

Logistic 混沌系统的熵特性研究*

潘欣裕^{1)2)†} 赵鹤鸣²⁾

1) (苏州科技大学电子与信息工程学院, 苏州 215011)

2) (苏州大学电子信息学院, 苏州 215021)

(2012年2月16日收到; 2012年3月19日收到修改稿)

作为形式上相对较为简单的一维混沌函数, Logistic 系统在很多领域有着重要的应用。本文主要分析了 Logistic 系统的熵稳定特性, 对不同参数 μ 和系统初值形成的 Logistic 序列, 进行了统计分类, 得到了一系列的熵值, 并详细分析了熵的分布情况。数值仿真结果表明, Logistic 系统的熵由参数 μ 决定, 而与系统初值基本无关, 且当参数 μ 取值接近上界 ($\mu = 4$) 时, 序列分布越趋于均匀, 熵也接近理论极限值。

关键词: Logistic 系统, 混沌, 熵

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg

1 引言

混沌系统从被提出至今一直是学者关注的热点, 一些新兴的理论也不断地应用到混沌系统的产生与控制中^[1,2], 而其中相对较为简单的混沌系统——Logistic 混沌函数就一直备受研究者的重视。1978年 Feigenbaum^[3] 对其数学特性做了详细的分析。近年来国内外学者针对 Logistic 系统应用的不同场合, 进行了更为深入的研究, 文献[4]实现了 Logistic 模型的倍周期分岔控制, 文献[5]讨论了延迟时间对 Logistic 系统亚稳态和稳态之间跃迁率的影响, 文献[6]将模型应用于生物分子网络的进化中, 文献[7,8]对多种复合 Logistic 系统的分岔和分维做了详尽的阐述, 文献[9]研究了与 Logistic 序列部分相似的 C-K 映射的混沌分形特性。可见 Logistic 模型在诸多领域皆有应用, 特别在信息通信领域更具有重要的意义。文献[10—12]分别阐述了 Logistic 系统在通信中的参数辨识和快速同步问题, 可见混沌体系为保密通信提供了良好的理论

支撑。

近年来的研究主要集中在对 Logistic 系统模型的应用中, 并以参数的估计为多, 对 Logistic 序列的整体研究文献较少。作为混沌系统, 不可预测和不确定性是其最重要的特点, 从信息理论的角度出发, 要研究一个函数的整体不确定性除了对其函数闭合表达式研究以外, 还可以对其产生的离散序列进行统计分析并量化。而在信息理论体系下, 对不确定性的最佳量化参数就是熵。文献[13]主要以 Lyapunov 指数推演的平均熵参数为研究对象, 文献[14]研究了短序列的熵估计算法, 两篇文献都给出了混沌序列熵参数的演化特性, 而对于混沌序列的统计分析相对较少。罗传文教授^[15]通过独占球理论定义了均匀度概念, 并对 Logistic 系统的 Lyapunov 指数和均匀度做了比对分析, 得出了 Logistic 系统的混沌特性随参数 μ 的增大而越来越随机的结论。

在文献[15]的启示下, 本文拟从宏观角度研究 Logistic 序列的分布特性, 侧重对 Logistic 系统的熵值分析, 并且通过数值模拟得出结论: 只要在

* 国家自然科学基金(批准号: 61071215)、江苏省研究生科研创新计划(批准号: CXZZ12_0815)和苏州市应用基础研究项目(批准号: SYG201033)资助的课题。

† E-mail: panxy@mail.usts.edu.cn

数据量充分的情况下, Logistic 系统的熵基本由参数 μ 决定, 与系统初值和序列长度无关, 且随着参数 μ 的增加, 熵值也呈现递增趋势, 越来越接近理论极限值 $\log_2 M$ (M 为统计区间个数). 鉴于此可以推测 Logistic 混沌系统的确定表达式得到了不确定的序列, 而不确定的序列在整体上又隐含了一定的确定成分.

2 Logistic 函数简介

经典的 Logistic 函数如下所示:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) = f(x_n), \quad (1)$$

其中参数 $\mu \in (0, 4]$, 则所有的 $x \in [0, 1]$.

在给定参数 μ 以及系统初值 x_0 的情况下, 通过 (1) 式迭代计算即可获得任意长度的 Logistic 序列. 而根据参数 μ 的取值不同, Logistic 系统经过多次迭代以后会出现不同的情况: 1) $\mu \in (0, 1)$ 时, 系统稳定于 $x = 0$; 2) $\mu \in [1, 3]$ 时, 系统有两个稳定点, $x = 0$ 或 $x = 1 - \frac{1}{\mu}$; 3) $\mu \in (3, 3.449)$ 时, 系统存在二周期点, 即 $x = \frac{1 + \mu \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$; 4) $\mu \in (3.449, 3.544)$ 时, 系统存在四周期点; 5) $\mu \in (3.544, 3.564)$ 时, 系统存在八周期点, 从此 Logistic 系统就进入了所谓倍周期分岔状态. 在此过程中, 存在一个重要参数——Feigenbaum 常数 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = 4.669201 \dots$. 经过多次分岔后, 现在一般认为当 $\mu_\infty = 3.570$ 时, 系统进入混沌状态.

本文主要讨论 Logistic 系统在混沌状态时的分布及其熵特性.

3 Logistic 系统的熵特性分析

虽然混沌系统的研究已经开展了几十年, 但仍没有完整的精确定义, 只有一些比较公认的性质, 比如系统的初值敏感依赖性使其不可预测, 系统拓扑传递性使其不能被分解成两个互不影响的子系统, 以及系统具有周期点稠密性等. 对于 Logistic 系统的理论研究很多, 但是数据仿真实验文献却不多, 特别是 Logistic 序列的统计特性鲜有报道. 现主要探讨不同初值和 μ 参数对于序列分布的影响, 并将这种影响量化.

设计的仿真实验规则如下: 参数 μ 在 3.500—3.999 之间取值, 步进 0.001, 共 500 个数值; 系统初值 x_0 在 0.01—0.99 之间取值, 步进 0.01, 共 99 个数值. 则由 (1) 式迭代得到的离散混沌序列 $x(n)$ 的取值范围是 0—1 之间. 在对序列统计时, 将 0—1 区间用 0.05 的步长进行划分则可以得到 0—0.05, 0.05—0.10, …, 0.95—1.00 共 20 个统计区间; 也可采用 0.01 的步长进行划分, 则有 100 个统计区间, 区间数越多则认为数据区分越精细. 设定 Logistic 离散混沌序列长度为 N , 统计落在每个区间内的离散序列值的个数为 n_i ($i = 1, 2, \dots, M$, M 为统计区间数), 设定区间统计概率 $p_i = \frac{n_i}{N}$, 则有 $\sum_{i=1}^M p_i = 1$, 根据熵函数的定义, 得到 Logistic 混沌序列的熵函数 $H = -\sum_{i=1}^M p_i \log_2(p_i)$. 另外由熵函数极值性可知, 通信系统中, 当信源等概率分布时, 熵函数得到极大值, 对应至此, 当各个统计区间的概率都相等时, 即 $p_i = \frac{1}{M}$ ($i = 1, 2, \dots, M$) 时, 熵函数有极大值 $\max(H) = \max \left\{ -\sum_{i=1}^M p_i \log_2(p_i) \right\} = -\sum_{i=1}^M \frac{1}{M} \log_2 \left(\frac{1}{M} \right) = \log_2 M$ (通信系统中 M 表示信源符号数, 这里是统计区间个数), 若统计区间为 20, 则熵的极大值为 $\log_2 20 \approx 4.32$ bit; 如果统计区间分为 100 个, 那么熵的极大值为 $\log_2 100 \approx 6.64$ bit; 如果统计区间分为 10000 个, 则熵的极大值为 $\log_2 10000 \approx 13.28$ bit.

仿真实验在 Matlab 7.0 环境下进行, Logistic 混沌序列直接由 (1) 式产生, 所有数据不做删减, 一般如果序列长度够长 ($N > 10000$), 初始段还未进入混沌的数据对统计结果的影响不大, 而且所有情况下都是这样取数, 也满足统计实验的一致性. 系统精度采用了 Matlab 的默认精度, 双精度浮点数 64 bit, 小数可以达到 10^{-13} , 满足本实验的要求, 误差很少.

图 1 分别给出了数据长度 $N = 100000$ 时, $\mu = 3.730$ 和 $\mu = 3.995$ 时, 在 0—1 内分了 100 个区间的混沌序列统计分布情况. 从图 1 可见初值的不同对序列的分布几乎没有影响. 另外根据 Logistic 函数表达式 $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ 可知, x_n 的最大取值为 $\mu/4$, 最小值为 $\mu \frac{\mu}{4} \left(1 - \frac{\mu}{4}\right) = \mu^2/4 - \mu^3/16$, 所以序列的取值范围为 $x \in [(\mu^2/4 - \mu^3/16), \mu/4]$, 故 $\mu = 3.730$ 时 $x_n \in$

$(0.235, 0.933)$, $\mu = 3.995$ 时 $x_n \in (0.005, 0.999)$.

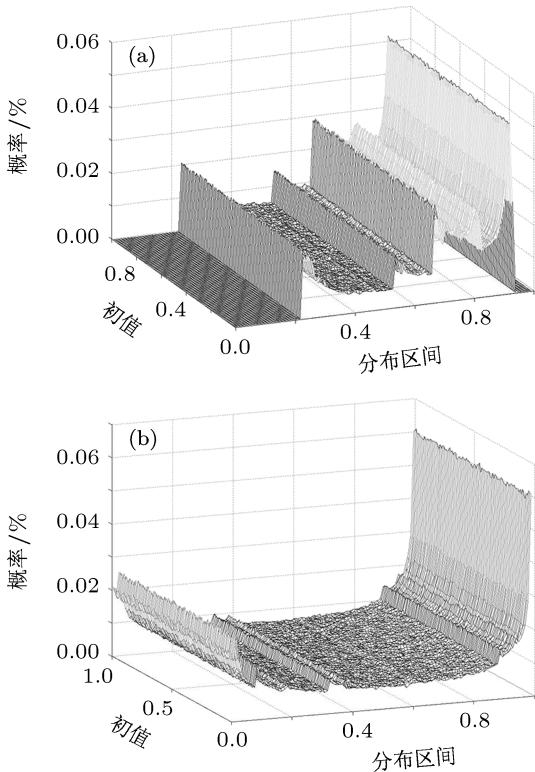


图 1 $N = 100000, M = 100$ 时序列的统计分布 (a) $\mu = 3.730$; (b) $\mu = 3.995$

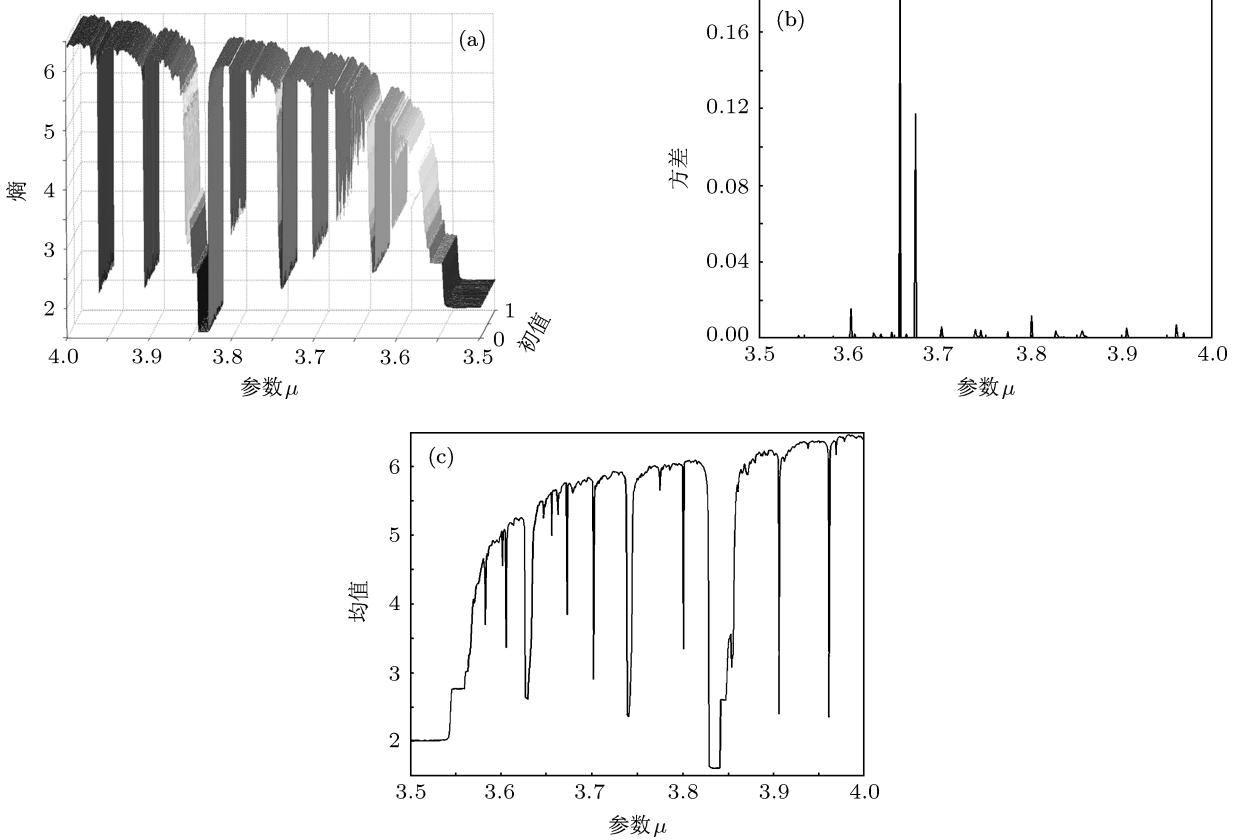


图 2 $N = 10000, M = 100$ 时的结果 (a) 熵三维图; (b) 熵方差; (c) 熵均值

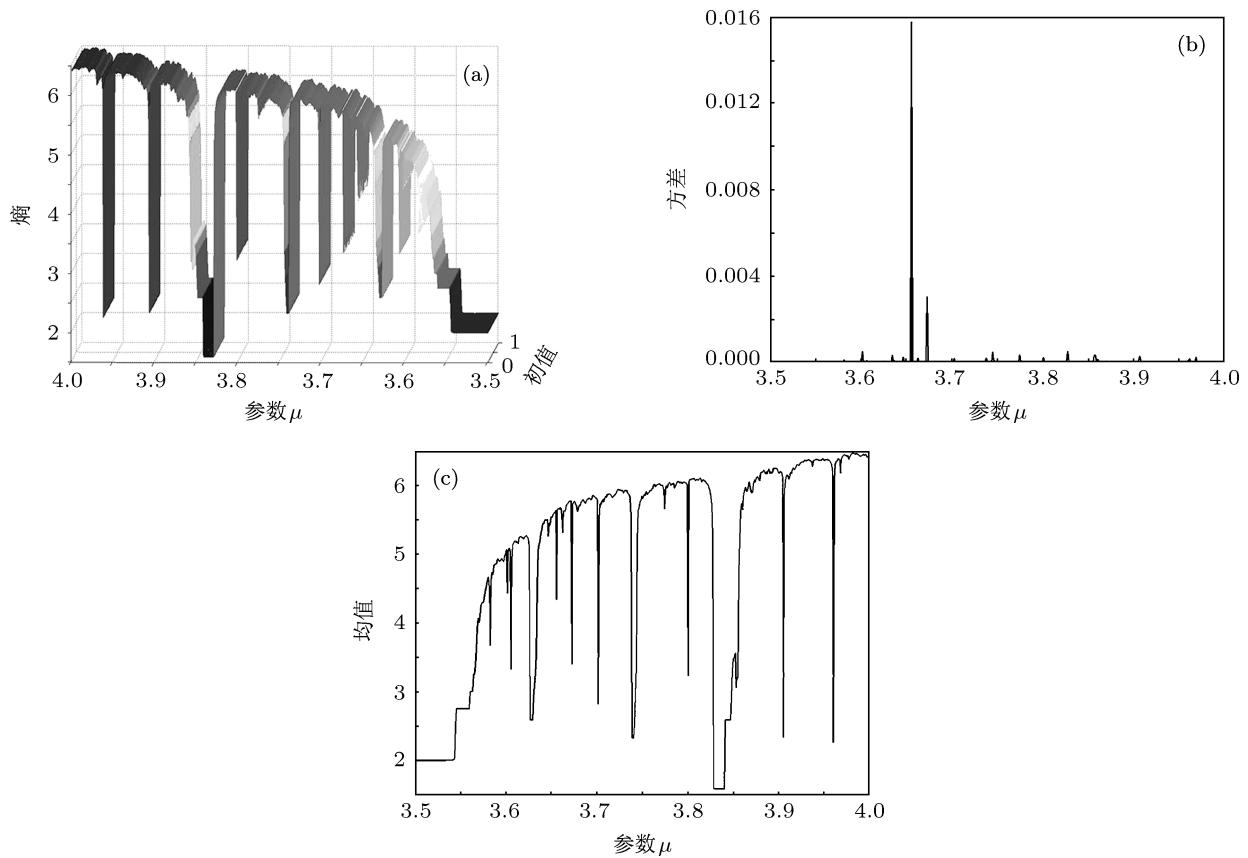


图 3 $N = 100000, M = 100$ 时的结果 (a) 熵三维图; (b) 熵方差; (c) 熵均值

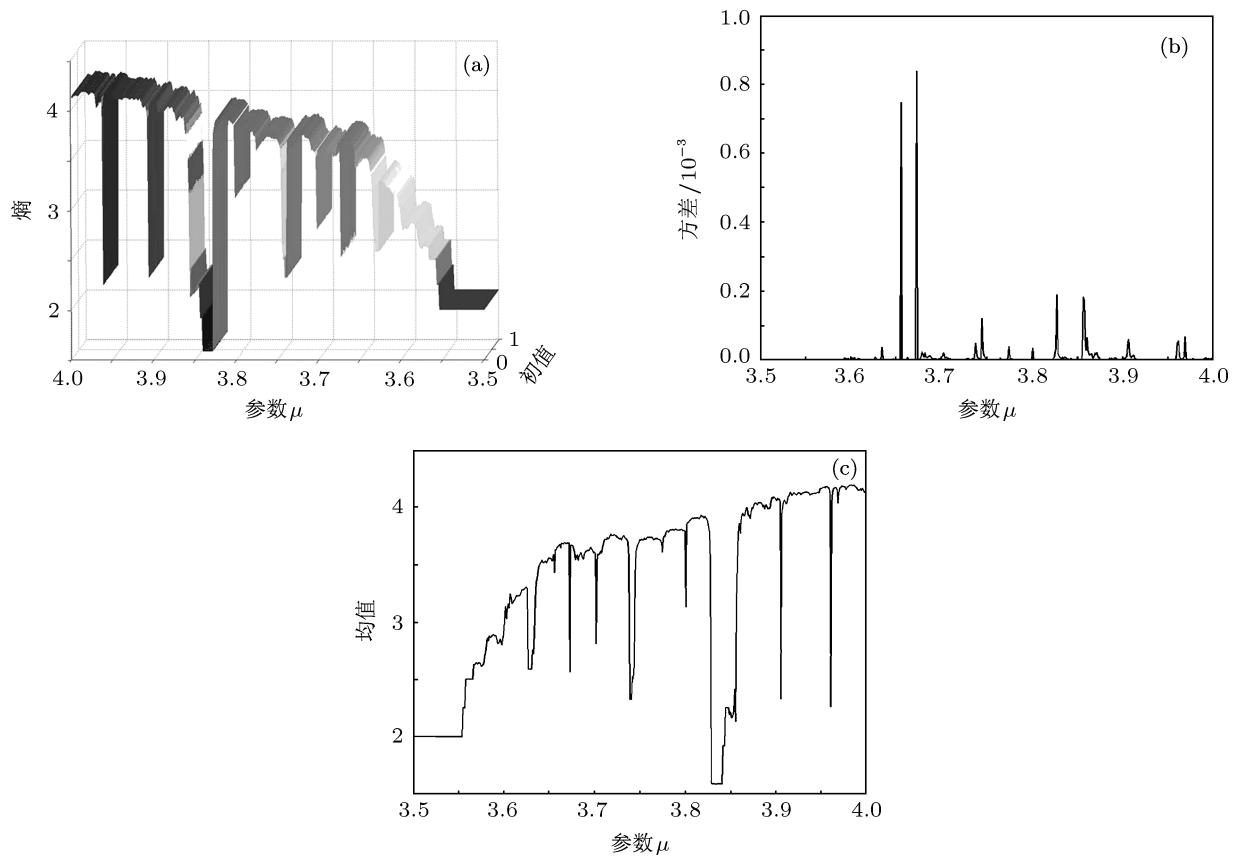
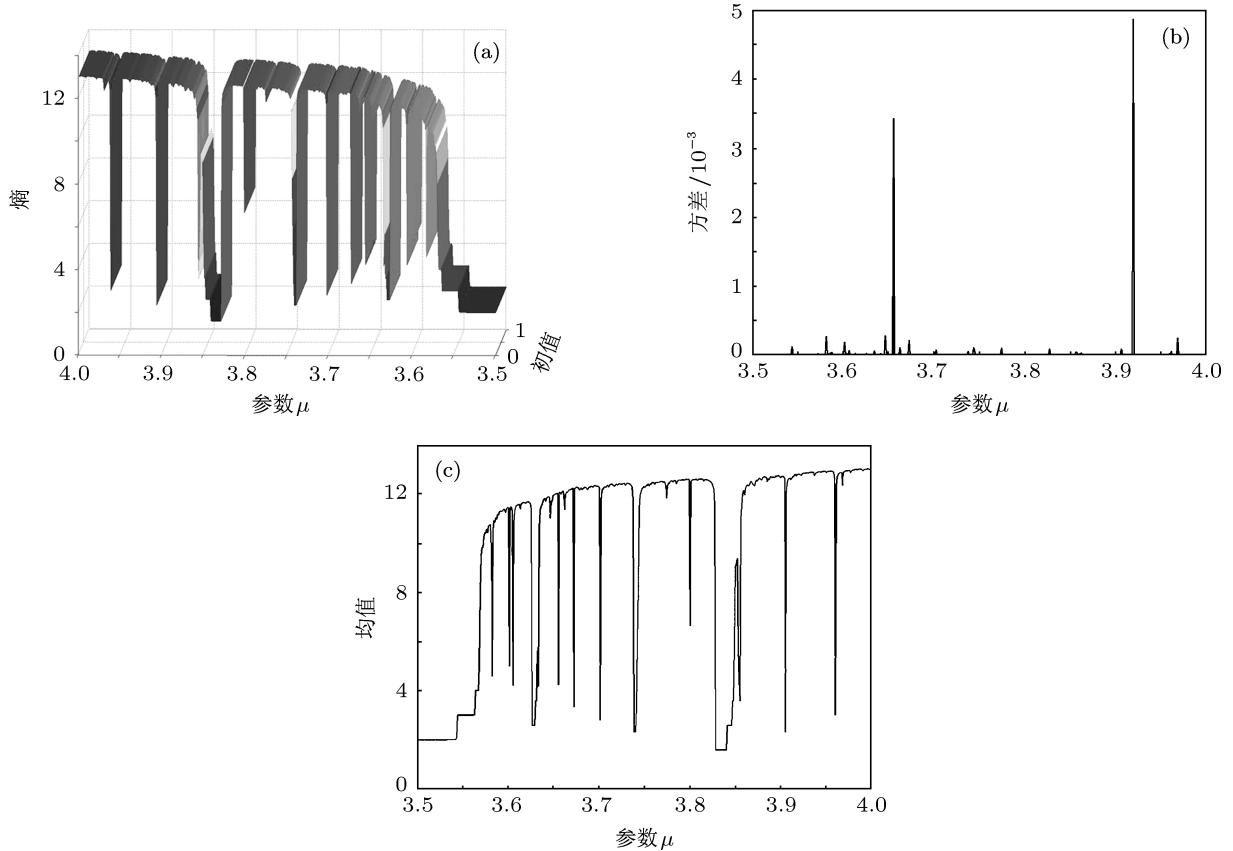


图 4 $N = 100000, M = 20$ 时的结果 (a) 熵三维图; (b) 熵方差; (c) 熵均值

图 5 $N = 1000000, M = 10000$ 时的结果 (a) 熵三维图; (b) 熵方差; (c) 熵均值

由于要系统处于混沌状态一般 $\mu > 3.5$, 故(3)式中 $\mu \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) > 1$. 所以当 x_n 处于系统上界附近时, x_{n+1} 会趋于系统的下界, 但映射的区域扩大了 $\mu \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)$ 倍. 这也是之所以图 1(a) 和 (b) 的序列分布在两边界附近的比例相对较大、且靠近上界的统计值最大的原因. 当然随着参数 μ 的增大, 混沌序列的取值范围扩大, 所以分布越来越均匀, 从而使得其熵值也更大.

为了获得更为广泛的结果, 进行了不同参数的多次实验, 选择比较具有代表性的结果如图 2—5 所示. 混沌序列长度分别选择 $N = 10000, 100000$ 和 1000000 , 统计区间选择 $M = 20, 100$ 和 10000 , 其中 (a) 图表示熵值的三维图形, (b) 图表示当参数 μ 一定时, 不同初值情况下的熵值方差, (c) 图表示当参数 μ 一定时, 不同初值情况下熵的均值.

从图 2—5 的 (a) 图可以发现, 不论统计区间个数是 20 还是 100 甚至更多, 当 μ 参数确定时, 不论数据长度是多少或系统初值为何, Logistic 系统的熵值基本维持不变; 当 μ 参数增加时, 熵值也随

之增加. 当然在熵值递增的过程中会出现一些突变点情况, 应该是在特定 μ 参数下, Logistic 系统没有进入混沌状态, 而是停留在了多周期分岔状态, 且周期点周围数据过于稠密, 故所有的数据都在某几个统计区间内, 导致这些突变点的熵值趋向 $\mu < 3.570$ 时的熵值, 甚至更低. 就 Logistic 混沌序列在图中反映的一些信息归纳如下.

- 1) 图 3 中的三维图形比图 2 中显得光滑, 是因为在统计区间一致的前提下, 序列长度较长, 则各个统计区间获得的概率更稳定, 相同 μ 参数的熵值离散程度小, 这也解释了两幅 (b) 图中方差在数量级上的差异. 但对于熵均值而言, 只要数据达到一定量后, 就相对稳定, 所以图 2(c) 和 3(c) 中的差异不特别明显.

- 2) 当混沌序列长度一致, 则统计区间越少, 各个统计区间内数据量越充分, 则其概率越稳定, 所以图 4(a) 的三维图比图 2 和图 3 的更光滑, 图 4(b) 中的熵方差相对于图 3 又小了一个数量级.

- 3) 熵值大小和统计区间数密切相关, 所以图 3

和 4 反映的熵均值在绝对数值上存在差异, 但也有很多共同点: 若抛开突变点不计, 熵变化趋势都随 μ 参数的增加而增加, 这主要是混沌序列的取值范围为 $x \in \left[\left(\frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu^3}{16} \right), \frac{\mu}{4} \right]$, μ 增加使得序列的分布边界越接近 0 和 1; 当 μ 接近 4 时, 熵值分别取到最大值 4.19 和 6.47 bit, 各自接近理论极限.

4) 图 5 表明只要数据量足够充分, 即使在 0—1 之间划分 10000 个区间进行统计, Logistic 序列的熵仍然只和 μ 参数有关, 且随之递增至 13.02 bit, 接近理论极限值.

对实验结果的分析表明, Logistic 混沌序列的熵值基本由 μ 参数决定, 与初值无关, 且熵值随着 μ 的增加而增加, 最终趋于极大值. 从统计学的角度看, Logistic 混沌序列的分布有着一定的规律, 在混

沌系统不确定特性下有着一些相对稳定的成分. 另外由于熵值最终趋向于理论极值, 表明 Logistic 混沌序列的分布越来越均匀.

4 结 论

本文主要通过数学仿真实验, 统计了不同参数下 Logistic 混沌序列的熵值, 发现其一些相对稳定的特性. 1) 随着参数 μ 的增加, 熵值接近理论极限, 表明 Logistic 混沌序列趋于均匀, 周期点的稠密性相对弱化; 2) 初值和序列长度的变化并没有改变序列的熵值, 故并非混沌系统的所有特征参数都具有初值依赖性; 3) 既然 Logistic 混沌序列满足一定的分布特性, 那么从宏观上对混沌系统做出合理的估计与预测存在一定可能.

-
- [1] Wang X Y, Qin X 2012 *Math. Probl. Eng.* 2012 601309
 - [2] Wang X Y, Wang M J 2007 *Chaos* **17** 033106
 - [3] Feigenbaum M J 1978 *J. Stat. Phys.* **19** 25
 - [4] Tang J S, Ouyang K J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4437 (in Chinese)
[唐驾时, 欧阳克俭 2006 物理学报 **55** 4437]
 - [5] Yang L J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050502 (in Chinese) [杨林静
2011 物理学报 **60** 050502]
 - [6] Stein R R, Isambert H 2011 *Phys. Rev. E* **84** 051904
 - [7] Wang X Y, Liang Q Y 2008 *Commun. Nonlinear Sci.* **13** 913
 - [8] Wang X Y, Luo C 2008 *Int. J. Mod. Phys. B* **22** 4275
 - [9] Wang X Y, Liang Q Y, Meng J 2008 *Int. J. Mod. Phys. C* **19** 1389
 - [10] Peng H P, Li L X, Yang Y X, Zhang X H, Gao Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6245 (in Chinese) [彭海朋, 李丽香, 杨义先, 张小红, 高
洋 2007 物理学报 **56** 6245]
 - [11] Wang M J, Wang X Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1467 (in Chinese)
[王明军, 王兴元 2009 物理学报 **58** 1467]
 - [12] Zheng H Z, Hu J F, Liu L D, He Z S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60**
110507 (in Chinese) [郑皓洲, 胡进峰, 刘立东, 何子述 2011 物
理学报 **60** 110507]
 - [13] Gyorgyi G, Szepfalusy P 1985 *Phys. Rev. A* **31** 3477
 - [14] Lesne A, Blanc J L, Pezard L 2009 *Phys. Rev. E* **79** 046208
 - [15] Luo C W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3788 (in Chinese) [罗传文
2009 物理学报 **58** 3788]

Research on the entropy of logistic chaos*

Pan Xin-Yu^{1)(2)†} Zhao He-Ming²⁾

1) (*School of Electronics and Information Engineering, University of Science and Technology of Suzhou, Suzhou 215011, China*)

2) (*School of Electronics and Information Engineering, Soochow University, Suzhou 215021, China*)

(Received 16 February 2012; revised manuscript received 19 March 2012)

Abstract

As a simple one-dimensional chaotic system, logistic map has some important applications in many fields. The stable entropy characteristic of logistic function is proposed in this paper. A series of logistic sequence entropy, calculated under different initial values and values of parameter μ , is found to have some special distributions. A great number of numerical simulations prove that the entropy is determined by parameter μ , and it is irrelevant with initial value. The logistic sequence becomes a uniform distribution, and its entropy is close to a maximum, when μ is increased to 4. Thereby the stationary quality of logistic chaos can be speculated to some extent.

Keywords: logistic system, chaos, entropy

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61071215), the Postgraduate Research Innovation Project of Jiangsu Province, China (Grant No. CXZZ12_0815), and the Fundamental Research and Application Foundation of Suzhou, China (Grant No. SYG201033).

† E-mail: panxy@mail.usts.edu.cn