

基于多项式模型的混沌系统平方和算法脉冲控制*

杨珺[†] 孙秋野 杨东升

(东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110819)

(2012年5月4日收到; 2012年7月18日收到修改稿)

针对一大类混沌系统, 提出一种新颖的基于多项式模型的脉冲控制方法. 首先, 建立系统的多项式模型. 其状态方程由系统状态的多项式矩阵与其单项式组成列向量构成. 与其他建模方法相比, 该方法不必使用任何预制的假设. 其次, 提出基于平方和优化算法的脉冲控制方法, 使得混沌系统的状态能够实现渐近稳定. 基于该算法的脉冲控制与基于线性矩阵不等式凸优化算法的结果相比, 能得到更大的脉冲间距, 从而可以使用较少的控制能量实现同样的控制效果. 最后, 仿真实验结果验证了本方法的有效性.

关键词: 混沌控制, 多项式模型, 平方和算法, 脉冲控制

PACS: 05.45.Gg

1 引言

混沌控制的主要任务是设法从多种多样的非线性系统所产生的混沌行为中, 挑选出任意所需的周期信号, 甚至于非周期信号, 并对其实现稳定的有效控制. 人们发现混沌及其控制不仅具有深刻的理论意义, 而且存在广阔的应用前景^[1]. 目前国内外科研工作者提出了多种混沌控制的方法, 例如基于模糊模型的方法、神经网络控制、自适应反馈控制、脉冲控制等^[2-6]. 特别是近些年来脉冲控制在众多领域表现出巨大的应用潜力, 吸引了越来越多学者的关注. 脉冲控制的主要特点是利用在离散脉冲时刻施加控制来改变连续系统的状态, 在用于保密通信的混沌系统中, 很小的脉冲控制信号即可实现混沌系统的镇定与同步.

本文提出一种新颖的基于多项式模型的混沌脉冲控制方法. 一大类混沌系统都适用多项式模型来描述, 与其他建模方法相比 (例如 T-S 模糊模型), 该方法不必使用任何预制的假设. 而基于此模型的控制, 通常使用平方和 (sum of square, SOS) 优化算法, 基于该算法的脉冲控制与基于线性矩阵不等式 (linear matrix inequality, LMI) 凸优化算法的

结果相比, 能得到更大的脉冲间距, 从而可以使用较少的控制能量实现同样的控制效果. 这里我们称之为基于多项式模型的 SOS 脉冲控制方法. 相应的 SOS 优化问题, 可以使用 SOSTOOLS 软件^[7] 来进行求解.

2 系统描述

考虑一类混沌系统可被如下的多项式模型描述:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ 是关于 $\mathbf{x}(t)$ 的多项式矩阵. $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}^N$ 是一个 $N \times 1$ 维的列向量, 它的元素由所有关于 $\mathbf{x}(t)$ 的单项式组成并且满足假设 $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x}(t) = 0$. $\mathbf{x}(t)$ 的单项式可以用函数 $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ 来表示, 其中的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为非负的整数.

基于该模型的分析与控制, 通常使用 SOS 优化算法. 它是建立在半定规划的基础上产生的一种解决数值计算的有效方法^[7, 8]. SOS 优化算法的提出, 有效地解决了 LMI 算法在非线性系统中很难构造合适的线性矩阵、导致直接对非线性系统的分

* 国家自然科学基金资助项目 (批准号: 61104099) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: N100104102) 资助的课题.

[†] E-mail: yangjun@mail.neu.edu.cn

析和设计难以进行的难题.

在实现混沌控制方面, 本文采用脉冲控制器, 其结构简单, 易于实现, 主要特点是利用在离散脉冲时刻施加控制来改变连续系统的状态. 假定离散时间序列 $\{t_k\}$ 满足: $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1$. 在不引起误解的前提下, 以下使用简化符号: $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$, $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))$.

在离散脉冲时刻 t_k , 状态变量发生跳变, 所以, 受控混沌系统可表述为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\tilde{\mathbf{x}} & t \neq t_k, \\ \Delta\tilde{\mathbf{x}}(t_k) = \mathbf{B}_k\tilde{\mathbf{x}}(t_k) & t = t_k, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\Delta\tilde{\mathbf{x}}(t_k) = \tilde{\mathbf{x}}(t_k^+) - \tilde{\mathbf{x}}(t_k^-) = \tilde{\mathbf{x}}(t_k^+) - \tilde{\mathbf{x}}(t_k)$, $\tilde{\mathbf{x}}(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))$, $\tilde{\mathbf{x}}(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))$, 即 t_k^+ 和 t_k^- 分别表示脉冲时刻 t_k 前后的瞬时. $\tilde{\mathbf{x}}(t_k^-) = \tilde{\mathbf{x}}(t_k)$ 表示 $\tilde{\mathbf{x}}$ 在 $t = t_k$ 时是左连续的. \mathbf{B}_k 为脉冲控制增益.

本文的控制目标是选择合适的脉冲控制增益 \mathbf{B}_k 和脉冲间距 $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$, 使得混沌系统 (2) 渐近稳定.

3 主要结果

为了实现此目标, 给出如下定理.

定理 1 基于多项式模型的脉冲混沌系统 (2) 是渐近稳定的, 如果存在常数 $\alpha > 0$, $1 > \beta_k > 0$, $\gamma > 1$, 对称矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 满足下列条件:

- 1) $\mathbf{v}_1^T(\mathbf{P} - \varepsilon_1(\mathbf{x})\mathbf{I})\mathbf{v}_1$ 是 SOS;
- 2) $-\mathbf{v}_2^T\{\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \alpha\mathbf{P}\}\mathbf{v}_2$ 是 SOS;
- 3) $-\mathbf{v}_3^T\{(\mathbf{I} + \mathbf{B}_k)^T\mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{B}_k) - \beta_k\mathbf{P}\}\mathbf{v}_3$ 是 SOS;
- 4) $\alpha\Delta_k + \ln(\gamma\beta_k) \leq 0$;

其中 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是独立于 \mathbf{x} 的任意向量, $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$ 表示脉冲间距, $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ 是多项式矩阵, 它的第 (i, j) 元素满足 $T_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{x}_j}(\mathbf{x}(t))$. 当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, 有 $\varepsilon_1(\mathbf{x}) > 0$, 当 $\mathbf{x} = 0$ 时, 有 $\varepsilon_1(\mathbf{x}) = 0$.

证明 选取如下形式的 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (3)$$

条件 1) 保证了矩阵 \mathbf{P} 是正定的, 所以当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, $V(t) > 0$.

对于 $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $k \in \mathbb{N}$, 沿着脉冲混沌系统 (2) 的轨迹求导可得

$$\begin{aligned} D^+V(t) &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T \mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ &= \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

其中 $D^+V(t, \mathbf{x}(t)) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}(V(t+h), \mathbf{x}(t+h) - V(t, \mathbf{x}(t)))$ 表示函数 $V(t)$ 的 Dini 导数.

由条件 2), 可知

$$D^+V(t) \leq \alpha \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} = \alpha V(t), \quad (4)$$

于是有

$$V(t) \leq V(t_{k-1}^+) \exp(\alpha(t - t_{k-1})). \quad (5)$$

另一方面, 当 $t = t_k$ 时, 由 (3) 式和条件 3), 可得

$$\begin{aligned} V(t_k) &= \tilde{\mathbf{x}}^T(t_k^+) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}(t_k^+) \\ &= \tilde{\mathbf{x}}^T(t_k)(\mathbf{I} + \mathbf{B}_k)^T \mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{B}_k) \tilde{\mathbf{x}}(t_k) \\ &\leq \beta_k V(t_k). \end{aligned} \quad (6)$$

由不等式 (5) 和 (6) 式可知, 对于任意 $t \in (t_0, t_1]$ 有

$$V(t) \leq V(t_0^+) \exp(\alpha(t - t_0)),$$

进一步可得

$$V(t_1^+) \leq \beta_1 V(t_1) \leq V(t_0^+) \beta_1 \exp(\alpha(t_1 - t_0)) \quad (7)$$

和

$$V(t_1) \leq V(t_0^+) \exp(\alpha(t_1 - t_0)). \quad (8)$$

所以, 对于任意 $t \in (t_1, t_2]$

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(t_1^+) \exp(\alpha(t - t_1)) \\ &\leq V(t_0^+) \beta_1 \exp(\alpha(t - t_0)). \end{aligned} \quad (9)$$

综合以上分析和条件 4), 对于任意 $t \in (t_k, t_{k+1}]$ 有

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(t_0^+) \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \exp(\alpha(t - t_0)) \\ &= V(t_0) \beta_1 \exp(\alpha\Delta_1) \dots \beta_k \exp(\alpha\Delta_k) \\ &\quad \times \exp(\alpha(t - t_k)) \\ &\leq V(t_0) \frac{1}{\gamma^k} \exp(\alpha(t - t_k)) \\ &\leq V(t_0) \frac{1}{\gamma^k} \exp(\alpha\Delta_{k+1}), \end{aligned} \quad (10)$$

这意味着当 $t \rightarrow \infty$ 时, $V(t) \rightarrow 0$, $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ 和 $\mathbf{x} \rightarrow 0$. 所以, 基于多项式模型的脉冲混沌系统 (2) 是渐近稳定的, 证毕.

注释 1 在定理 1 中, 如果对于所有 $k \in \mathbb{N}$, 都有 $\Delta_k = \Delta$ 和 $\beta_k = \beta$, 那么条件 4) 将会简化为

$$\alpha\Delta + \ln(\gamma\beta) \leq 0, \quad (11)$$

这意味着所选择的脉冲控制增益为常矩阵, 即 $B_k = B$, 且脉冲间距 $\Delta = t_k - t_{k-1}$ 为正常数. 这样的选取有利于脉冲控制器的实现.

注释 2 通过不等式 (11) 式可以求出脉冲间距 Δ 的上界估计值, 即

$$\Delta_{\max} = \left\lfloor \frac{\ln \gamma \beta}{\alpha} \right\rfloor, \quad \gamma \rightarrow 1^+.$$

脉冲间距大意味着脉冲控制的频率低, 控制能量的消耗小, 降低在线计算量, 易于实现. 但是 α 和 β 并不能任意取值, 它们还要满足定理 1 的条件. 因此, 可以总结如下算法来确定 α 和 β , 实现脉冲混沌系统 (2) 是渐近稳定的前提下, 使脉冲间距 Δ 尽可能大.

算法 1

1) 初始化 $\alpha > 0, 1 > \beta > 0$ (例如, 初始值取 $\alpha = 200, \beta = 0.9$).

2) 根据定理 1 的 SOS 条件求解矩阵 P .

3) 如果 P 存在, 则设 $\beta = \beta - \Delta\beta$; 否则执行步骤 7).

4) 根据定理 1 中的条件 3), 如果 $\beta \geq \rho((I + B)^T(I + B))$, 返回步骤 2), 否则执行步骤 5). $\rho(\cdot)$ 表示矩阵 (\cdot) 的谱半径.

5) 设 $\alpha = \alpha - \Delta\alpha$, 并且 β 重置为初始值.

6) 如果 $\alpha > 0$, 返回步骤 2), 否则执行步骤 7).

7) 如果 α, β 均等于初始值, 则无可行解 (算法失败), 退出. 否则输出上一次的 α, β 和矩阵 P .

注释 3 基于模糊模型的 LMI 混沌控制方法可参见文献 [9, 10]. 其中使用模糊模型来对混沌系统进行建模, 在选取隶属度函数时, 通常假设混沌系统运行在预定的工作域内. 如果混沌系统的状态在其预定范围以外, 基于模糊模型的 LMI 控制方法将失效. 而本文提出的基于多项式模型的方法不需要这样的假设. 在脉冲控制方面上, 基于此模型的 SOS 优化算法还能得到较大脉冲间距, 从而获得保守性更小的结果.

注释 4 对不同的系统, 虽算法一致, 但步长的选取也不尽相同. 过小的步长会导致计算时间过长, 计算效率差; 过大的步长可能会导致求解失败. 根

据经验, $\Delta\beta$ 取 0.1, $\Delta\alpha$ 取 10—20 为宜.

4 数值仿真

下面通过例子来验证本文提出的方法. 首先把混沌系统表示为本文所描述的结构 (1) 式, 然后通过加入脉冲量实现控制目标. 仿真中使用 Runge-Kutta 算法求解脉冲微分方程 (2), 步长选为 0.001 s. 脉冲增益矩阵和脉冲间距的选择依赖于定理 1 及算法 1.

例 1 Lorenz 系统 [9,10]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a(x_2(t) - x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) = bx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = -cx_3(t) + x_1(t)x_2(t), \end{cases} \quad (12)$$

其中 a, b, c 为系统参数. 当 $a = 10, b = 28, c = 8/3$ 时, Lorenz 系统处于混沌状态, 其相图如图 1 所示.

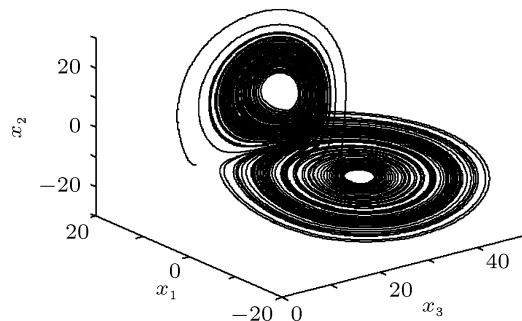


图 1 无脉冲控制时, Lorenz 系统呈现混沌状态的相图

该系统可用多项式模型 (1) 式来描述, 具体参数如下:

$$A(x) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 6 & -1 & x_1 \\ 0 & x_1 & -c \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

选取脉冲增益矩阵 $B_k = B = \text{diag}([-0.8, -0.5, -0.7])$, 通过算法 1, 求得 $\alpha = 25, \beta = 0.4$,

$$P = \begin{bmatrix} 0.15754 & 0.14464 \times 10^{-14} & -0.722 \times 10^{-17} \\ 0.14464 \times 10^{-14} & 0.80136 \times 10^{-1} & -0.10643 \times 10^{-15} \\ -0.722 \times 10^{-17} & -0.10643 \times 10^{-15} & 0.80136 \times 10^{-1} \end{bmatrix},$$

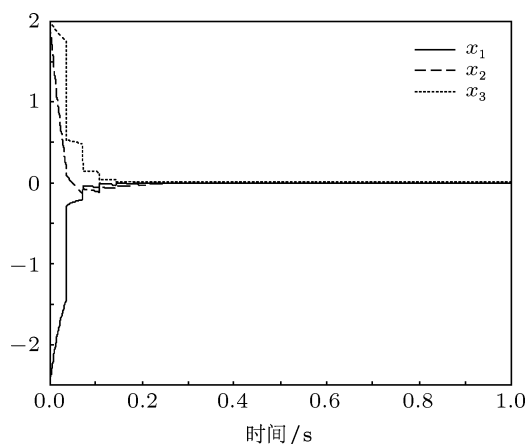


图2 当脉冲控制脉冲间距 $\Delta = 0.036$ s 时, Lorenz 系统的状态轨迹

脉冲间距 $\Delta \leq \left\lfloor \frac{\ln \beta}{\alpha} \right\rfloor \doteq 0.036$ s. 系统轨迹的仿真结

果如图 2 所示, 其状态初值为 $\boldsymbol{x} = [-2.5, 2, 2]^T$. 文献 [4] 中, 使用了 T-S 模糊模型和 LMI 优化算法, 得出的最大脉冲间距 Δ 为 0.0014 s. 可见本文的结果是文献 [4] 的 25 倍.

5 结论

本文提出一种新颖的基于多项式模型的混沌系统 SOS 脉冲控制方法. 研究结果可保证混沌系统的状态渐近稳定. 同时还提出一个迭代算法用来得出脉冲间距 Δ 的上界估计值. 仿真实验表明 SOS 优化算法的脉冲控制方法与基于 LMI 凸优化算法的结果相比, 能获得较大的脉冲间距, 从而降低了系统设计的保守性.

- [1] Li W, Wang X 2009 *Techniques of Automation and Applications* **28** 1 (in Chinese) [李卫东, 王秀岩 2009 自动化技术与应用 **28** 1]
- [2] Jackson E A 1991 *Physical D* **50** 247
- [3] Gong L H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3502 (in Chinese) [龚礼华 2005 物理学报 **54** 3502]
- [4] Zhang X, Khadra A, Yang D, Li D 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat* **15** 105
- [5] Liu X 2009 *Nonlinear Analysis* **71** e1320
- [6] Yang D S, Zhang H G, Zhao Y, Song C H, Wang Y C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1562 (in Chinese) [杨东升, 张化光, 赵琰, 宋崇辉, 王迎春 2010 物理学报 **59** 1562]
- [7] Prajna S, Papachristodoulou A, Parrilo P A 2002 *SOSTOOLS—Sum of Squares Optimization Toolbox, Users Guide* <http://www.cds.caltech.edu/sostools>
- [8] Lam H K 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **41** 2624
- [9] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O 1998 *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundam. Appl.* **45** 1021
- [10] Lian K Y, Liu P, Wu T C, Lin W C 2002 *Int. J. Bifurcation Chaos* **12** 1827

Sum-of-square-based impulsive control for chaotic system based on polynomial model*

Yang Jun[†] Sun Qiu-Ye Yang Dong-Sheng

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

(Received 4 May 2012; revised manuscript received 18 July 2012)

Abstract

In this paper, we present a novel impulsive control method based on polynomial model for a large class of chaotic systems. First, the polynomial model is used to model the chaotic system, in which the state equation of the system is composed of the polynomial matrix of the system and the column vector of monomials in state. Compared with others modeling methods, any pre-defined hypothesis is removed. Next, a sum-of-square (SOS)-based impulsive control method is investigated to guarantee that the chaotic system is asymptotically stable. It can obtain larger impulsive interval using SOS-based optimization algorithm over linear matrix inequality technique, which means the same control performance can be realized by less control action. Finally, the simulation is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: chaos control, polynomial model, sum-of-square algorithm, impulsive control

PACS: 05.45.Gg

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61104099) and the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. N100104102).

[†] E-mail: yangjun@mail.neu.edu.cn