

分数阶 Brown 马达及其定向输运现象*

白文斯密 彭皓 屠浙 马洪†

(四川大学数学学院, 成都 610064)

(2012 年 3 月 4 日收到; 2012 年 5 月 17 日收到修改稿)

选取幂函数作为广义 Langevin 方程的阻尼核函数, 采用闪烁棘轮势, 建立了过阻尼分数阶 Brown 马达模型. 结合分数阶微积分的记忆性, 分析了粒子在过阻尼分数阶 Brown 马达作用下的运动特性. 研究发现, 较之整数阶情形, 过阻尼分数阶 Brown 马达也会产生定向输运现象, 并且在某些阶数下会产生整数阶情形所不具有的反向定向流. 此外, 还讨论了阶数和噪声强度对系统输运速度的影响, 发现当阶数固定时, 其平均输运速度会随噪声变化出现随机共振; 当噪声强度固定时, 其输运速度会随阶数变化而振荡, 即出现多峰的广义随机共振现象.

关键词: 分数阶 Brown 马达, 定向输运, 反向定向流, 随机共振

PACS: 05.10.Gg, 45.10.Hj

1 引言

在以往的研究中, 人们一般认为噪声在系统中总是起消极作用. 然而近年的研究发现, 在某些非线性系统中噪声可以起到积极作用, 非平衡态统计力学中的 Brown 马达就是这样一类典型的系统. 起初对 Brown 马达的研究动机是源于人们企图从无规则的随机涨落中获取有用的能量, 以及对一些复杂的输运机制 (如非线性化学、分子生物学基因表达中的输运现象) 给出合理解释. 事实上, 除了热力学中最早关于棘齿效应的讨论外, 一个直接推动 Brown 马达的研究动力是近年来关于细胞内输运过程的研究. 人们利用分子马达与分子泵很好地解释了一些重要的生物现象, 如细胞运动、膜蛋白传输、肌肉收缩等. 作为有趣且有着广阔应用前景的非线性动力系统, Brown 马达已成为非平衡态统计力学中的热点研究课题 [1-6].

进一步的研究发现, Brown 马达中定向流的平均速度, 也即定向输运速度, 具有随噪声强度增大而非单调变化的特点, 也就是说存在最佳噪声强度使得定向输运速度达到最大值, 这实际上就

是一种广义随机共振 [5]. 所谓广义随机共振是指系统响应的某些函数 (如矩、自相关函数、功率谱或信噪比等) 随系统的某些特征参数 (如激励振幅、频率或噪声的强度、相关率等) 非单调变化的现象 [7].

目前关于 Brown 马达的研究大多局限于整数阶动力系统 [1-6], 但越来越多的研究表明, 许多物理、化学、生化过程及黏弹性材料、黏性介质等具有“记忆性”, 这是整数阶动力系统所不能刻画和解释的. 而数学界近年迅速发展起来的分数阶随机微分方程理论, 正好为我们研究诸如黏性介质中具有“记忆性”的物理、化学、生物学过程提供了崭新的数学工具. 分数阶微积分具有时间记忆性和长程空间相关性, 比整数阶能更加精确地描述具有记忆、路径依赖性的物理过程和生化反应过程 [8], 因此被广泛应用于反常扩散、混沌以及黏弹性材料 [9,10] 等的研究中.

本文将分数阶微积分理论引入 Brown 马达的研究, 探讨了由分数阶 Langevin 方程刻画的分数阶 Brown 马达. 结合分数阶微积分的记忆性探讨了粒子在过阻尼分数阶 Brown 马达中的运动特性, 发现在某些阶数下分数阶 Brown 马达会出现反向的

* 国家自然科学基金 (批准号: 11171238) 资助的课题.

† E-mail: mahong@scu.edu.cn

定向流, 而这是整数阶 Brown 马达所没有的现象. 此外, 还讨论了动力系统阶数和噪声强度分别对定向运输速度的影响, 发现当阶数固定时, 定向运输速度会随噪声强度的变化出现随机共振; 当噪声强度固定时, 定向运输速度则会随阶数的变化而振荡, 即出现了多峰的广义随机共振现象.

2 过阻尼分数阶 Brown 马达

2.1 分数阶 Langevin 方程

在黏性介质中 Brown 粒子受到的阻尼力与历史速度有关, 其运动状态用广义 Langevin 方程描述:

$$m\ddot{x} + \int_0^t \gamma(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau = F(x,t) + \xi(t), \quad (1)$$

其中, $\gamma(t)$ 是阻尼核函数, $F(x,t)$ 是确定性的外部作用力, $\xi(t)$ 是零均值 Gauss 噪声. 噪声 $\xi(t)$ 和阻尼核函数 $\gamma(t)$ 服从涨落耗散关系 $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \kappa_B T \gamma(t-t')$, κ_B 是 Boltzmann 常数, T 是介质温度.

在很多物理和生化环境中, 介质对速度通常具有幂律记忆性, 距当前时刻越近, 其记忆性就越强. 幂律阻尼核函数可表示为

$$\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(1-p)} |t|^{-p} \quad 0 < p < 1. \quad (2)$$

阻尼核 (2) 式的图像如图 1 所示, 可以看到 p 越小, $\gamma(t)$ 衰减得越慢, 对应到阻尼核的记忆性就越强. 具有幂律阻尼核的广义 Langevin 方程为

$$m\ddot{x} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} \dot{x}(\tau) d\tau = F(x,t) + \xi(t). \quad (3)$$

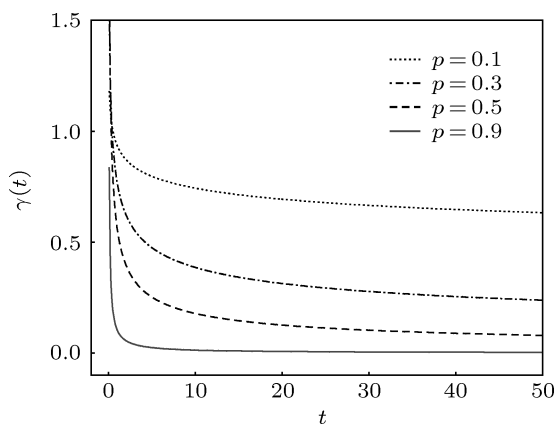


图 1 分数阶的阻尼核函数 $\gamma(t)$

又根据 Caputo 分数阶微积分的定义^[11]

$${}_0^C D_t^p x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} \times \dot{x}(\tau) d\tau \quad (0 < p < 1), \quad (4)$$

其中 ${}_0^C D_t^p x(t)$ 表示 $x(t)$ 在区间 $[0, t]$ 上的 p 阶 Caputo 微分. (3) 式可以写作:

$$m\ddot{x} + {}_0^C D_t^p x(t) = F(x,t) + \xi(t) \quad 0 < p < 1, \quad (5)$$

称 (5) 式为分数阶 Langevin 方程.

2.2 过阻尼分数阶 Brown 马达

由于 Brown 粒子的质量很小, 在过阻尼情况下, 方程 (5) 可近似为如下过阻尼分数阶 Langevin 方程:

$${}_0^C D_t^p x(t) = F(x,t) + \xi(t) \quad 0 < p < 1. \quad (6)$$

研究 Brown 马达时, 一般将外部作用力取为闪烁非对称周期势^[5]. 不失一般性, 令外部作用力为闪烁棘轮势的势场力 $F(x,t) = -U'(x)z(t)$, 其中 $U(x)$ 为棘轮势, $z(t)$ 为闪烁函数, 分别定义如下:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{U_0}{aL}(x - nL), & nL \leq x < nL + aL, \\ \frac{U_0}{(1-a)L}[(n+1)L - x], & nL + aL \leq x < (n+1)L. \end{cases}$$

其中 L 是势场的空间周期, a 是倾斜度, U_0 是棘轮势的峰值高度.

$$z(t) = \begin{cases} 1, & n\tau \leq t < n\tau + \tau_{\text{on}}, \\ 0, & n\tau + \tau_{\text{on}} \leq t < (n+1)\tau, \end{cases}$$

其中 τ_{on} 是势存在的时间, τ_{off} 是势消失的时间, 闪烁周期为 $\tau = \tau_{\text{on}} + \tau_{\text{off}}$. $U(x)$ 和 $z(t)$ 的示意图如图 2.

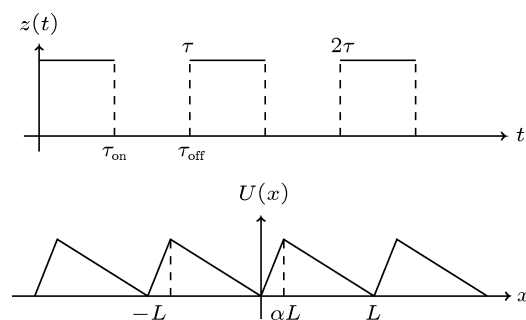


图 2 闪烁棘轮势示意图

因此 (6) 式中的外部力表示为

$$F(x, t) = \begin{cases} -\frac{U_0}{aL}, & nL \leq x < nL + aL, \\ & n\tau \leq t < n\tau + \tau_{\text{on}}, \\ \frac{U_0}{(1-a)L}, & nL + aL \leq x < (n+1)L, \\ & n\tau \leq t < n\tau + \tau_{\text{on}}, \\ 0, & n\tau + \tau_{\text{on}} \leq t < (n+1)\tau. \end{cases}$$

于是, 过阻尼分数阶 Brown 马达的运动方程, 即 Brown 粒子在闪烁棘轮势下所满足的过阻尼分数阶 Langevin 方程为

$${}_0^C D_t^p x = -U'(x)z(t) + \xi(t). \quad (7)$$

Langevin 认为 Brown 粒子在介质中受到的力主要有两类, 一类为黏滞阻尼力; 一类是随机力, 即噪声 $\xi(t)$. 涨落耗散定理建立起两种力之间的内在联系. 热浴中 Brown 粒子受到的随机力源于全部热浴振子对粒子的作用^[12], 这种随机力称为内部噪声, 而来自系统与热浴外部各种形式的随机干扰, 与系统的耗散无关, 不满足涨落耗散定理, 称为外部噪声. 在讨论分数阶 Brown 马达的随机共振现象时, 主要考虑可控的外部噪声.

2.3 过阻尼分数阶 Brown 马达随机共振机理

考察分数阶 Langevin 方程 (7) 所描述的过阻尼分数阶 Brown 马达. 当方程 (7) 的阶数 $0 < p < 1$ 时, 随着阶数 p 的减小, 方程 (7) 的阻尼核 $\gamma(t)$ 衰减就越慢, 相应的过阻尼分数阶 Brown 马达的记忆性就越强, 历史速度对现在的影响也就越大.

势阱消失时, (7) 式退化为欠扩散方程 ${}_0^C D_t^p x = \xi(t)$, Brown 粒子自由扩散, 其均方位移 $\langle x^2(t) \rangle \propto t^p$, 经过消失时间 τ_{off} 后, 粒子的空间分布被展宽; 势阱重新恢复时, 在两边势垒以内的粒子在内侧势下滑力作用下, 它们又回到原来的位置, 而左右最近位垒以外的粒子将进入下一个势阱里, 也就是棘轮势分割了自由扩散形成的 Gauss 波包的尾巴. 由于棘轮势的不对称性, 粒子更多地被分割到近位垒处下一侧阱内, 导致粒子出现在陡坡的下一势阱内的概率大于缓坡的^[2], 从而形成欠扩散 Brown 粒子流.

需要指出的是, 在上述闪烁棘轮势存在的欠扩散过程中, 粒子在时刻 t 受到的阻尼力为 $\int_0^t \gamma(t -$

$\tau)\dot{x}(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p}\dot{x}(\tau)d\tau$, 换言之, t 时刻的阻尼力是时段 $[0, t]$ 内的速度关于阻尼核 $\gamma(\cdot)$ 的加权平均. 当阶数 p 比较大时, 核函数 $\gamma(t)$ 的衰减很快, 这意味着对当前阻尼力有实质贡献的历史比较短, 阻尼力较弱, 导致粒子以更快的速度在势阱中运动, 从而提高定向输运速度; 当阶数 p 较小时, 对当前阻尼力有实质贡献的历史也就变长, 阻尼力较强, 导致定向输运的速度较慢, 甚至促使粒子反向越过势垒, 形成与整数阶反向的定向流.

另一方面, 对 (7) 式两端取平均, 得到

$$\frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} \langle \dot{x}(\tau) \rangle d\tau = \langle -U'(x)z(t) \rangle, \quad (8)$$

等式左端表示经过一段时间累积所形成的当前平均阻尼力; 等式右端则可以看作是势场空间上一段距离内势场力的平均综合. 阶数 p 越小, 阻尼核的记忆性越强, 对当前阻尼力有贡献的历史时间越长, 相应的势场空间上有贡献的距离也就越长. 因为本文选取的势场力在空间上具有周期性, 所以阻尼力会随阶数 p 变化而振荡, 在过阻尼情况下, 粒子的平均速度也会相应地产生振荡.

综上所述, 过阻尼分数阶 Brown 马达会出现整数阶情形不具有的反向定向流. 当阶数固定时, 输运速度会随噪声变化出现随机共振, 其机理与整数阶类似; 当噪声强度固定时, 其输运速度会随阶数变化而振荡, 即多峰的广义随机共振现象.

3 仿真实验及分析

为了模拟方程 (7) 所刻画的粒子运动, 我们采用分数阶差分法^[11], 得到数值计算公式如下:

$$x_n = - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{p}{k} x_{n-k} - T_s^p U'(x_{n-1})z(t_{n-1}) + T_s^p \xi_n, \quad (9)$$

这里 T_s 是采样时间, $t_k = T_s(k-1)$, $k = 1, \dots, n$, $x_k = x(t_k)$, $\xi_k = \xi(t_k)$, $\binom{p}{k} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+1)k!}$.

采用 Monte Carlo 方法, 取 300 次仿真实验的平均值作为粒子的平均位移. 又由于粒子的平均速度 $\langle \dot{x} \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} x/t$ ^[13], 为了仿真方便, 我们用 x/t (t 充分大) 代替 $\langle \dot{x} \rangle$. 采样时间取 0.005 s, 仿真时

间取 10 s, 闪烁棘轮势峰值高度取为 $U_0 = 4$, 空间周期取为 $L = 1$, 倾斜度取为 $a = 0.12$, 势存在的时间长度为 $\tau_{\text{on}} = 0.64$ s, 消失的时间长度为 $\tau_{\text{off}} = 0.64$ s.

图 3(a), (b) 分别展示噪声强度为 0 和 3 时, 布朗粒子流平均位移 $\langle x(t) \rangle$ 的时间演化. 在图 3 中, $p = 0.675$ 时出现负向的定向流, 与整数阶 $p = 1$ 时的定向流反向. 图 3(a) 中 $p = 0.74, 0.9, 1$ 时, 粒子在势阱中的振荡幅度会随阶数 p 的减小而增加. 图 3(b) 中 $p = 0.74$ 时可以明显地看到定向流的速度加快.

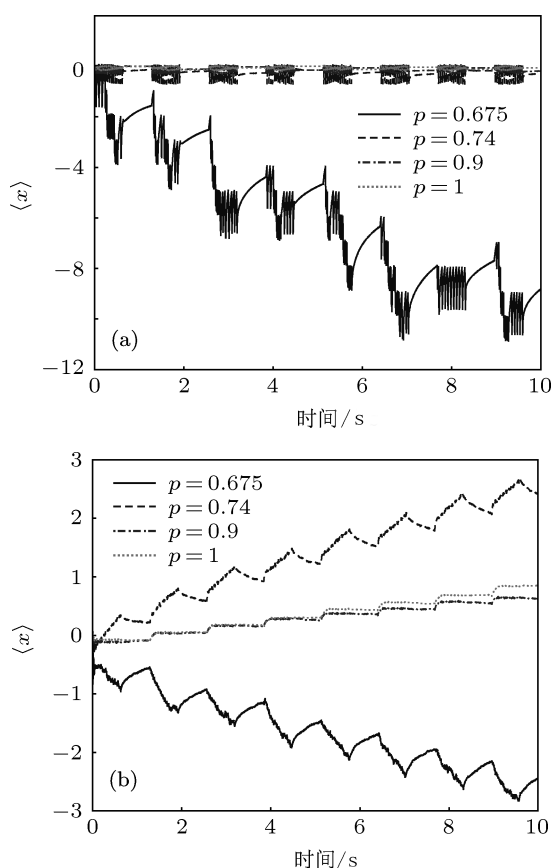


图 3 不同分数阶布朗粒子流平均位移随时间的演化 (a) $D = 0$; (b) $D = 3$

图 4 展示的是噪声强度固定时运输速度 $\langle \dot{x} \rangle$ 关于阶数 p 的变化曲线. 可以看到, 正向和反向的运输速度均存在随阶数变化的广义随机共振现象, 且正向和反向运输速度存在多个峰值. 在噪声强度不同的情况下, 反向速度的大小会有不同, 但反向速度出现的阶数范围基本一致, 这说明过阻尼分数阶 Brown 马达出现反向速度主要是受系统记忆性的影响.

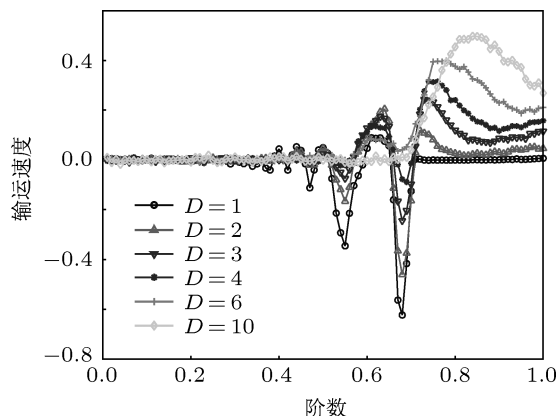


图 4 不同噪声强度情况下运输速度随阶数的变化

图 5 给出了阶数固定时运输速度 $\langle \dot{x} \rangle$ 随噪声强度变化的曲线. 此时存在正向和反向的定向流. 当 $p = 0.7$ 时运输速度先是负向再正向, $p = 0.8$ 时全是正向速度, $p = 0.69$ 时全是反向速度. 正向和反向速度场合均会出现随机共振, 即使是兼有正向和负向速度的情况, 也会存在正向段的随机共振和负向段的随机共振.

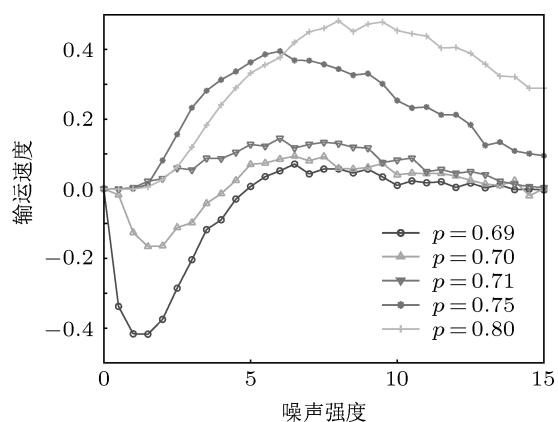


图 5 阶数固定情况下运输速度随噪声强度的变化

4 结论

迄今为止, 对 Brown 马达的研究大都基于整数阶随机微分方程的数学模型. 而现实中许多复杂系统却表现出时间记忆性, 这些系统不宜用传统的整数阶数学模型描述. 因此本文将 Brown 马达推广到分数阶情形, 研究了分数阶 Brown 马达的定向运输现象. 结合分数阶随机微分方程和反常扩散理论, 采用闪烁棘轮势, 分析了粒子在过阻尼分数阶 Brown 马达中的运动特性, 发现由于分数阶系统

的记忆性导致过阻尼分数阶 Brown 马达会出现整数阶情形所没有的反向定向流. 在阶数固定时, 其输运速度随噪声的变化出现随机共振现象; 而在噪

声强度固定时, 过阻尼分数阶 Brown 马达的输运速度则随阶数变化出现多峰的广义随机共振现象.

-
- [1] Astumian R D 1997 *Science* **276** 917
- [2] Bao J D 2009 *Stochastic Simulation Method of Classic and Quantum Dissipative System* (Beijing: Science Press) p160 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (北京: 科学出版社) 第 160 页]
- [3] Zheng Z G 2004 *Spatiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems* (Beijing: Higher Education Press) p286 (in Chinese) [郑志刚 2004 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为 (北京: 高等教育出版社) 第 286 页]
- [4] Guo H Y, Li W, Ji Q, Zhan Y, Zhao T J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3684 (in Chinese) [郭鸿涌, 李微, 纪青, 展永, 赵同军 2004 物理学报 **53** 3684]
- [5] Qian M, Wang Y, Zhang X J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 810
- [6] Cheng H T, He J Z, Xiao Y L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 010502 (in Chinese) [程海涛, 何济洲, 肖宇玲 2012 物理学报 **61** 010502]
- [7] Gitterman M 2005 *Phys. Stat. Mech. Appl.* **352** 309
- [8] de Andrade M F 2005 *Phys. Lett. A* **347** 160
- [9] Liu F, Anh V, Turner I, Zhuang P 2003 *J. Appl. Math. Comput.* **13** 233
- [10] Benson D A, Wheatcraft S W, Meerschaert M M 2000 *Water Resour. Res.* **36** 1403
- [11] Podlubny I 1998 *Fractional Differential Equation* (San Diego: Academic Press) 229
- [12] Yang J H, Liu X B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050504
- [13] Reimann P 2002 *Phys. Rep.* **361** 57

Fractional Brownian motor and its directed transport*

Bai Wen-Si-Mi Peng Hao Tu Zhe Ma Hong[†]

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

(Received 4 March 2012; revised manuscript received 17 May 2012)

Abstract

Adopting power function as a damping kernel function of generalized Langevin equation, flash ratchet potential as a potential field, the model of fractional Brownian motor is derived in the case of overdamped condition. With the memory effect of fractional derivatives, the motion characteristics of the particle in overdamped fractional Brownian motor are discussed. Inverse transport which is not seen in conventional Brownian motor, is found in an overdamped fractional Brownian motor. The influences of fractional order and noise density on transport speed are discussed separately. For a fixed fractional order, stochastic resonance appears in transport speed as noise density varies. For a fixed noise density, transport speed will oscillate as the fractional order varies, that is, multipeak generalized stochastic resonance takes place.

Keywords: fractional Brownian motor, directed transport, inverse transport, stochastic resonance

PACS: 05.10.Gg, 45.10.Hj

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238).

† E-mail: mahong@scu.edu.cn