

# 一类厄尔尼诺/拉尼娜-南方涛动海-气振子的奇摄动解\*

韩祥临<sup>1)</sup> 杜增吉<sup>2)</sup> 莫嘉琪<sup>3)†</sup>

1) (湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

2) (江苏师范大学数学科学学院, 徐州 221116)

3) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2012年1月30日收到; 2012年4月2日收到修改稿)

厄尔尼诺/拉尼娜-南方涛动是涉及赤道太平洋中的一个海-气交互的年际现象. 本文的目的是建立一类海-气振子模型的非线性奇摄动问题的渐近求解方法. 并在一类海-气振子模型的基础上, 借用奇摄动方法研究了对应问题的近似解. 由奇摄动方法得到的结果分析厄尔尼诺/拉尼娜-南方涛动海-气振子模型的赤道太平洋的海表温度异常和气-海振子的温度深度异常.

**关键词:** 非线性, 近似解, 厄尔尼诺/拉尼娜 - 南方涛动模型

**PACS:** 02.30.Mv

## 1 引言

厄尔尼诺/拉尼娜和南方涛动 (ENSO) 是发生在热带太平洋大气和海洋中的异常事件. ENSO 现象是当前国际学术界所关注的对象<sup>[1-13]</sup>. ENSO 的振荡性态是海洋-大气流动正负两种反馈, 它和南方涛动流动强度有关, 这导致弱信风沿着赤道行进. 弱信风驱动着海洋流动变化, 加强了海表温度 (SST) 等物理量的异常. 正的海洋-大气反馈或耦合海洋-大气的不稳定性导致了赤道太平洋不停变暖.

近来许多学者研究了非线性奇摄动问题. 一些近似方法被深化, 包括边界层法、匹配渐近展开方法和多重尺度法等<sup>[14-17]</sup>. 作者等也利用奇摄动等方法研究了一类非线性问题<sup>[18-24]</sup>. 本文是利用奇摄动理论来讨论一类 ENSO 模型.

讨论如下一类厄尔尼诺/拉尼娜和南方涛动

海-气振子模型<sup>[1,2,9]</sup>:

$$\frac{dT}{dt} = a\tau_1 + b\tau_2 + f(\varepsilon, T), \quad (1)$$

$$\frac{dh}{dt} = -c\tau_1 - R_h h + g(\varepsilon, h), \quad (2)$$

$$\varepsilon \frac{d\tau_1}{dt} = dT - R_{\tau_1} \tau_1, \quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{d\tau_2}{dt} = eh - R_{\tau_2} \tau_2, \quad (4)$$

$$T(0) = A_1, \quad h(0) = A_2, \quad (5)$$

$$\tau_1(0) = B_1, \quad \tau_2(0) = B_2, \quad (6)$$

其中  $T$  为赤道东太平洋的 SST,  $h$  为温度深度,  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2$ , 分别为中、西太平洋赤道带状风压, 模型参数  $a, b, c, d, e$  为正常数, 其详细的物理意义参见文献 [9];  $R_h, R_{\tau_1}$  和  $R_{\tau_2}$  为正的阻尼系数,  $\varepsilon$  为小的正常数,  $A_i, B_i (i = 1, 2)$  为模型的初始状态,  $f(\varepsilon, T)$  和  $g(\varepsilon, h)$  分别为 SST 异常和温度深度异常的扰动项, 其中  $\lim_{|T| \rightarrow 0} \frac{|f(\varepsilon, T)|}{|T|} = 0$ ,  $\lim_{|g| \rightarrow 0} \frac{|g(\varepsilon, h)|}{|g|} = 0$ ,

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11071205, 11101349, 11202106)、浙江省自然科学基金 (批准号: Y6110502) 和江苏省自然科学基金 (批准号: BK2011042) 资助的课题.

† E-mail: xlhan@hutc.zj.cn

$$f(0, T) = g(0, h) = 0.$$

由 ENSO 海-气振子模型 (1)–(6) 式不难看出, 中、西太平洋赤道带状风压在初始状态具有突变现象. 为此, 在求模型 (1)–(6) 式的渐近解时应分别考虑具有初始状态以外的外部解和初始状态下的初始层校正项两部分的情形.

## 2 海-气振子模型的外部解

设 ENSO 海-气振子模型 (1)–(6) 式的一组外部解  $(\bar{T}, \bar{h}, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$  为

$$\begin{aligned} \bar{T}(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \bar{T}_j(t) \varepsilon^j, \\ \bar{h}(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \bar{h}_j(t) \varepsilon^j, \\ \bar{\tau}_i(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\tau}_{ij}(i) \varepsilon^j \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (7)$$

将 (7) 式分别代入 (1)–(5) 式, 按  $\varepsilon$  的幂级数展开, 合并  $\varepsilon$  的同次幂项, 并令各次幂的系数为零, 对于  $\varepsilon^j (j = 0, 1, 2, \dots)$  项的系数分别可得

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_0}{dt} &= a\bar{\tau}_{10} + b\bar{\tau}_{20}, \\ \bar{T}_0(0) &= A_1, \\ \frac{d\bar{h}_0}{dt} &= -c\bar{\tau}_{10} - R_h \bar{h}_0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\bar{h}_0(0) = A_2, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} d\bar{T}_0 - R_{\tau_1} \bar{\tau}_{10} &= 0, \\ e\bar{h}_0 - R_{\tau_2} \bar{\tau}_{20} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_j}{dt} &= a\bar{\tau}_{1j} + b\bar{\tau}_{2j} + \bar{F}_j, \\ \bar{T}_j(0) &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{h}_j}{dt} &= -c\bar{\tau}_{1j} - R_h \bar{h}_j + \bar{G}_j, \\ \bar{h}_j(0) &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{1j} &= \frac{1}{R_{\tau_1}} \left( d\bar{T}_j - \frac{d\bar{\tau}_{1(j-1)}}{dt} \right), \\ \bar{\tau}_{2j} &= \frac{1}{R_{\tau_2}} \left( e\bar{h}_j - \frac{d\bar{\tau}_{2(j-1)}}{dt} \right) \quad (j = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{F}_j(t) &= \frac{1}{j!} \left[ \frac{\partial^j f \left( \varepsilon, \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \varepsilon^k \right)}{\partial \varepsilon^j} \right]_{\varepsilon=0}, \\ \bar{G}_j(t) &= \frac{1}{j!} \left[ \frac{\partial^j g \left( \varepsilon, \sum_{k=0}^{\infty} h_k(t) \varepsilon^k \right)}{\partial \varepsilon^j} \right]_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

不难得到方程组初值问题 (8)–(10) 式的解为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{T}_0(t) \\ \bar{h}_0(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_{\tau_2}(\lambda_1 R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_1 t) & R_{\tau_2}(\lambda_1 R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_2 t) \\ bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_1 t) & bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} bcA_1 R_{\tau_2} - A_2 R_{\tau_2}(\lambda_2 R_{\tau_1} - ad) \\ -bcA_1 R_{\tau_2} + A_2 R_{\tau_2}(\lambda_2 R_{\tau_1} - ad) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

的特征根:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{1}{2} \left( \frac{ad}{R_{\tau_1}} - R_h \right) \\ &\pm \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{ad}{R_{\tau_1}} + R_h \right)^2 - 4 \frac{bcde}{R_{\tau_1} R_{\tau_2}} \right]^{1/2} \\ &(i = 1, 2), \end{aligned} \quad (16)$$

而  $\Delta = bcR_{\tau_1} R_{\tau_2}^2 (\lambda_1 - \lambda_2)$ .

方程组初值问题 (11)–(13) 式的解为

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}_{10}(t) \\ \bar{\tau}_{20}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{R_{\tau_1}} \bar{T}_0(t) \\ \frac{e}{R_{\tau_2}} \bar{h}_0(t) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

其中  $\lambda_i (i = 1, 2)$  为 (8), (9) 式对应方程组的特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{ad}{R_{\tau_1}} & -\frac{be}{R_{\tau_2}} \\ \frac{cd}{R_{\tau_1}} & \lambda + R_h \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_j(t) \\ \bar{h}_j(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \int_0^t \begin{pmatrix} R_{\tau_2}(\lambda_1 R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_1(t-s)) & R_{\tau_2}(\lambda_1 R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_2(t-s)) \\ bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_1(t-s)) & bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_2(t-s)) \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} bcR_{\tau_2} \bar{F}_j(s) - R_{\tau_2}(\lambda_2 R_{\tau_1} - ad) \bar{G}_j(s) \\ -bcR_{\tau_2} \bar{F}_j(s) + R_{\tau_2}(\lambda_2 R_{\tau_1} - ad) \bar{G}_j(s) \end{pmatrix} ds, \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}_{1j}(t) \\ \bar{\tau}_{2j}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{\tau_1}} \left( d\bar{T}_j(t) - \frac{d\tau_{1(j-1)}(t)}{dt} \right) \\ \frac{1}{R_{\tau_2}} \left( e\bar{h}_j(t) - \frac{d\tau_{2(j-1)}(t)}{dt} \right) \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

于是由 (7) 式, ENSO 海-气振子模型 (1)—(6) 式的外部解为

$$\begin{pmatrix} \bar{T}(t) \\ \bar{h}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_{\tau_2}(\lambda_1 R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_1 t) & R_{\tau_2}(\lambda_1 R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_2 t) \\ bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_1 t) & bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} bcA_1 R_{\tau_2} - A_2 R_{\tau_2}(\lambda_2 R_{\tau_1} - ad) \\ -bcA_1 R_{\tau_2} + A_2 R_{\tau_2}(\lambda_2 R_{\tau_1} - ad) \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \begin{pmatrix} R_{\tau_2}(\lambda_1 R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_1(t-s)) & R_{\tau_2}(\lambda_1 R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_2(t-s)) \\ bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_1(t-s)) & bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_2(t-s)) \end{pmatrix} \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} bcR_{\tau_2} \bar{F}_j(s) - R_{\tau_2}(\lambda_2 R_{\tau_1} - ad) \bar{G}_j(s) \\ -bcR_{\tau_2} \bar{F}_j(s) + R_{\tau_2}(\lambda_2 R_{\tau_1} - ad) \bar{G}_j(s) \end{pmatrix} ds \right] \varepsilon^j, \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}_1(t) \\ \bar{\tau}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{\tau_1}} \left[ d\bar{T}_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( d\bar{T}_j(t) - \frac{d\tau_{1(j-1)}(t)}{dt} \right) \varepsilon^j \right] \\ \frac{1}{R_{\tau_2}} \left[ e\bar{h}_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( e\bar{h}_j(t) - \frac{d\tau_{2(j-1)}(t)}{dt} \right) \varepsilon^j \right] \end{pmatrix}. \quad (20)$$

但是 ENSO 海-气振子模型 (1)—(6) 式的外部解 (19), (20) 式未必满足初始条件 (6) 式. 为此, 我们尚需构造模型的初始层校正项.

$$\frac{d\sigma_2}{d\xi} = -R_{\tau_2}\sigma_2, \quad (22)$$

$$\sigma_1(\xi) |_{\xi=0} = B_1 - \bar{\tau}_1(0),$$

$$\sigma_2(\xi) |_{\xi=0} = B_2 - \bar{\tau}_2(0). \quad (23)$$

### 3 海-气振子模型的初始层校正项与渐近解

由 (22), (23) 式便得到具有初始层性态的解

首先做伸长变换  $\xi = \frac{t}{\varepsilon}$ , 并设

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \bar{\tau}_1 + \sigma_1, \\ \tau_2 &= \bar{\tau}_2 + \sigma_2, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(t) \\ \sigma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B_1 - \bar{\tau}_1(0)) \exp\left(-\frac{R_{\tau_1} t}{\varepsilon}\right) \\ (B_2 - \bar{\tau}_2(0)) \exp\left(-\frac{R_{\tau_2} t}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

将 (21) 式代入 (3), (4) 式, 得

$$\frac{d\sigma_1}{d\xi} = -R_{\tau_1}\sigma_1,$$

于是由 (19)—(21) 式和 (24) 式, ENSO 海-气振子模型 (1)—(6) 式的渐近解  $(T, h, \tau_1, \tau_2)$  为

$$\begin{pmatrix} \bar{T}(t) \\ \bar{h}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_{\tau_2}(\lambda_1 R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_1 t) & R_{\tau_2}(\lambda_1 R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_2 t) \\ bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_1 t) & bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} bcA_1R_{\tau_2} - A_2R_{\tau_2}(\lambda_2R_{\tau_1} - ad) \\ -bcA_1R_{\tau_2} + A_2R_{\tau_2}(\lambda_2R_{\tau_1} - ad) \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \int_0^t \begin{pmatrix} R_{\tau_2}(\lambda_1R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_1(t-s)) & R_{\tau_2}(\lambda_1R_{\tau_1} - ad) \exp(\lambda_2(t-s)) \\ bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_1(t-s)) & bcR_{\tau_2} \exp(\lambda_2(t-s)) \end{pmatrix} \right. \\ & \left. \times \begin{pmatrix} bcR_{\tau_2}\bar{F}_j(s) - R_{\tau_2}(\lambda_2R_{\tau_1} - ad)\bar{G}_j(s) \\ -bcR_{\tau_2}\bar{F}_j(s) + R_{\tau_2}(\lambda_2R_{\tau_1} - ad)\bar{G}_j(s) \end{pmatrix} ds \right] \varepsilon^j, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B_1 - \bar{\tau}_1(0)) \exp\left(-\frac{R_{\tau_1}t}{\varepsilon}\right) \\ (B_2 - \bar{\tau}_2(0)) \exp\left(-\frac{R_{\tau_2}t}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{\tau_1}} \left[ d\bar{T}_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( d\bar{T}_j(t) - \frac{d\tau_{1(j-1)}(t)}{dt} \right) \varepsilon^j \right] \\ \frac{1}{R_{\tau_2}} \left[ e\bar{h}_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left( e\bar{h}_j(t) - \frac{d\tau_{2(j-1)}(t)}{dt} \right) \varepsilon^j \right] \end{pmatrix}. \quad (26)$$

能够用微分方程的微分不等式理论或泛函分析的不动点原理来证明上述得到的 (25), (26) 式在任意有限时段内关于小参数  $\varepsilon$  为一致有效的渐近展开式 [25-27].

数  $a, d, R_h$  和  $R_{\tau_1}$  为正常数, 由 (16) 式知, 当  $ad - R_hR_{\tau_1} \leq 0$  及  $aR_{\tau_2}R_h \leq bce$  时, 相应方程组的特征值均具有非正的实部. 再由微分方程解稳定性理论, 海-气振子模型 (1)–(6) 式的解 (25), (26) 式是稳定的或渐近稳定的. 所以海-气振子的在的太平洋赤道相关区域内的 SST, 温度深度和中、西太平

#### 4 海-气振子的物理性态的讨论

由 ENSO 海-气振子模型 (1)–(6) 式的渐近解 (25), (26) 式可知:

1) 由于模型 (1)–(6) 式的解有关在中、西太平洋赤道带状风压函数  $(\tau_1, \tau_2)$ , 具有形如 (26) 式右端第一项, 故在初始的邻近时刻内相关的物理量有急剧的变化, 形成初始层. 但由于参数  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 它的主要作用是暂短的, 参数  $\varepsilon$  的量级越小, 这种暂短的作用就会越快地变化. 虽然模型解的初始层是暂短的, 但是它仍然影响着模型相应物理量的渐近稳定性态.

作为一个例子, 取无量纲参数  $B_1 = 1, R_1 = 1, \varepsilon_1 = 0.10, \varepsilon_2 = 0.06, \varepsilon = 0.03$ , 我们可以用数字模拟图形分别表示 (26) 式右端第一项初始层函数  $\tau_1(t)$  的曲线图形 (见图 1). 再取无量纲参数  $B_2 = 3, R_2 = 2, \varepsilon = 0.10$  和  $\varepsilon = 0.06, \varepsilon = 0.03$ , 可以分别表示 (26) 式右端第一项初始层函数  $\tau_2(t)$  的曲线图形 (见图 2).

由图 1 和图 2 可以看出, 函数  $\tau_1(t), \tau_2(t)$  在初始的邻近时刻内有急剧的变化, 而且参数  $\varepsilon$  的量级越小, 这种暂短的作用就会越快地变化. 又因为初始层函数  $\tau_1(t), \tau_2(t)$  隐含在 (25), (26) 式中, 所以它们会影响模型相应物理量的渐近稳定性态. 关于这方面将在下面 2)–4) 小段来叙述.

2) 因为海-气振子模型 (1)–(6) 式的参

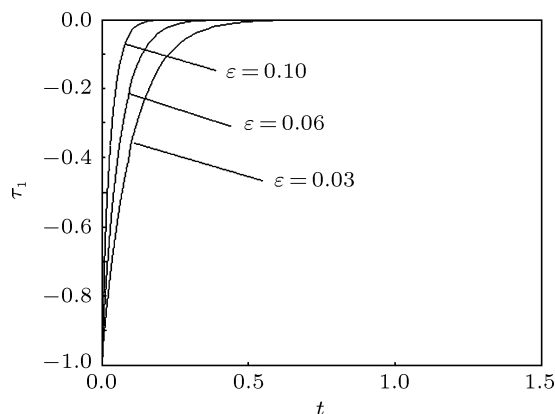


图 1 初始层函数  $\tau_1(t)$  在  $t = 0$  领域的图形 ( $B_1 = 1, R_1 = 1, \varepsilon_1 = 0.10, \varepsilon_2 = 0.06, \varepsilon = 0.03$ )

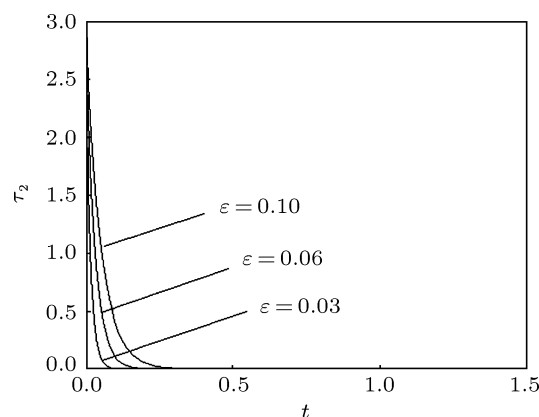


图 2 初始层函数  $\tau_2(t)$  在  $t = 0$  领域的图形 ( $B_2 = 3, R_2 = 2, \varepsilon_1 = 0.10, \varepsilon_2 = 0.06, \varepsilon = 0.03$ )

洋赤道带状风压将随时间的推移不会急剧增大,从而在海表面区域内附近的空间内将不会形成大气和海表水域急剧的异常变化.

3) 因为海-气振子模型 (1)—(6) 式的参数  $a, d, R_h$  和  $R_{\tau_1}$  为正常数, 由 (16) 式知, 当  $ad - R_h R_{\tau_1} > 0$  时, 相应方程组具有正的实部的特征值. 再由微分方程解稳定性理论, 海-气振子模型 (1)—(6) 式的解 (25), (26) 式是渐近不稳定的. 所以海-气振子在太平洋赤道相关区域内的 SST, 温度深度和中、西太平洋赤道带状风压将随时间的推移而急剧增大, 形成大气和海表水域急剧的异常变化.

作为另一个例子, 取无量纲参数  $a = 3, b = d = 1, c = 1, e = 3, R_{\tau_1} = R_h = R_{\tau_2} = 1$  以及初始值为  $A_1 = A_2 = B_1 = 50, B_2 = 20$ , 并当小参数  $\varepsilon = 0.5$  和  $\varepsilon = 0.1$  时, 我们可以用数字模拟图形分别表示海-气振子模型 (1)—(6) 式的赤道东太平洋的海表温度  $T(t)$ , 中太平洋赤道带状风压  $\tau_1(t)$  和西太平洋赤道带状风压  $\tau_2(t)$  的零次渐近解曲线. 如图 3—5 所示 (实线表示取小参数  $\varepsilon = 0.1$  的情形, 虚线表示取小参数  $\varepsilon = 0.5$  的情形).

在这个例子中, 由于  $ad - R_h R_{\tau_1} = 2 > 0$ , 故这类海-气振子模型的解是渐近不稳定的. 从图 3—5 也可看出, 当时间  $t$  增大时, 相应的曲线也很快地增大. 由于这种性状, 可以对它的相关物理量做出初步预测. 由图形曲线不难看出, 选取参数  $\varepsilon$  越小, 精度就越高. 而且我们还可继续得到各物理量的更高次的近似, 做出更精确的预报.

4) 由于模型中存在扰动项  $f$  和  $g$ , 它们直接影响着模型相关物理量的渐近解. 而且由于它们一般是非线性的, 当  $ad - R_h R_{\tau_1} > 0$  时, 将导致物理量

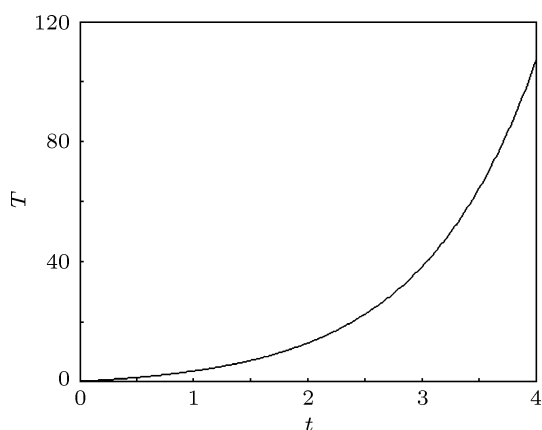


图 3 海-气振子模型赤道东太平洋的海表温度零次渐近解  $T(t)$

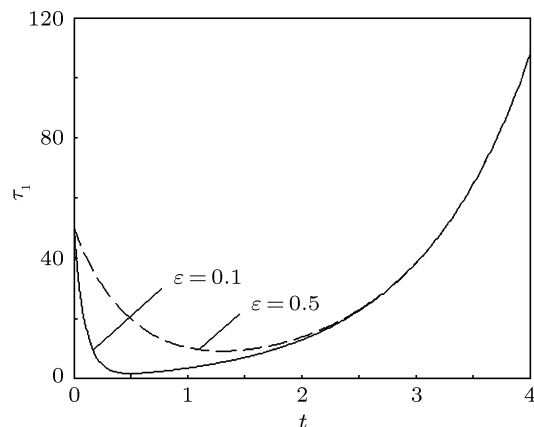


图 4 海-气振子模型赤道中太平洋赤道带状风压  $\tau_1(t)$

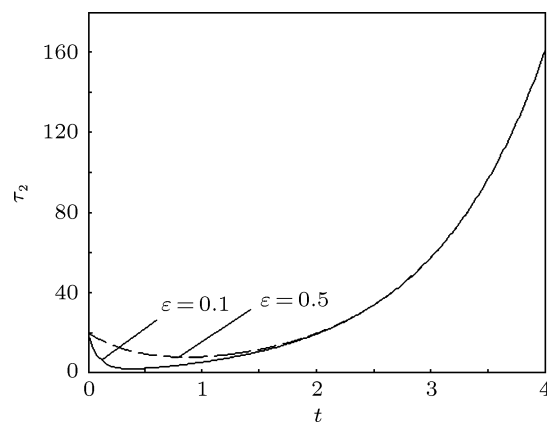


图 5 海-气振子模型赤道中太平洋赤道带状风压  $\tau_2(t)$

渐近解的相关物理量的变化趋向并直接影响各渐近解的不稳定性的性态. 正由于它们的存在, 决定了相关物理量的值并形成紊乱, 导致了各相关物理量从有序到无序的转变, 甚至出现混沌现象.

## 5 结论

厄尔尼诺/拉尼娜和南方涛动是发生在赤道太平洋大气和海洋中的异常事件, 是一个复杂的自然现象. 为了解和掌握它的变化规律, 人们需要把它归化为数学模型, 然后去求解它. 通过数学模型的解, 用定量的方法去探讨 ENSO 模型的物理性态, 并去预测它的发生和发展情况. 本文用奇摄动的理论和方法得到模型的渐近解析解, 并且能更深入地用微分或积分等运算工具得到其他相关的物理量的值, 使模型的性态能得到更深层的研究.

- [1] Jin F F 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 811
- [2] Jin F F 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 830
- [3] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林, 董文杰, 贾晓静, 曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]
- [4] Wang C 2001 1999 *J. Adv. Atmosph. Sci.* **18** 674
- [5] Guan X P, He Y H, Fan Z P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese) [关新平, 何宴辉, 范正平 2003 物理学报 **52** 276]
- [6] Li C G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2114 (in Chinese) [李春贵 2003 物理学报 **52** 2114]
- [7] Li Z, Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9
- [8] Lin J, Xu Y S 2003 *Chin. Phys.* **12** 1049
- [9] Wang B, Barcion A, Fang Z 1999 *J. Atmos. Sci.* **56** 5
- [10] Lin W T, Ji Z Z, Wang B, Yang X Z 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1358
- [11] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2002 *Prog. Nat. Sci.* **12** 102 (in Chinese) [林万涛, 季仲贞, 王斌 2002 自然科学进展 **12** 102]
- [12] Lin W T, Mo J Q 2004 *Chin. Sci. Bull.* **48** suppl. II 5
- [13] Hu Y Q 2002 *Introductory to Atmospheric Thermodynamics and Dynamics—Linear and Nonlinear Thermodynamics of the Atmospheric Non-Equilibrium State* (Beijing: Geology Pub.) (in Chinese) [胡隐樵 2002 大气热力动力学导论——大气非平衡态线性和非线性热力学 (北京: 地质出版社)]
- [14] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems* (Basel: Birkhauserm Verlag AG)
- [15] Ramos M 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246
- [16] D'Aprile T, Pistoia A 2010 *J. Diff. Eqs.* **248** 556
- [17] Faye L, Frenod E, Seck D 2011 *Discrete Contin. Dyn. Sys.* **29** 1001
- [18] Mo J Q 2009 *Sci. China G* **39** 568
- [19] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6701 (in Chinese) [莫嘉琪, 林一骅, 林万涛 2010 物理学报 **59** 6701]
- [20] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080202 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛, 林一骅 2011 物理学报 **60** 080202]
- [21] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090203 (in Chinese) [莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 090203]
- [22] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440
- [23] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030202
- [24] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070205
- [25] Chang K W, Howes F A 1984 *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Applications, Applied Mathematical Science* (New York: Springer-Verlag) p56
- [26] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co.)
- [27] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems* (Basel: Birkhauserm Verlag AG.)

# Singular perturbation solution of a class of sea-air oscillator for the El Niño / La Niña-southern oscillation\*

Han Xiang-Lin<sup>1)</sup> Du Zeng-Ji<sup>2)</sup> Mo Jia-Qi<sup>3)</sup>†

1) (*Faculty of Science, Huzhou Teacher College, Huzhou 313000, China*)

2) (*School of Mathematical Sciences, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China*)

3) (*Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

(Received 30 January 2012; revised manuscript received 2 April 2012)

## Abstract

The El Niño/La Niña and southern oscillation is an interannual phenomenon involved in the tropical Pacific ocean-atmosphere interactions. In this paper, the aim is to create a method of asymptotically solving the nonlinear singularly perturbed problem for the ocean-atmosphere oscillator models. And according to a class of ocean-atmosphere oscillator models, employing the singular perturbation method, we study the approximate solution of corresponding problem. The obtained results from singular perturbation method can be used for analyzing the sea surface temperature anomaly and the thermocline depth anomaly in the equatorial Pacific of the atmosphere-ocean oscillator for the El Niño/La Niña and southern oscillation model.

**Keywords:** nonlinear, approximate solution, El Niño/La Niña-southern oscillation model

**PACS:** 02.30.Mv

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11071205, 11101349, 11202106), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6110502), and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2011042).

† E-mail: xlhan@hutc.zj.cn