar{d}}{dt} X^{(1)}\{I\} \\ &= X^{(1)} \left\{ \frac{\bar{d}I}{dt} \right\} + \frac{\bar{d}\xi_0}{dt} \frac{\bar{d}I}{dt} \equiv 0. \end{aligned} \quad (40)$$

即 f 为系统的守恒量或常数.

7 结 论

本文给出平面 Kepler 系统由共形不变性导致的 Hojman 守恒量, 以及由 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量, 给出了与总能量、角动量独立的新守恒量 (31) 或 (32) 式, 由此可见 Mei 对称性也是研究守恒量的有力工具. 在讨论这些守恒量之间的关系时, 发现文献 [6] 给出的 (23) 式不是 Kepler 系统的守恒量. 对于 Kepler 系统对称性与守恒量的研究表明: 即使是相同的生成元, 相同的对称性, 由于规范函数选取的不同, 可以导致不相同的守恒量; 也说明了即使是相同的生成元, 也可以通过不同的对称性理论, 找到相同的守恒量. 同时也得到了无限小生成元向量的一次扩展作用到守恒量上仍为系统的守恒量或常数.

- [1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen: Math. Phys.* **2** 235
- [2] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291
- [3] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120
- [4] Fang J H 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 269
- [5] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]
- [6] Gu S L, Zhang H B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 716 (in Chinese) [顾书龙, 张宏彬 2010 物理学报 **59** 716]
- [7] Gu S L, Zhang H B 2009 *J. Chongqing Inst. Technol.* (Natural Science) **23** 39 (in Chinese) [顾书龙, 张宏彬 2009 重庆工学院学报 (自然科学) **23** 39]
- [8] Chen X W, Li Y M, Zhao Y H 2005 *Phys. Lett. A* **337** 274

- [9] Cai J L, Mei F X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5369 (in Chinese) [蔡建乐, 梅凤翔 2008 物理学报 **57** 5369]
- [10] Liu C, Mei F X, Guo Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6704 (in Chinese) [刘畅, 梅凤翔, 郭永新 2008 物理学报 **57** 6704]
- [11] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]
- [12] Jia L Q, Zhang Y Y, Yang X F, Cui J C, Xie Y L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2939 (in Chinese) [贾利群, 张耀宇, 杨新芳, 崔金超, 解银丽 2010 物理学报 **59** 2939]
- [13] Mei F X 2002 *Chin. Sci. Bull.* **47** 1544

Conformal invariance, Mei symmetry and the conserved quantity of the Kepler equation

Liu Hong-Wei^{1)2)†} Li Ling-Fei²⁾ Yang Shi-Tong¹⁾

1) (*Institute of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China*)

2) (*School of Sciences, Northeast Dianli University, Jilin 132012, China*)

(Received 10 December 2011; revised manuscript received 4 April 2012)

Abstract

In this paper, the conformal invariance and Mei symmetry of Kepler system under infinitesimal transformations are discussed in detail. The new conserved quantity of the system is given, which is different from the total energy and the angular momentum. The independences of these conserved quantities are discussed in the space which is composed of general ordinates and general speed.

Keywords: Kepler equation, conformal invariance, Lie symmetry, Mei symmetry

PACS: 02.20.Sv, 11.30.-j

† E-mail: hwliu_99@163.com