

无标度立体 Koch 网络上随机游走的平均吸收时间*

邢长明^{1)†} 刘方爱²⁾ 徐如志¹⁾

1) (山东财经大学计算机科学与技术学院, 山东省金融信息工程技术研究中心, 济南 250014)

2) (山东师范大学信息科学与工程学院, 济南 250014)

(2012 年 3 月 31 日收到; 2012 年 4 月 20 日收到修改稿)

作为一种基本的动力学过程, 复杂网络上的随机游走是当前学术界研究的热点问题, 其中精确计算带有陷阱的随机游走过程的平均吸收时间 (mean trapping time, MTT) 是该领域的一个难点. 这里的 MTT 定义为从网络上任意一个节点出发首次到达设定陷阱的平均时间. 本文研究了无标度立体 Koch 网络上带有一个陷阱的随机游走问题, 解析计算了陷阱置于网络中度最大的节点这一情形的网络 MTT 指标. 通过重正化群方法, 利用网络递归生成的模式, 给出了立体 Koch 网络上 MTT 的精确解, 所得计算结果与数值解一致, 并且从所得结果可以看出, 立体 Koch 网络的 MTT 随着网络节点数 N 呈线性增长. 最后, 将所得结果与之前研究的完全图、规则网络、Sierpinski 网络和 T 分形网络进行比较, 结果表明 Koch 网络具有较高的传输效率.

关键词: 复杂网络, Koch 网络, 随机游走, 平均吸收时间

PACS: 05.40.Fb, 89.75.Hc, 05.60.Cd, 89.75.Da

1 引言

近年来, 复杂网络得到物理科学、计算科学、控制科学等学术界的广泛关注, 其原因在于它为自然界各类复杂系统 (因特网、交通运输网和电力网等) 的描述提供了有效手段^[1-5]. 人们研究复杂网络的最终目标是超越网络拓扑结构, 掌握建立在这些网络上的系统工作方式和机理, 认识复杂系统内部深奥的难以理解的动力学过程^[6]. 作为最基本的动力学过程, 随机游走是网络中最重要同时也是研究历史最悠久的动力学过程之一^[7], 它不仅可以为网络上的其他动力学过程 (如疾病传播^[8]、目标搜索^[9]、路由选择^[10]等) 提供理论分析基础, 也对网络结构性质 (如介数中间态^[11]、平均路径长度^[12]等) 研究具有重要作用. 特别是随机游走在科学与工程领域 (个性化推荐系统^[13]、网站排名算法^[14]等) 也有着广泛的应用, 因此, 研究复杂网

络的随机游走动力学具有重要价值.

为了对网络随机游走进行研究, 学术界提出了多个指标来刻画这一动力学过程^[15]. 其中, 平均吸收时间 (mean trapping time, MTT) 是一个重要的量化指标. MTT^[15] 定义为在带有设定陷阱的网络上, 从网络上除陷阱之外的任意节点出发首次到达陷阱的平均时间. 研究者发现 MTT 对于目标搜索^[16]、传输限制反应 (transport-limited reactions)^[17] 和其他物理化学过程研究具有重要价值, 这为随机游走 MTT 指标的计算提供了研究动力. 在最近几年中, 为了获得 MTT 指标与网络规模或其他参数之间的关系, 针对不同的网络结构, 涌现出一系列求解 MTT 的研究成果^[15,18-25]. 例如: Montroll^[18] 推导出了规则网络上 MTT 的精确结果, 使得该网络上的传输性质有了更精确的刻画方法; Kozak 和 Balakrishnan^[19,20] 给出了 Sierpinski 分形网络的 MTT 精确解; Agliari^[21] 获得了 T 分形网络上的 MTT 解析结果.

* 国家自然科学基金 (批准号: 71171122, 90612003)、山东省自然科学基金 (批准号: ZR2010FM003, 2009ZRB019PF) 和山东高校科研发展计划 (批准号: J11LG11) 资助的课题.

† E-mail: xingchm@tom.com

现实网络是具有小世界效应 (small-world effects) 和无尺度行为 (scale-free behavior) 的复杂网络, 据我们所知, 目前对这类复杂网络随机游走的研究仍以数值研究居多, 缺乏精确的理论推导^[22]. 特别是在随机游走的数值研究中, 一般采用马尔可夫链方法, 这涉及到复杂度较高的矩阵求逆, 对于规模较大的网络, 这种方法并不适用. 本文研究了无标度立体 Koch 网络^[26] 上带有一个陷阱的随机游走问题, 给出了陷阱置于网络中度最大节点情形时, 立体 Koch 网络 MTT 指标的精确计算方法. 通过分析 MTT 指标与网络节点个数的关系, 得出 Koch 网络 MTT 指标随着网络节点数 N 呈线性增长. 与完全图、规则网络、Sierpinski 网络和 T 分形网络的 MTT 指标相比, 立体 Koch 网络独特的拓扑结构性质降低了 MTT 随网络规模增长的速度, 具有较高的传输效率.

需要指出的是, 文献 [25, 27—30] 基于经典 Koch 曲线, 利用迭代的方法构造了平面 Koch 网络, 并研究了平面 Koch 网络拓扑结构性质和随机游走动力学行为. 平面 Koch 网络与本文研究的立体 Koch 网络具有相似的小世界和无标度性质, 但是其度分布临界指数不同于立体 Koch 网络. 特别是在度关联性^[31] 方面, 平面 Koch 网络是度无关的, 而立体 Koch 网络是度相关的. 文献 [31] 的实证研究表明, 物理学合作网络、公司董事网络和因特网等现实系统都与立体 Koch 网络相似, 具有度相关的网络性质. 因此, 研究立体 Koch 网络的随机游走动力学性质更具现实意义.

2 立体 Koch 网络的构造

立体 Koch 网络是文献 [26] 基于 Koch 曲线通过迭代方式构造的确定性复杂网络演化模型. 设 $N(t)$ 表示经过 t 次迭代生成的立体 Koch 网络, 当 $t = 0$ 时, 网络 $N(0)$ 是一个四面体. 在此后的每个时间步, 每个四面体中的所有节点都生成 3 个新节点, 并与原节点构成一个新的四面体. 图 1 给出了立体 Koch 网络前 3 代演化的示意图. 从图 1 可以看出, $t = 2$ 时的 Koch 网络 $N(2)$ 是将 $N(1)$ 中的每个四面体用 $N(1)$ 结构代替而得到的. 当 $t \geq 1$ 时, 将 $N(t-1)$ 中的每个四面体用图 1(b) 所示的 $N(1)$ 网络结构替换, 即可得到第 t 代的立体 Koch 网络 $N(t)$.

分析立体 Koch 网络的生成过程, 可以得出该网络具有如下性质^[26]:

在每个时间步 $t(t \geq 1)$, 网络新增加的节点数 $L_t = 12 \times 5^{t-1}$, 由此可得, t 时刻立体 Koch 网络 $N(t)$ 的总节点数

$$V_t = 3 \times 5^t + 1; \quad (1)$$

对于第 t_i 时刻生成的节点 i , 在 t 时刻的节点度 $k_i(t) = 3 \times 2^{t-t_i}$, 也就是说, 在每次网络迭代时, 节点的度数翻倍, 即

$$k_i(t) = 2 \times k_i(t-1). \quad (2)$$

立体 Koch 网络具有许多自然界和现实社会网络的典型特征. 例如, 网络度分布 $P(k) \sim k^{-\gamma}$, $\gamma = 1 + \ln 5 / \ln 2$, 满足幂律指数分布, 是一个无标度网络. 网络的平均路径长度随网络规模呈对数形式增长. 当网络规模趋向无限大时, 网络的集聚系数趋向于 0.870435, 这表明该网络具有小世界性质. 特别是立体 Koch 网络具有正向匹配的度关联性, 节点倾向于与度数相近或较大的节点建立连接. 这与文献 [32] 实证研究物理学合作网络、公司董事网络的结论是相符的.

立体 Koch 网络不仅具有与现实系统相似的网络性质, 而且具有自相似的网络结构, 为复杂网络动力学研究提供了很好的网络模型. 下文研究立体 Koch 网络上带有固定陷阱的随机游走过程, 给出立体 Koch 网络 MTT 指标的精确计算方法.

3 随机游走问题描述

为了对立体 Koch 网络中的不同节点进行区分, 对网络 $N(t)$ 中的节点按照如下规则进行编号: 网络 $N(0)$ 最初四个节点分别标号为 1, 2, 3, 4; 在此后的每个时间步, 网络中新生成的节点依次编号, 原有节点编号不变, 如图 1 所示. 这样, 网络中每个节点的编号是惟一的, 当网络迭代到第 t 步时, 网络中所有节点从 1 编到 $V_t = 3 \times 5^t + 1$.

另外, 为了便于问题描述, 我们给出如下记号和定义. 对于任意网络 $N(t)$, 分别用矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{Z}$ 表示网络的邻接矩阵和度对角矩阵, 如果网络中的节点 i 和节点 j 之间有边, 则邻接矩阵 $\mathbf{A}$ 的元素 $a_{ij} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$. 任意节点的度 $k_i(t) = \sum_{j=1}^{V_t} a_{ij}$,

这样 $\mathbf{Z} = \text{diag}(k_1(t), k_2(t), \dots, k_i(t), \dots, k_{v_t}(t))$.
最后, 定义 $\mathbf{W} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}^{-1}$, 网络 $N(t)$ 的标准离

散 Laplacian 矩阵 $\mathbf{L} = \mathbf{I} - \mathbf{W}$, 其中 $\mathbf{I}$ 为一个 $V_t \times V_t$ 的单位矩阵.

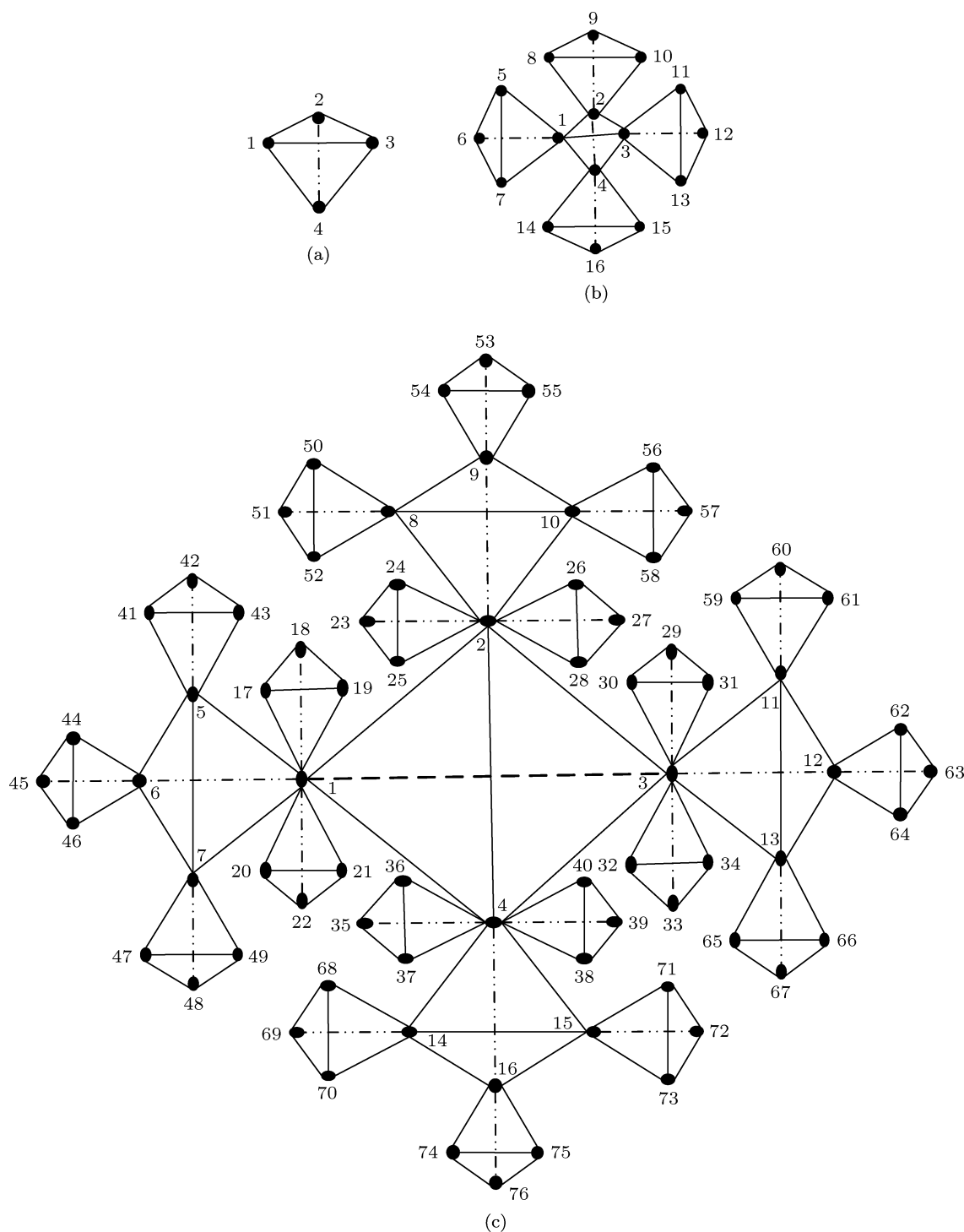


图1 立体 Koch 网络前 3 代演化过程 (a) $t = 0$; (b) $t = 1$; (c) $t = 2$

立体 Koch 网络的随机游走过程为: 将陷阱设置在 1 号节点, 并且标记为 i_T (需要说明的是, 陷阱同样可以设置在 2, 3, 4 号节点, 由于网络的对称

性, 这对于随机游走动力学指标的计算没有任何影响). 在每个时间步, 从网络中异与吸收点 i_T 的节点出发进行随机游走, 每次以相同的概率移动到该节

点的某个邻居节点, 当移动到吸收点 i_T 时游走过程结束. 显然, 无论从哪个节点开始随机游走, 该过程会在有限时间内结束. 该过程可以用两个节点 i 和 j 之间的转移概率 W_{ij} 来刻画, 其中 W_{ij} 为矩阵 $\mathbf{W}^T$ 的元素. 事实上, 矩阵 $\mathbf{W}^T$ 是矩阵 $\mathbf{W}$ 去掉第一行和第一列元素得到的子矩阵.

设 T_i 是从网络中第 i 个节点出发进行随机游走, 首次到达 i_T 时的吸收时间. 因此 $T_{i_T} = 0$, 同时这个指标满足如下的方程 [32]:

$$T_i = \sum_{j=2}^{V_t} W_{ij} T_j + 1, \quad (3)$$

(3) 式中 $i \neq i_T$. 将 (3) 式改写成矩阵形式为

$$\mathbf{T} = \mathbf{W}^T \mathbf{T} + \mathbf{e}, \quad (4)$$

(4) 式中 $\mathbf{T} = (T_2, T_3, \dots, T_N)^T$, $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$, 均为 $N - 1$ 维的向量, $\mathbf{W}^T$ 是一个转移矩阵. 由 (4) 式可得

$$\mathbf{T} = \mathbf{L}^T \mathbf{e}, \quad (5)$$

其中,

$$\mathbf{L}^T = (\mathbf{I} - \mathbf{W}^T)^{-1}, \quad (6)$$

矩阵 $\mathbf{L}^T$ 是用马尔可夫链表示的无偏好随机游走的基础矩阵. 实际上, 矩阵 $\mathbf{L}^T$ 是网络 $N(t)$ 的标准离散 Laplacian 矩阵 $\mathbf{L}$ 去掉对应于吸收点的行和列的子矩阵.

立体 Koch 网络的 MTT 指标记为 $\langle T \rangle_t$, 是网络 $N(t)$ 中除了吸收点以外的所有节点的 T_i 的平均值, 由定义可得

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_t &= \frac{1}{V_t - 1} \sum_{i=2}^{V_n} T_i \\ &= \frac{i}{V_t - 1} \sum_{i=2}^{V_n} \sum_{j=2}^{V_n} L_{ij}, \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式中 L_{ij} 为矩阵 $\mathbf{L}$ 中的元素, 使用随机游走的马尔可夫过程可以解释为从节点 i 出发, 到达节点 j 的期望次数.

MTT 指标具有重要的意义, 它衡量了网络中随机游走的效率, 较小的 MTT 值表示网络具有较高

的传输效率, 反之亦然 [22]. 由 (7) 式可知, $\langle T \rangle_t$ 的计算问题可以转化为计算矩阵 $\mathbf{L}$ 中所有元素之和的问题. 矩阵 $\mathbf{L}$ 是 $V_t - 1$ 阶方阵, 由于 V_t 随 t 呈现指数形式增长, 对于较大的 t 值, 通过 (7) 式直接计算 $\langle T \rangle_t$ 复杂度较高. 由于计算机计算速度和内存的限制, 采用这种方法只能计算出前几代网络的 MTT 指标, 如表 1 所示.

通过分析 Koch 网络的构造过程, 我们发现根据立体 Koch 网络的拓扑结构性性质能够方便地得到网络 MTT 指标的精确解析结果, 详细推导过程在下节介绍.

表 1 根据 (7) 式得到的 MTT 指标

t	V_t	$\langle T \rangle_t$
0	4	9/3
1	16	216/15
2	76	5175/75
3	376	127350/375
4	1876	3169125/1875

4 精确求解 Koch 网络的 MTT

为了求解 Koch 网络随机游走平均首次到达时间 MTT 指标 $\langle T \rangle_t$, 本节先推导 T_i^t 与网络演化时间步 t 的关系式, 其中 T_i^t 是在第 t 代立体 Koch 网络 $N(t)$ 中, 从节点 i 出发的吸收时间.

4.1 吸收时间 T_i^t 的数值求解

根据网络随机游走的定义, 当 $t \geq 0$ 时, 任意 $T_1^t = 0$. 根据 (7) 式, 当 $t = 0$ 时, $T_2^0 = T_3^0 = T_4^0 = 3$; 当 $t = 1$ 时, $T_2^1 = T_3^1 = T_4^1 = 15$, $T_5^1 = T_6^1 = T_7^1 = 3$, $T_8^1 = T_9^1 = T_{10}^1 = T_{11}^1 = T_{12}^1 = T_{13}^1 = T_{14}^1 = T_{15}^1 = T_{16}^1 = 18$. 表 2 列出了前 4 代立体 Koch 网络节点的 T_i^t 指标的数值结果.

表 2 根据 (7) 式得到的网络 T_i^t 指标

$t \backslash i$	(2—4)	(5—7)	(8—16)	(17—22)	(23—40)	(41—49)	(50—76)	(77—88)	(89—124)
0	3								
1	15	3	18						
2	75	15	90	3	78	18	93		
3	375	75	450	15	390	90	465	3	378
4	1875	375	2250	75	1950	450	2325	15	1890

分析表 2 的计算结果, 对于任意节点 i , 有如下关系式 $T_i^{t+1} = 5T_i^t$. 也就是说, 当立体 Koch 网络从第 t 代演化到第 $t+1$ 代时, 同一节点的 T_i^t 指标增加 4 倍. 例如: $T_2^3 = 5 \times T_2^2 = 25 \times T_2^1 = 125 \times T_2^0 = 125 \times 3 = 375$, $T_8^3 = 5 \times T_8^2 = 25 \times T_8^1 = 25 \times 18 = 450$. 这是我们发现的立体 Koch 网络随机游走的一个基本特征, 该特征也可通过以下分析给出推理过程.

考察第 t 代立体 Koch 网络 $N(t)$ 中的任意一个节点 i , 根据 (2) 式可以推出, 当网络迭代到第 $t+1$ 代时, 网络节点 i 的度数 k_i 翻倍. 设 X 是 $N(t+1)$ 网络中从节点 i 到达它的任意一个 k_i 旧邻居节点所用的随机游走时间; 设 Y 是 $N(t+1)$ 网络中从节点 i 的任意新邻居节点到达其 k_i 老邻居节点中的任意一个节点所用的时间. 这样可以建立如下方程:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+Y), \\ Y = \frac{1}{3}(1+X) + \frac{2}{3}(1+Y). \end{cases} \quad (8)$$

求解上述方程组, 可得 $X = 5$. 这表明当网络从第 $t-1$ 代演化到第 t 代时, 网络中两个节点间的平均首次到达时间增长 4 倍, 也即

$$T_i^{n+1} = 5T_i^n. \quad (9)$$

(9) 式有助于下一节中网络 MTT 指标的解析求解.

4.2 MTT 的求解

在得到立体 Koch 网络中节点随机游走吸收时间的递增规律后, 继续求解所有节点吸收时间的平均值, 期望得到网络 MTT 指标的精确求解公式.

设 Λ_t 表示网络 $N(t)$ 中所有节点的集合, $\bar{\Lambda}_t$ 表示第 t 代网络中新增的节点的集合, 显然有关系: $\Lambda_t = \bar{\Lambda}_t \cup \Lambda_{t-1}$. 为了便于计算, 对于 $m \leq t$, 定义如下两个指标:

$$T_{m,\text{total}}^t = \sum_{i \in \Lambda_m} T_i^t, \quad (10)$$

$$\bar{T}_{m,\text{total}}^t = \sum_{i \in \bar{\Lambda}_m} T_i^t, \quad (11)$$

这样即可得到

$$T_{t,\text{total}}^t = \sum_{i \in \Lambda_t} T_i^t = T_{t-1,\text{total}}^t + \bar{T}_{t,\text{total}}^t. \quad (12)$$

在此基础上, 我们通过对 $\bar{T}_{t,\text{total}}^t$ 指标的求解, 给出 $T_{t,\text{total}}^t$ 指标的精确求解方法.

观察网络演化过程, 在前几代立体 Koch 网络中, 可以比较方便地计算网络的平均吸收时间. 当 $t=1$ 时, 根据立体 Koch 网络的构造, 可以得到以下等式:

$$\begin{aligned} T_5^1 &= \frac{1}{3}(1+T_1^1) + \frac{1}{3}(1+T_6^1) + \frac{1}{3}(1+T_7^1), \\ T_6^1 &= \frac{1}{3}(1+T_1^1) + \frac{1}{3}(1+T_5^1) + \frac{1}{3}(1+T_7^1), \\ T_7^1 &= \frac{1}{3}(1+T_1^1) + \frac{1}{3}(1+T_5^1) + \frac{1}{3}(1+T_6^1), \\ T_8^1 &= \frac{1}{3}(1+T_2^1) + \frac{1}{3}(1+T_9^1) + \frac{1}{3}(1+T_{10}^1), \\ T_9^1 &= \frac{1}{3}(1+T_2^1) + \frac{1}{3}(1+T_8^1) + \frac{1}{3}(1+T_{10}^1), \\ T_{10}^1 &= \frac{1}{3}(1+T_2^1) + \frac{1}{3}(1+T_8^1) + \frac{1}{3}(1+T_9^1), \\ T_{11}^1 &= \frac{1}{3}(1+T_3^1) + \frac{1}{3}(1+T_{12}^1) + \frac{1}{3}(1+T_{13}^1), \\ T_{12}^1 &= \frac{1}{3}(1+T_3^1) + \frac{1}{3}(1+T_{11}^1) + \frac{1}{3}(1+T_{13}^1), \\ T_{13}^1 &= \frac{1}{3}(1+T_{31}^1) + \frac{1}{3}(1+T_{11}^1) + \frac{1}{3}(1+T_{12}^1), \\ T_{14}^1 &= \frac{1}{3}(1+T_4^1) + \frac{1}{3}(1+T_{15}^1) + \frac{1}{3}(1+T_{16}^1), \\ T_{15}^1 &= \frac{1}{3}(1+T_4^1) + \frac{1}{3}(1+T_{14}^1) + \frac{1}{3}(1+T_{16}^1), \\ T_{16}^1 &= \frac{1}{3}(1+T_4^1) + \frac{1}{3}(1+T_{14}^1) + \frac{1}{3}(1+T_{15}^1). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \bar{T}_{1,\text{total}}^1 &= \sum_{i \in \bar{\Lambda}_1} T_i^1 \\ &= T_5^1 + T_6^1 + T_7^1 + T_8^1 \\ &\quad + T_9^1 + T_{10}^1 + T_{11}^1 + T_{12}^1 \\ &\quad + T_{13}^1 + T_{14}^1 + T_{15}^1 + T_{16}^1 \\ &= 36 + 3 \times \bar{T}_{0,\text{total}}^1 \\ &= 12 \times 3 + 3 \times \bar{T}_{0,\text{total}}^1. \end{aligned}$$

与此类似, 当 $t=2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \bar{T}_{2,\text{total}}^2 &= \sum_{i \in \bar{\Lambda}_2} T_i^2 = \sum_{i=17}^{76} T_i^2 \\ &= 3 \times 60 + 3 \times \bar{T}_{1,\text{total}}^2 + 3 \times 2 \times \bar{T}_{0,\text{total}}^2 \end{aligned}$$

深入分析, 通过数学归纳法, 不难得出:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{t,\text{total}}^t &= 3 \times 12 \times 5^{t-1} + 3\bar{T}_{t-1,\text{total}}^t \\ &\quad + 3 \times 2\bar{T}_{t-2,\text{total}}^t + \cdots \\ &\quad + 3 \times 2^t \bar{T}_{1,\text{total}}^t + 3 \times 2^{t-1} \bar{T}_{0,\text{total}}^t, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_{t+1,\text{total}}^{t+1} &= 3 \times 12 \times 5^t + 3\bar{T}_{t,\text{total}}^{t+1} \\ &+ 3 \times 2\bar{T}_{t-1,\text{total}}^{t+1} + \cdots \\ &+ 3 \times 2^{t+1}\bar{T}_{1,\text{total}}^t + 3 \times 2^t\bar{T}_{0,\text{total}}^t.\end{aligned}\quad (14)$$

由 (13) 式和 (14) 式, 结合 (9) 式, 经过化简, 可得

$$\bar{T}_{t+1,\text{total}}^{t+1} = 25 \times \bar{T}_{t,\text{total}}^t - 36 \times 5^t. \quad (15)$$

使用初始条件 $\bar{T}_{1,\text{total}}^1 = 171$, 利用数列递推方法求解 (15) 式, 可得

$$\bar{T}_{t,\text{total}}^t = 25^t \times \left[\frac{171}{25} - \frac{9}{25} \times \left(1 - \frac{1}{5^{t-1}} \right) \right],$$

化简可得:

$$\bar{T}_{t,\text{total}}^t = 162 \times 25^{t-1} + 9 \times 5^{t-1}. \quad (16)$$

将 (16) 式代入 (12) 式, 结合 (9) 式, 可以得到

$$\begin{aligned}T_{t,\text{total}}^t &= T_{t-1,\text{total}}^t + 162 \times 25^{t-1} + 9 \times 5^{t-1} \\ &= 5 \times T_{t-1,\text{total}}^{t-1} + 162 \times 25^{t-1} + 9 \times 5^{t-1}.\end{aligned}\quad (17)$$

使用初始条件 $T_{0,\text{total}}^0 = 9$, 利用数列递推方法求解 (13) 式, 可得

$$T_{t,\text{total}}^t = 5^n \times \left[9 + 9 \times n + \frac{162}{4}(5^n - 1) \right],$$

化简可得

$$T_{t,\text{total}}^t = \frac{5^n}{10} \times [81 \times 5^n + 18 \times n + 9]. \quad (18)$$

将 (18) 式代入 (7) 式, 可以得到立体 Koch 网络 MTT 指标的精确求解公式

$$\begin{aligned}\langle T \rangle_t &= \frac{1}{V_t - 1} \sum_{i=2}^{V_t} T_i \\ &= \frac{1}{10} (27 \times 5^t + 6 \times t + 3).\end{aligned}\quad (19)$$

将通过 (19) 式的计算结果与表 1 中的数值结果进行比较, 可得当 $0 \leq t \leq 4$ 时, 两种方式的计算结果完全一致, 如图 2 所示, 其中 NR 表示 (7) 式的计算结果, AR 表示 (19) 式的结果. 这充分验证了上述理论推导的正确性.

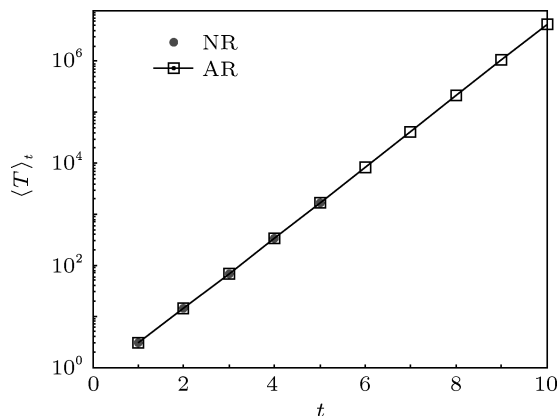


图 2 (7) 式和 (19) 式所得 MTT 指标的比较

4.3 MTT 与网络规模 (V_t) 的关系

为了比较不同网络随机游走的吸收效率, 我们分析立体 Koch 网络 MTT 与网络规模 (V_t) 的关系.

由 (1) 式可得 $5^t = V_t - 1/3$, $t = \log_5^{\frac{1}{3}(V_t-1)}$, 将其代入 (19) 式, 可得

$$\langle T \rangle_t = \frac{1}{10} \left[9 \times (V_t - 1) + 6 \times \log_5^{\frac{1}{3}(V_t-1)} + 3 \right]. \quad (20)$$

随着 t 的增加, 当 $V_t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\langle T \rangle_t \sim \frac{9}{10} V_t. \quad (21)$$

(21) 式表明, 随着立体 Koch 网络规模的增加, 网络 MTT 随网络节点个数呈线性增长, 该关系从图 2 中也能反映出来.

立体 Koch 网络 MTT 指标与网络规模 V_t 的渐近关系与其他网络不同. 大规模的 1 维、2 维、3 维规则网络, MTT 指标分别随着网络规模呈现 $\langle T \rangle_t - V_t^2$, $\langle T \rangle_t - V_t \ln V_t$ 以及 $\langle T \rangle_t - V_t$ 形式的增长^[18]. 2 维和 3 维的 Sierpinski 网络, MTT 指标分别随着网络规模呈现 $\langle T \rangle_t - V_t^{1.464}$ 和 $\langle T \rangle_t - V_t^{1.293}$ 形式增长^[19,20]. T 分形网络中, MTT 指标随着网络规模呈现 $\langle T \rangle_t - V_t^{1.631}$ 形式增长; 在树形网络中, MTT 指标随着网络规模呈现 $\langle T \rangle_t - V_t$ 形式增长^[15]; 在 Apollonian 网络中, MTT 指标随着网络规模呈现 $\langle T \rangle_t - V_t^{0.535}$ 形式增长^[24]; 在平面 Koch 网络中, MTT 指标随着网络规模呈现 $\langle T \rangle_t - \frac{5}{6} V_t$ 形式增长^[25]. 与规则网络、Sierpinski 网络、T 分形网络, 以及树形网络相比, 立体 Koch 网络的传输效率更高. 但是, 与 Apollonian 网络和平面 Koch 网络相比, 立体 Koch 网络的传输效率稍低. 这是不同结构的网络, 其动力学行为表现出明显的、本质上的差

异^[1]的又一验证. 另外, 比较立体 Koch 网络和平面 Koch 网络, 可以推测得出 MTT 指标随网络规模变化的规律受网络相关性的影响不大.

5 结 论

本文研究了确定性复杂网络演化模型——立体 Koch 网络上带有吸收点的随机游走问题. 立体 Koch 网络具有现实网络中的许多重要性质, 包括无标度行为、小世界特性、度相关性以及一系列其他网络拓扑性质. 根据立体 Koch 网络的结构特点, 本文得出当网络从第 $t-1$ 代演化到第 t 代时, 网络中节点间的平均首次到达时间增长 4 倍. 基于

这一关系, 利用重正化群方法, 推导出了立体 Koch 网络上带有吸收点的随机游走 MTT 指标的精确表达式. 另外, 立体 Koch 网络 MTT 的计算结果表明其 MTT 指标随网络规模 V_t 呈线性增长. 虽然立体 Koch 网络具有与平面 Koch 网络相反的度相关性性质, 但是立体 Koch 网络 MTT 指标随网络规模变化的规律与平面 Koch 网络相似. 我们推测 MTT 指标随网络规模变化的规律受网相关性的影响不大. 与完全图、规则网络、Sierpinski 网络和 T 分形网络相比, 立体 Koch 网络具有更高的传输效率. 我们希望本文能对具有立体 Koch 网络性质的现实网络上的动力学研究有所帮助.

-
- [1] Albert R, Jeong H, Barabasi A L 1999 *Nature* **401** 130
 - [2] Cami A, Deo N 2008 *Networks* **51** 211
 - [3] Faloutsos M, Faloutsos P, Faloutsos C 1999 *Comput. Commun. Rev.* **29** 251
 - [4] Xu T, Chen R, He Y 2004 *Int. J. Mod. Phys. B* **18** 2599
 - [5] Guimerá R, Amaral L A N 2004 *Eur. Phys. J. B* **38** 381
 - [6] Dorogovtsev S N, Goltsev A V, Mendes J F F 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1275
 - [7] Spitzer F 1964 *Principles of Random Walk* (1st Ed.) (Princeton, N. J.: van Nostrand) p402
 - [8] Lloyd A L, May R M 2001 *Science* **292** 1316
 - [9] Shlesinger M F 2006 *Nature* **443** 281
 - [10] Pandit S A, Amritkar R E 2001 *Phys. Rev. E* **63** 041104
 - [11] Noh J D, Rieger H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 118701
 - [12] Lee S M, Yook S H, Kim Y 2008 *Physica A* **387** 3033
 - [13] Fouss F, Pirotte A, Renders J, Saerens M 2007 *IEEE T. Knowl. Data En.* **19** 355
 - [14] Berkhin P 2005 *Internet Mathematics* **2** 73
 - [15] Zhang Z Z, Li X T, Lin Y, Chen G R 2011 *J. Stat. Mech.* **2011** 08013
 - [16] Bénichou O, Coppey M, Moreau M, Suet P H, Voituriez R 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 198101
 - [17] Loverdo C, Bénichou O, Moreau M, Voituriez R 2008 *Nat. Phys.* **4** 134
 - [18] Montroll E W 1969 *J. Math. Phys.* **10** 753
 - [19] Kozak J J, Balakrishnan V 2002 *Phys. Rev. E* **65** 021105
 - [20] Kozak J J, Balakrishnan V 2002 *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **12** 2379
 - [21] Agliari E 2008 *Phys. Rev. E* **77** 011128
 - [22] Zhang Z Z, Qi Y, Zhou S G, Xie W L, Guan J H 2009 *Phys. Rev. E* **79** 021127
 - [23] Wu S Q, Zhang Z Z, Chen G R 2011 *Eur. Phys. J. B* **82** 91
 - [24] Zhang Z Z, Guan J H, Xie W L, Qi Y, Zhou S G 2009 *Europhys. Lett.* **86** 10006
 - [25] Zhang Z Z, Zhou S G, Xie W L, Chen L C, Lin Y, Guan J H 2009 *Phys. Rev. E* **79** 061113
 - [26] Liu J X, Kong X M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2244 (in Chinese) [刘甲雪, 孔祥木 2010 物理学报 **59** 2244]
 - [27] Zhang Z Z, Gao S Y, Chen L C, Zhou S G, Zhang H J, Gan J H 2010 *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 395101
 - [28] Zhang Z Z, Gao S Y, Xie W L 2010 *Chaos* **20** 043112
 - [29] Zhang Z Z, Gao S Y 2011 *Euro. Phys. J. B* **80** 209
 - [30] Wu B, Zhang Z Z, Chen G R 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 025102
 - [31] Newman M E J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 208701
 - [32] Kemeny J G, Snell J L 1976 *Finite Markov Chains* (1st Ed.) (New York: Springer) p210

Exact solution for mean trapping time of random walk on a scale-free Koch network*

Xing Chang-Ming^{1)†} Liu Fang-Ai²⁾ Xu Ru-Zhi¹⁾

1) (*Shandong Financial Information Engineering Research Center, School of Computer Science and Technology,
Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China*)

2) (*School of Information Science and Engineering, Shandong Normal University, Jinan 250014, China*)

(Received 31 March 2012; revised manuscript received 20 April 2012)

Abstract

As a basic dynamical process, random walk on networks is fundamental to many branches of science, and has attracted much attention. A difficult problem in the study of random walk is how to obtain the exact solution for the mean trapping time (MTT) of this process. The MTT is defined as the mean time for the walker starting from any node in the network to first reach the trap node. In this paper, we study random walk on the Koch network with a trap located at the highest degree node and calculate the solution for MTT. The accurate expression for the MTT is obtained through the recurrence relation and the structure properties of the Koch network. We confirm the correctness of the MTT result by direct numerical calculations based on the Laplacian matrix of Koch network. It can be seen from the obtained results that in the large limit of network size, the MTT increases linearly with the size of network increasing. Comparison between the MTT result of the Koch network with that of the other networks, such as complete graph, regular lattices, Sierpinski fractals, and T-graph, shows that the Koch has a high transmission efficiency.

Keywords: complex networks, Koch network, random walk, mean trapping time

PACS: 05.40.Fb, 89.75.Hc, 05.60.Cd, 89.75.Da

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 71171122, 90612003), the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant Nos. ZR2010FM003, 2009ZRB019PF), and the University Research and Development Program of Shandong Province, China (Grant No. J11LG11).

† E-mail: xingchm@tom.com