Chetaev 型非完整约束相对运动动力学系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量*

王肖肖 张美玲 韩月林 贾利群†

(江南大学理学院, 无锡 214122)

(2012 年 1 月 9 日收到; 2012 年 4 月 19 日收到修改稿)

研究 Chetaev 型非完整约束相对运动动力学系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量. 对 Chetaev 型非完整约束相对运动力学系统 Nielsen 方程的运动微分方程、Mei 对称性定义和判据进行具体的研究, 得到了 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量的表达式. 最后举例说明结果的应用.

关键词: Chetaev 型非完整约束, 相对运动动力学, Nielsen 方程, Mei 守恒量

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 45.20.Jj

1 引 言

20 世纪 70 年代以来, 力学系统的对称性和守恒量理论日渐受到国际力学界的重视 [1−5]. 力学系统的对称性和守恒量理论是近代数学、力学、物理学的一个重要研究方向, 在现代数学、力学、物理学乃至工程科学中扮演着非常重要的角色, 主要有 Noether 对称性 [6−10]、Lie 对称性 [8,9,11−20] 和 Mei 对称性 [8,9,21−23]. 其中 Mei 对称性是梅凤翔提出的一种新的对称性 [24], 它不同于 Noether 对称性和 Lie 对称性. Mei 对称性是指运动方程中的动力学函数在经无限小变换后仍满足原来方程的一种不变性. 近年来, 我国学者在约束力学系统的对称性和守恒量理论方面的研究, 受到了国外的重视, 取得了一些成果 [16,17,25−27].

作为分析力学重要组成部分的 Nielsen 体系, 其 Nielsen 方程的研究 [28−30], 尤其是 Nielsen 方程的对称性和守恒量的研究也有一定的进展 [31]. 本文将给出 Chetaev 型非完整系统的相对运动力学系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性的定义和判据, 得到 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量的表达式, 并举例说明结果的应用.

2 系统的运动微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定, 它的运动受 g 个双面理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta\left(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\right)=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{1}$$

的限制, 并设约束间彼此相容且独立. 约束方程 (1) 加在虚位移 δq_s 上的 Chetaev 条件为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0\quad(\beta=1,2,\cdots,g).\tag{2}$$

非完整系统的相对运动 Nielsen 方程为

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+Q_s^{\dot{\omega}}+\varGamma_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\quad(s=1,2,\cdots,n),\tag{3}$$

方程中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非完整系统相对运动的 Lagrange 函数, $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力, $Q_s^{\dot{\omega}}=-(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times m_i\boldsymbol{r}_i')\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s}$ 为广义回转惯性力, $\varGamma_s=2\boldsymbol{\omega}\cdot\left(m_i\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k$ 为广义陀螺力,

* 国家自然科学基金 (批准号: 11142014, 61178032) 资助的课题.

† E-mail: jlq0000@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

$\lambda_\beta = \lambda_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 为 Lagrange 乘子. 方程 (3) 可表示为

$$N_s(L) = Q_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \Gamma_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{4}$$

式中

$$N_s = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\partial}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

为 Nielsen 算子.

设系统 (3) 非奇异, 即 $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$, 则由方程 (1) 和 (4) 可求出所有的 $\lambda_\beta = \lambda_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$. 方程 (4) 还可写为

$$N_s(L) = Q_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \Gamma_s + \Lambda_s. \tag{6}$$

方程 (6) 中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{7}$$

为广义非完整约束反力.

方程 (6) 为 Chetaev 型非完整系统相对运动方程 (1) 和 (3) 相应的完整系统相对运动方程. Chetaev 型非完整系统相对运动的解可在完整系统相对运动方程的解中找到. 只要运动的初始条件满足 Chetaev 型非完整系统相对运动约束方程, 则完整系统相对运动方程 (6) 的解就给出非完整系统相对运动方程 (1) 和 (3) 的运动, 由方程 (6) 可解出所有的广义加速度, 记作

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{8}$$

3 Mei 对称性定义

引入时间和广义坐标的无限小变换方程

$$\begin{aligned} &t^* = t + \Delta t, \\ &q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \end{aligned} \tag{9}$$

方程 (9) 可展开为

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon \xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \end{aligned} \tag{10}$$

方程 (10) 中 ε 为无限小参数, ξ_0 和 ξ_s 为无限小变换生成元.

引入无限小变换生成元向量 $X^{(0)}$ 和它沿系统运动轨道曲线的一次扩展 $\tilde{X}^{(1)}$

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{11}$$

$$\tilde{X}^{(1)} = X^{(0)} + \left(\frac{\bar{d}}{\bar{d}t}\xi_s - \dot{q}_s \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{12}$$

(11) 式中对时间的全导数采用沿系统运动轨道曲线的方式, 有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{13}$$

经方程 (10) 的变换, 函数 L, Q_s, $Q_s^{\dot{\omega}}$, Γ_s, Λ_s 和 f_β 分别变为 L^*, Q_s^*, $Q_s^{\dot{\omega}*}$, Γ_s^*, Λ_s^* 和 f_β^*, 将 L^*, Q_s^*, $Q_s^{\dot{\omega}*}$, Γ_s^*, Λ_s^* 和 f_β^* 在 $(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 处沿运动轨道曲线做 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned} L^* &= L\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon \tilde{X}^{(1)}(L) + O(\varepsilon^2), \\ Q_s^* &= Q_s\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= Q_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon \tilde{X}^{(1)}(Q_s) + O(\varepsilon^2), \\ Q_s^{\dot{\omega}^*} &= Q_s^{\dot{\omega}}\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= Q_s^{\dot{\omega}}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon \tilde{X}^{(1)}(Q_s^{\dot{\omega}}) + O(\varepsilon^2), \\ \Gamma_s^* &= \Gamma_s\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= \Gamma_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon \tilde{X}^{(1)}(\Gamma_s) + O(\varepsilon^2), \\ \Lambda_s^* &= \Lambda_s\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon \tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s) + O(\varepsilon^2), \\ f_\beta^* &= f_\beta\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon \tilde{X}^{(1)}(f_\beta) + O(\varepsilon^2) \\ &\quad (s = 1, 2, \cdots, n), (\beta = 1, 2, \cdots, g). \end{aligned} \tag{14}$$

同时, (5) 式换为

$$\tilde{N}_s = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\partial}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{15}$$

定义 1 如果经方程 (10) 变换后的动力学函数 L^*, Q_s^*, $Q_s^{\dot{\omega}*}$, Γ_s^* 和 Λ_s^* 分别代替变换前的动力学函数 L, Q_s, $Q_s^{\dot{\omega}}$, Γ_s 和 Λ_s, 非完整相对运动约束力学系统的 Nielsen 方程 (3) 的形式保持不变, 即

$$\tilde{N}_s(L^*) = Q_s^* + Q_s^{\dot{\omega}^*} + \Gamma_s^* + \Lambda_s^* \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{16}$$

则称这种对称性为 Chetaev 型非完整相对运动动力学系统带乘子的 Nielsen 方程 (3) 相应的完整系统的 Mei 对称性.

定义 2 如果经方程 (10) 变换后的动力学函数 L^*, Q_s^*, $Q_s^{\dot{\omega}*}$, Γ_s^* 和 Λ_s^* 分别代替变换前的动力

学函数 $L, Q_s, Q_s^{\dot{\omega}}, \varGamma_s$ 和 $\varLambda_s$, 方程 (1) 和 (6) 的形式都保持不变, 即

$$f_\beta^* = f_\beta\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{17}$$

和方程 (15) 同时成立, 则称这种对称性为 Chetaev 型非完整相对运动动力学系统带乘子的 Nielsen 方程 (方程 (1) 和 (3)) 的弱 Mei 对称性.

定义 3　如果经方程 (10) 变换后的动力学函数 $L^*, Q_s^*, Q_s^{\dot{\omega}*}, \varGamma_s^*$ 和 $\varLambda_s^*$ 分别代替变换前的动力学函数 $L, Q_s, Q_s^{\dot{\omega}}, \varGamma_s$ 和 $\varLambda_s$, 方程 (1) 和 (6) 的形式都保持不变, 并要求 Chetaev 条件方程 (2) 对无限小变换生成元 ξ_0 和 ξ_s 的附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g) \tag{18}$$

成立, 则称这种对称性为 Chetaev 型非完整相对运动动力学系统带乘子的 Nielsen 方程 (方程 (1) 和 (3)) 的强 Mei 对称性.

4 Mei 对称性的判据

将函数 $L^*, Q_s^*, Q_s^{\dot{\omega}*}, \varGamma_s^*$ 和 $\varLambda_s^*$ 代入方程 (16), 忽略 ε^2 及更高阶小项, 并利用方程 (6) 可得

$$\tilde{N}_s\left[\tilde{X}^{(1)}(L)\right] = \tilde{X}^{(1)}\left(Q_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \varGamma_s + \varLambda_s\right) \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{19}$$

将方程 (14) 的第六个方程代入方程 (17), 忽略 ε^2 及更高阶小项, 并利用方程 (1), 得到

$$\tilde{X}^{(1)}(f_\beta) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g). \tag{20}$$

于是, 有以下判据.

判据 1　对于 Chetaev 型非完整相对运动动力学系统带乘子的 Nielsen 方程 [方程 (1), (3)] 相应的完整相对运动动力学方程 (6), 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 使判据方程 (19) 成立, 则相应的对称性为系统的 Mei 对称性.

方程 (19) 被称为与非完整相对运动力学系统带乘子的 Nielsen 方程 [方程 (1), (3)] 相应的完整相对运动动力学系统的 Mei 对称性的判据方程.

判据 2　对 Chetaev 型非完整相对运动动力学系统带乘子的 Nielsen 方程 [方程 (1), (3)], 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足方程 (19) 和 (20), 则相应的对称性为系统的弱 Mei 对称性.

方程 (19) 和 (20) 分别被称为 Chetaev 型非完整相对运动动力学系统带乘子的 Nielsen 方程 [方程 (1), (3)] Mei 对称性的判据方程和限制方程.

判据 3　对 Chetaev 型非完整相对运动动力学系统带乘子的 Nielsen 方程 [方程 (1), (3)], 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足方程 (18),(19) 和 (20), 则相应的对称性为系统的强 Mei 对称性.

方程 (18) 被称为 Chetaev 型非完整相对运动动力学系统带乘子的 Nielsen 方程 [方程 (1), (3)] Mei 对称性的附加限制方程.

5 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量

命题　如果非奇异 Chetaev 型非完整约束相对运动动力学系统带乘子的 Nielsen 方程 [方程 (1), (3)] Mei 对称性、弱 Mei 对称性、强 Mei 对称性的生成元 ξ_0, ξ_s 和规范函数 $G_{\mathrm{M}} = G_{\mathrm{M}}(t\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$\begin{aligned}&\tilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} + \tilde{X}^{(1)}\left[\tilde{X}^{(1)}(L)\right]\\&+\tilde{X}^{(1)}\left(Q_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \varGamma_s + \varLambda_s\right)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}G_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\\&= 0,\end{aligned} \tag{21}$$

则系统的 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量为

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{M}} &= \tilde{X}^{(1)}(L)\xi_0 + \frac{\partial\tilde{X}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{M}}\\&= \mathrm{const.}\end{aligned} \tag{22}$$

证明　将 (22) 式按方程 (8) 求导, 并利用方程 (21), 得

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{M}} =& \left[\frac{\partial}{\partial t}\tilde{X}^{(1)}(L) + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}\tilde{X}^{(1)}(L)\right.\\&\left.+\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\tilde{X}^{(1)}(L)\right]\xi_0 + \tilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\\&+\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\tilde{X}^{(1)}(L)\right](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\\&+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\tilde{X}^{(1)}(L)\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \alpha_s\xi_0 - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right]\\&+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}\\=& \left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\tilde{X}^{(1)}(L) - \frac{\partial}{\partial q_s}\tilde{X}^{(1)}(L)\right.\\&\left.-\tilde{X}^{(1)}(Q_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \varGamma_s + \varLambda_s)\right](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\\=& \left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tilde{X}^{(1)}(L) - 2\frac{\partial}{\partial q_s}\tilde{X}^{(1)}(L)\right.\\&\left.-\tilde{X}^{(1)}(Q_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \varGamma_s + \varLambda_s)\right](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0).\end{aligned} \tag{23}$$

将判据方程 (19) 代入上式, 可得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} I_{\mathrm{M}} = 0. \tag{24}$$

证毕.

6 算 例

如图 1 所示, 质量为 m 的质点无摩擦地在一平面 P 上运动, 平面 P 通过一固定直线 Oq_1 (与铅垂线夹角为常数 α), 且以匀角速 ω 绕此直线 Oq_1 转动 [32]. 平面上 Oq_2 轴垂直于 Oq_1. 质点所受约束

$$f = q_2 - \dot{q}_1 = 0, \tag{25}$$

系统的动力学函数

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 q_2^2 \\ & - mgq_1 \cos\alpha - mgq_2 \sin\alpha \sin(\omega t), \end{aligned} \tag{26}$$

$$Q_2 = 0, \quad Q_s^{\dot{\omega}} = \Gamma_s = 0 \quad (s = 1, 2). \tag{27}$$

若 Q_1 始终等于广义非完整约束反力 Λ_1, 试研究系统的 Mei 对称性和 Mei 守恒量.

系统的运动微分方程为

$$\begin{aligned} & m\ddot{q}_1 + mg\cos\alpha = 0, \\ & m\ddot{q}_2 - m\omega^2 q_2 + mg \sin\alpha \sin(\omega t) = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

做计算, 有

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(1)}(L) = {} & m\dot{q}_1 \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_1}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_1 \frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} \right) \\ & + m\dot{q}_2 \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_2}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_2 \frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} \right) \\ & + m\omega^2 q_2 \xi_2 - mg\xi_1 \cos\alpha \\ & - mg\xi_2 \sin\alpha \sin(\omega t) \\ & - mgq_2 \xi_0 \omega \sin\alpha \cos(\omega t). \end{aligned} \tag{29}$$

取生成元

$$\xi_0 = \xi_2 = 0, \quad \xi_1 = \ln(\dot{q}_1 + gt\cos\alpha), \tag{30}$$

则有

$$\tilde{X}^{(1)}(L) = -mg\cos\alpha \ln(\dot{q}_1 + gt\cos\alpha), \tag{31}$$

$$\dot{\xi}_1 = 0, \tag{32}$$

$$\tilde{N}_s[\tilde{X}^{(1)}(L)] = 0, \tag{33}$$

$$\tilde{X}^{(1)}(Q_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \Gamma_s + \Lambda_s) = 0 \quad (s = 1, 2), \tag{34}$$

$$\tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(1)}(L)] = 0, \tag{35}$$

$$\tilde{X}^{(1)}(f) = 0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1} \xi_1 \neq 0. \tag{37}$$

由 (33)—(37) 式以及 Mei 对称性的判据可知, 系统具有弱 Mei 对称性.

由结构方程 (21) 可解出

$$G_{\mathrm{M}} = 0, \tag{38}$$

利用 (22) 式, 可得出系统的 Mei 守恒量

$$I_{\mathrm{M}} = -\frac{mg\cos\alpha \ln(\dot{q}_1 + gt\cos\alpha)}{\dot{q}_1 + gt\cos\alpha} = \text{const.} \tag{39}$$

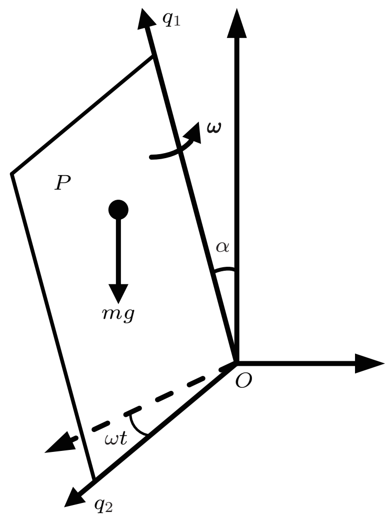

图 1 质点位形示意

7 结 论

本文给出了 Chetaev 型约束的相对运动力学系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性的定义和判据, 研究了 Chetaev 型约束的相对运动动力学系统 Nielsen 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量. 主要结果是 Mei 对称性的三个判据、结构方程 (21) 以及 Mei 守恒量的表达式 (22). 本文结果和方法可推广到非 Chetaev 型约束的相对运动力学系统和其他力学体系 (如 Appell 体系). 因此, 本文研究结论具有普遍的意义.

[1] Djukic D S, Vujanovic B 1975 *Acta Mech.* **23** 17
[2] Lutzky M D 1979 *Phys.* A: *Math. Gen.* **12** 973
[3] Vujanović B A 1986 *Acta Mech.* **65** 63
[4] Bahar L Y, Kwatry H G 1987 *Int. J. Non-Linear Mech.* **22** 125
[5] Hojman S A 1992 *Phys.* A: *Math. Gen.* **25** 291
[6] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **Kl** 235
[7] Mei F X 1993 *Jiangxi Science* **11** 1 (in Chinese) [梅凤翔 1993 江西科学 **11** 1]
[8] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社)]
[9] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]
[10] Fu J L, Nie N M, Huang J F 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2634
[11] Mei F X, Wu R H, Zhang Y F 1998 *Acta Mech. Sin.* **30** 468 (in Chinese) [梅凤翔, 吴润衡, 张永发 1998 力学学报 **30** 468]
[12] Luo S K, Guo Y X 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 25
[13] Cai J L, Mei F X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5369 (in Chinese) [蔡建乐, 梅凤翔 2008 物理学报 **57** 5369]
[14] Cai J L, Luo S K, Mei F X 2008 *Chin. Phys.* B **17** 3170
[15] Zhang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3054 (in Chinese) [张毅 2007 物理学报 **56** 3054]
[16] Jiang W A, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 475
[17] Jiang W A, Li L, Li Z J, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 1075
[18] Jia L Q, Cui J C, Zhang Y Y, Luo S K 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 16 (in Chinese) [贾利群, 崔金超, 张耀宇, 罗绍凯 2009 物理学报 **58** 16]
[19] Mei F X, Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901 (in Chinese) [梅凤翔, 尚玫 2000 物理学报 **49** 1901]
[20] Chen X W, Liu C M, Li Y M 2006 *Chin. Phys.* **15** 470
[21] Zheng S W, Xie J F, Chen X W, Du X L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5209 (in Chinese) [郑世旺, 解加芳, 陈向炜, 杜雪莲 2010 物理学报 **59** 5209]
[22] Yang X F, Jia L Q, Cui J C, Luo S K 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030305
[23] Jia L Q, Xie J F, Luo S K 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1560
[24] Mei F X 2000 *Journal of Beijing Institute of Technology* **9** 120 (in Chinese) [梅凤翔 2000 北京理工大学学报 **9** 120]
[25] Cai J L 2009 *Acta Phys. Pol.* A **115** 854
[26] Cai J L 2010 *Acta Phys. Pol.* A **117** 445
[27] Cai J L, Shi S S, Fang H J, Xu J 2012 *Meccanica* **47** 63
[28] Mei F X 1980 *Mech. Eng.* **2** 61 (in Chinese) [梅凤翔 1980 力学与实践 **2** 61]
[29] Mei F X 1984 *Acta Mech. Sin.* **16** 596 (in Chinese) [梅凤翔 1984 力学学报 **16** 596]
[30] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础 (北京: 北京工业学院出版社)]
[31] Jia L Q, Zhang Y Y, Luo S K 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2141 (in Chinese) [贾利群, 张耀宇, 罗绍凯 2009 物理学报 **58** 2141]
[32] Mei F X, Liu G L 1987 *Foundations of Analytical Mechanics* (Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press) p91 (in Chinese) [梅凤翔, 刘桂林 1987 分析力学基础 (西安: 西安交通大学出版社) 第 91 页]

Mei symmetry and Mei conserved quantity of Nielsen equation in a dynamical system of the relative motion with nonholonomic constraint of Chetaev's type*

Wang Xiao-Xiao Zhang Mei-Ling Han Yue-Lin Jia Li-Qun†

(*School of Science, Jiangnan University, Wuxi* 214122, *China*)

(Received 9 January 2012; revised manuscript received 19 April 2012)

Abstract

Mei symmetry and Mei conserved quantity of Nielsen equations in a dynamical system of the relative motion with nonholonomic constraint of Chetaev's type are studied. The differential equations of motion of Nielsen equation for the system, the definition and criterion of Mei symmetry, and the expression of Mei conserved quantity deduced directly from Mei symmetry for the system are obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: nonholonomic constraint of Chetaev's type, dynamics of the relative motion, Nielsen equation, Mei conserved quantity

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 45.20.Jj

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11142014, 61178032).

† E-mail: jlq0000@163.com