

# 基于奇异值分解的随机共振特征提取研究\*

郑安总<sup>1)</sup> 冷永刚<sup>1)2)†</sup> 范胜波<sup>1)</sup>

1) (天津大学机械工程学院, 天津 300072)

2) (天津大学机构理论与装备设计教育部重点实验室, 天津 300072)

(2012年1月15日收到; 2012年5月7日收到修改稿)

针对强背景噪声下信噪比极低的微弱特征信号的识别问题, 提出了基于奇异值分解的随机共振特征提取方法. 该方法首先利用奇异值分解对实际采样信号进行预处理和重构, 然后寻找到特征信号分量与噪声强度相匹配的分量信号. 此分量信号再经过非线性双稳系统的随机共振处理, 可实现从强噪声背景中检测极微弱的特征信号.

**关键词:** 奇异值分解, 随机共振, 噪声

**PACS:** 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

## 1 引言

1981年 Benzi 等<sup>[1,2]</sup> 在研究古冰川气象问题时提出了随机共振的概念, 此后随机共振 (SR) 现象在生物<sup>[3]</sup>、电子<sup>[4]</sup>、超导<sup>[5]</sup> 等很多领域受到了广泛的关注. 随机共振指的是在非线性系统的作用下, 噪声可能起着与人们直觉相反的作用, 即一定量的噪声不仅不会降低系统的输出响应, 在一定程度上还有可能加强系统的输出响应.

随机共振机理表明, 在非线性系统中, 引入合适强度的噪声可以使微弱特征信号驱动下的系统输出响应信噪比达到最佳值, 其本质是部分噪声能量转化为信号能量, 使得微弱信号的能量增强从而易于检测. 目前, 随机共振方法不仅适用于小参数信号<sup>[6,7]</sup> (小幅值、小频率、小噪声) 的检测, 而且通过变尺度技术可处理实际中的大参数信号<sup>[8-10]</sup>. 然而随机共振检测微弱信号的信噪比仍然有限. 对于工程实际中信噪比更低的微弱特征信号, 如何利用随机共振方法进行有效的检测仍然是一个值得深入研究的问题. 本文提出奇异值分解的随机共振特征信号检测方法, 利用奇异值分解方法先对实际

采样信号进行预处理, 然后再将处理后的信号进行随机共振响应识别. 仿真表明, 本文提出的方法可以处理输入信噪比极低的采样信号, 从而进一步提高了随机共振处理信号的能力.

## 2 随机共振原理

随机共振现象是在非线性系统中噪声和特征信号的一种协同作用. 产生随机共振需要三个要素: 非线性系统、特征信号和噪声. 对最简单的情形, 即非线性系统为双稳系统 (其势函数为  $U(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4$ ,  $a, b$  是系统参数), 特征信号为单频正弦信号 ( $s(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ ), 噪声为高斯白噪声 ( $n(t) = \sqrt{2D}g(t)$ ,  $D$  是噪声强度,  $g(t)$  是均值为 0 方差为 1 的白噪声) 的情况, 随机共振现象可以用过阻尼情形下的郎之万 (Langevin) 方程来描述:

$$dx/dt = -U'(x) + s(t) + n(t), \quad (1)$$

式中高斯白噪声  $n(t)$  满足  $E[n(t)] = 0$ ,  $E[n(t)n(t-\tau)] = 2D\delta(\tau)$ .

\* 国家自然科学基金 (批准号: 50975202) 和北京市先进制造技术重点实验室开放项目 (批准号: 001000546612018) 资助的课题.

† E-mail: leng\_yg@tju.edu.cn

双稳系统检测微弱特征信号的模型如图 1 所示.



图 1 双稳随机共振系统

图 2 是一组典型的随机共振情形, 其中方程 (1) 中的各个参数为  $a = b = 1, A = 0.2, f_0 = 0.01 \text{ Hz}, D = 0.5$ , 采样频率  $f_s = 5 \text{ Hz}$ , 采样点数为 5000 点. 用四阶 Runge-Kutta 数值解法解方程 (1)(以下同). 从图 2(a) 和 (b) 系统输入的时频图看到, 采样信号中的特征信号几乎淹没于背景噪声中, 其频谱幅值很小, 输入信噪比  $\text{SNR} = -17 \text{ dB}$ . 输入信噪比定义为  $\text{SNR} = (A^2/2)/(2D)^{[11]}$ . 经过双稳系统处理后, 输出响应达到随机共振, 如图 2(c) 和 (d) 的时频图, 特征信号频率  $f_0 = 0.01 \text{ Hz}$  处的幅值非常突出, 也就是说, 随机共振使噪声的一部分能量转移给了特征信号, 使特征信号能量加强, 从而特征信号幅值变大.

图 3 是噪声强度  $D = 10$ , 其他参数同图 2, 方程 (1) 的解形式. 此无论是双稳系统的输入信号, 还是双稳系统的输出响应都无法分辨特征信号.

图 2 和图 3 表明, 当系统响应达到随机共振后, 噪声强度的不断增加会使系统响应频谱中的特征信号逐渐淹没, 过大的噪声无论是从双稳系统的输入端还是输出响应端都无法分辨特征信号. 因此, 只有噪声强度合适时才能使双稳系统的输出响应达到随机共振状态, 有明显的特征信号谱峰. 而太大的噪声强度, 如  $D = 10$ , 输入  $\text{SNR} = -30 \text{ dB}$  时, 即使经过双稳系统的处理, 也无法从系统的输出响应中识别特征信号.

为了在极大的噪声强度下观察到随机共振现象并识别特征信号, 本文将奇异值分解方法和随机共振相结合, 提出奇异值分解的随机共振特征信号检测方法. 该方法先用奇异值分解对实际的采样信号进行预处理, 得到噪声强度和特征信号相匹配的重构序列信号, 然后再输入双稳系统处理分析, 最后从系统的输出响应中观察到随机共振现象并识别微弱特征信号.

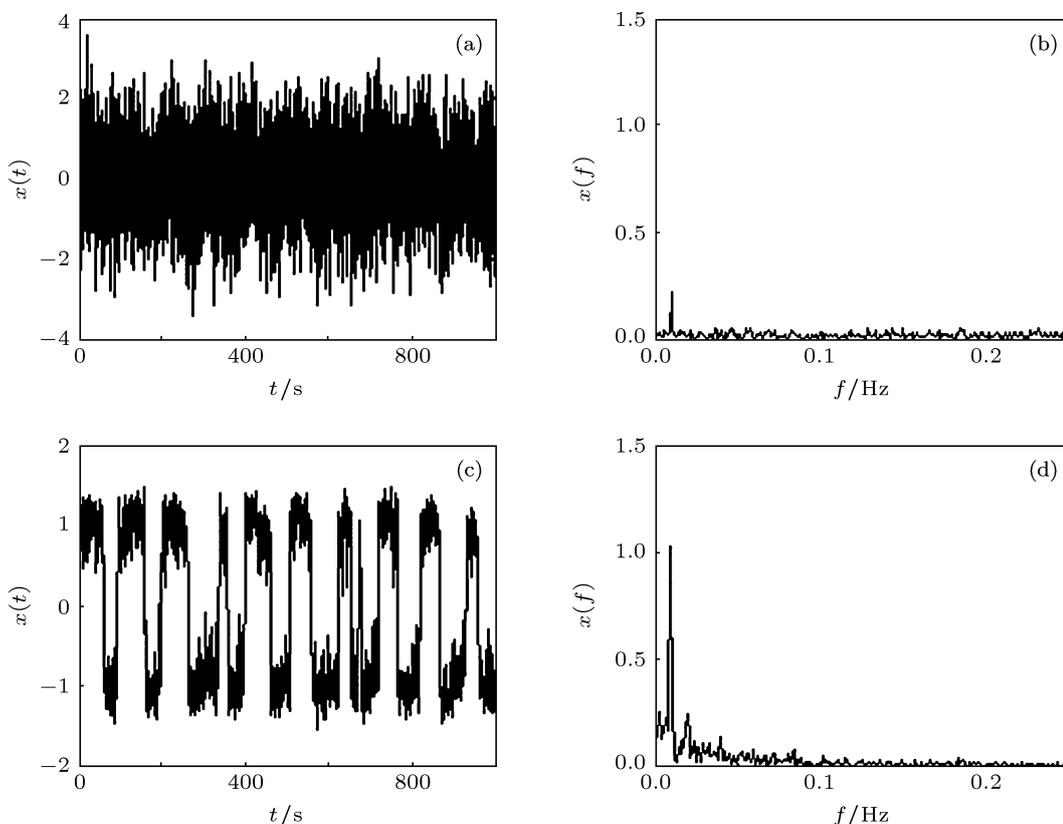


图 2 噪声强度  $D = 0.5$  时, 双稳系统输入、输出的时频图 (a) 输入信号时域图; (b) 输入信号频域图; (c) 随机共振输出时域图; (d) 随机共振输出频域图

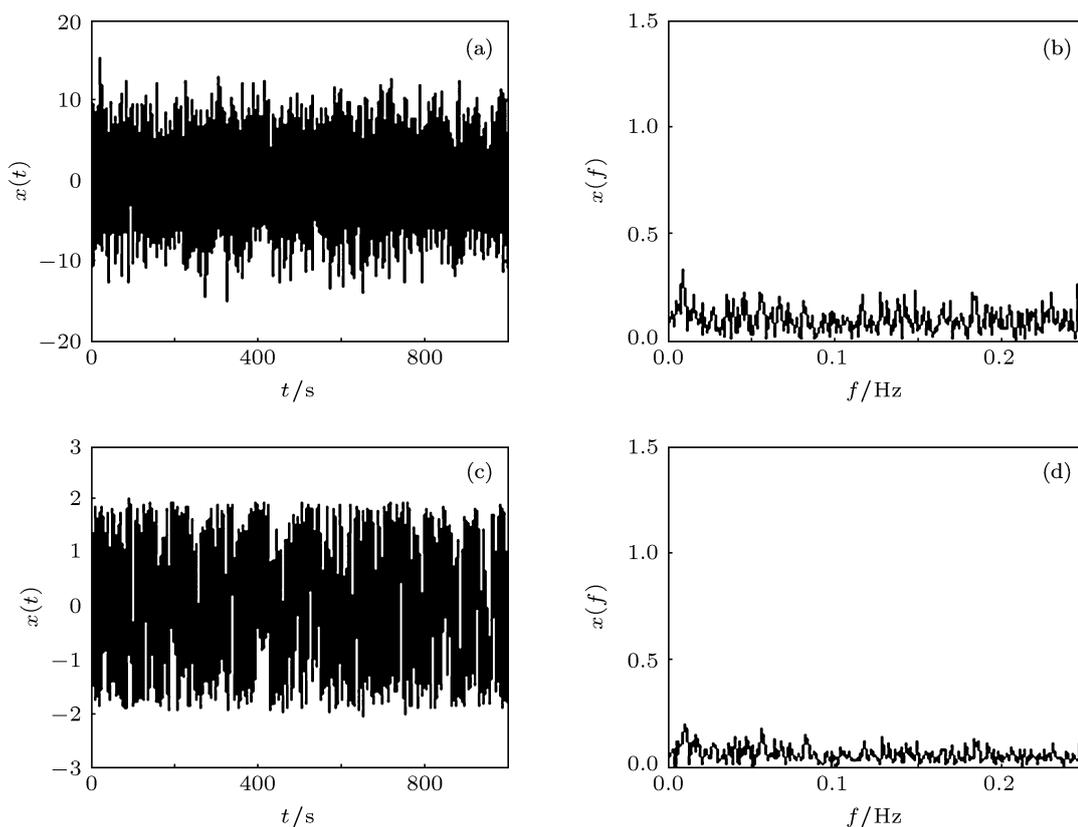


图3 噪声强度  $D = 10$  时, 双稳系统输入、输出的时频图 (a) 输入信号时域图; (b) 输入信号频域图; (c) 系统输出时域图; (d) 系统输出频域图

### 3 奇异值分解与重构原理 [12,13]

奇异值分解 (singular value decomposition, SVD) 是一种非线性滤波, 广泛应用于信号的消噪和检测工作中. 它从矩阵的角度出发, 将包含信号信息的矩阵分解到一系列奇异值和奇异值矢量对应的时频子空间中.

对于一个实矩阵  $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$  (不妨假设  $m > n$ ), 其奇异值分解可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T, \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{U}$  是  $m \times m$  阶正交矩阵且满足  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ ;  $\mathbf{V}$  是  $n \times n$  阶正交矩阵且满足  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{I}$ ;  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  是按降序排列的对角矩阵, 其对角元素为矩阵  $\mathbf{A}$  的奇异值.

对实际采样得到的离散时间序列  $X = (x(1), x(2), \dots, x(N))$ , 构造采样信号的 Hankel 矩

阵如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m & x_{m+1} & \cdots & x_{m+n-1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中  $N = m + n - 1$ .

根据 SVD 分解的特点, 将矩阵  $\mathbf{A}$  改写成用列向量  $u_i$  和  $v_i$  表示的形式:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbf{A}_i, \quad (4)$$

因此矩阵  $\mathbf{A}$  经过 SVD 分解, 就成为一系列的子矩阵  $\mathbf{A}_i$  和相应的奇异值  $\sigma_i$  相乘. 根据 Hankel 矩阵的构造形式, 子矩阵  $\mathbf{A}_i$  可以表示如下:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & \cdots & x_n^{(i)} \\ x_2^{(i)} & x_3^{(i)} & \cdots & x_{n+1}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^{(i)} & x_{m+1}^{(i)} & \cdots & x_{m+n-1}^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

取子矩阵  $\mathbf{A}_i$  的第一行和最后一列除第一个元素外的元素构成一个分量信号  $P_i$ . 按照此方式构成的所有分量信号  $P_i$  就形成了对原始采样信号的分解. 已证明这样获得的  $n$  个分量信号线性叠加的结果就是原始采样信号, 即:

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_n = X. \quad (6)$$

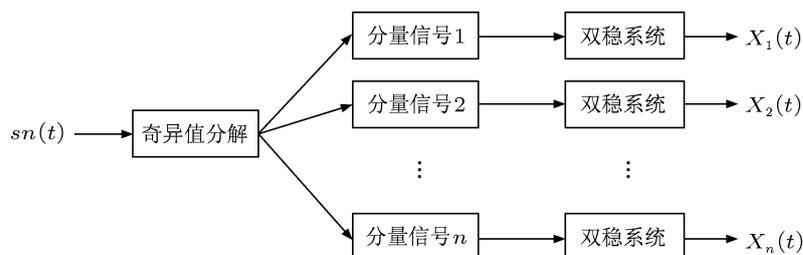


图4 奇异值分解的随机共振原理框图

图4 奇异值分解的随机共振特征信号检测过程, 实际上是从  $n$  个奇异值分解后的分量信号中找到噪声强度和特征信号相匹配的分量信号, 从而实现特征信号奇异值分解的随机共振提取.

上述过程对于噪声水平相对较低的大信噪比情况, 因信号受噪声污染小, 其奇异值分布呈明显的阶梯状, 故可根据奇异值分布很容易判断分离特征信号和噪声. 但是随着噪声强度的增加, 奇异值分布曲线变得愈加陡峭. 当噪声大到一定程度后, 奇异值阶梯状的分布特征消失, 最终呈直线变化趋势<sup>[14]</sup>, 因此根据奇异值分布很难将特征信号和噪声判断分离. 然而, 在 SVD 分解后得到  $n$  个相互正交的子空间中, 由于在生成各子空间过程中只保留了该子空间的奇异值, 而令其余奇异值为零. 所以对于噪声而言, 不仅各子空间中噪声分量不相同, 有的强有的弱, 为非均匀分布的, 而且各子空间噪声强度都远低于原噪声强度. 而对于特征信号来说, SVD 处理同样存在信号强度向各子空间非均匀分布的过程, 而且存在某一子空间中的特征信号分量相对集中<sup>[15]</sup>. 正是由于噪声和特征信号在各子空间中的随机不等分量分布, 因此有可能存在某一子空间噪声强度相对较低, 而特征信号相对突出, 达到特征信号与噪声的匹配, 进而为满足双稳随机共振的实现创造了条件.

以图3 参数为例, 即  $a = b = 1, A = 0.2, f_0 = 0.01 \text{ Hz}, D = 10$ , 采样频率  $f_s = 5 \text{ Hz}$ , 采

#### 4 奇异值分解的随机共振机理

SVD 处理后得到的  $n$  个分量信号每一个都包含了原时间序列特征信号的部分特征, 将这  $n$  个分量信号输入双稳系统便可进行特征信号的随机共振检测, 即奇异值分解的随机共振特征信号检测, 其原理流程如图4 所示.

样点数为 5000 点. 重构相空间维数取  $n = 20$ , 即经 SVD 分解可生成 20 个分量信号. 采样信号的奇异值分布形式 (图 5(a)) 同高斯白噪声的奇异值分布形式 (图 5(b)) 相仿, 此时特征信号被强噪声淹没无法识别. 图 5(c) 给出了 SVD 分解后 20 个分量信号中特征信号频率处的功率值. 从图中看出第 5 个分量信号中特征信号频率处的功率值最大, 也就是说第 5 个分量信号对应的子空间中具有最多的特征信号分量. 图 5(d) 给出了 20 个分量信号中噪声的平均功率值, 此处噪声平均功率值的计算为分量信号平均功率值减去特征信号处的功率值. 从图中看出, 经奇异值分解后得到了功率值分布不均匀的分量信号. 图 5(e) 给出了 20 个分量信号的信噪比, 同原输入信号的  $-30 \text{ dB}$  信噪比相比, 分量信号的信噪比得到了改善. 此处分量信号信噪比以及随后的双稳系统输出信噪比均定义为特征频率  $f_0$  处的功率与  $f_0$  附近背景噪声的平均功率之比<sup>[11]</sup>. 对于特征信号分量集中的第 5 个分量信号, 其信噪比达到  $-17.5 \text{ dB}$ , 与图 2 输入信噪比  $\text{SNR} = -17 \text{ dB}$  相当. 这表明, 在其他参数不变的情况下, 第 5 个分量信号信噪比达到了双稳系统的检测要求. 图 5(f) 给出了 20 个分量信号经双稳系统后的输出响应信噪比, 此时第 5 个分量信号输出信噪比达到了  $19 \text{ dB}$ , 其对应的输出时频图达到随机共振, 如图 6(c) 和 (d). 而图 5(f) 和 (e) 中其他较大信噪比未产生随机共振的情况随后将进行分析.

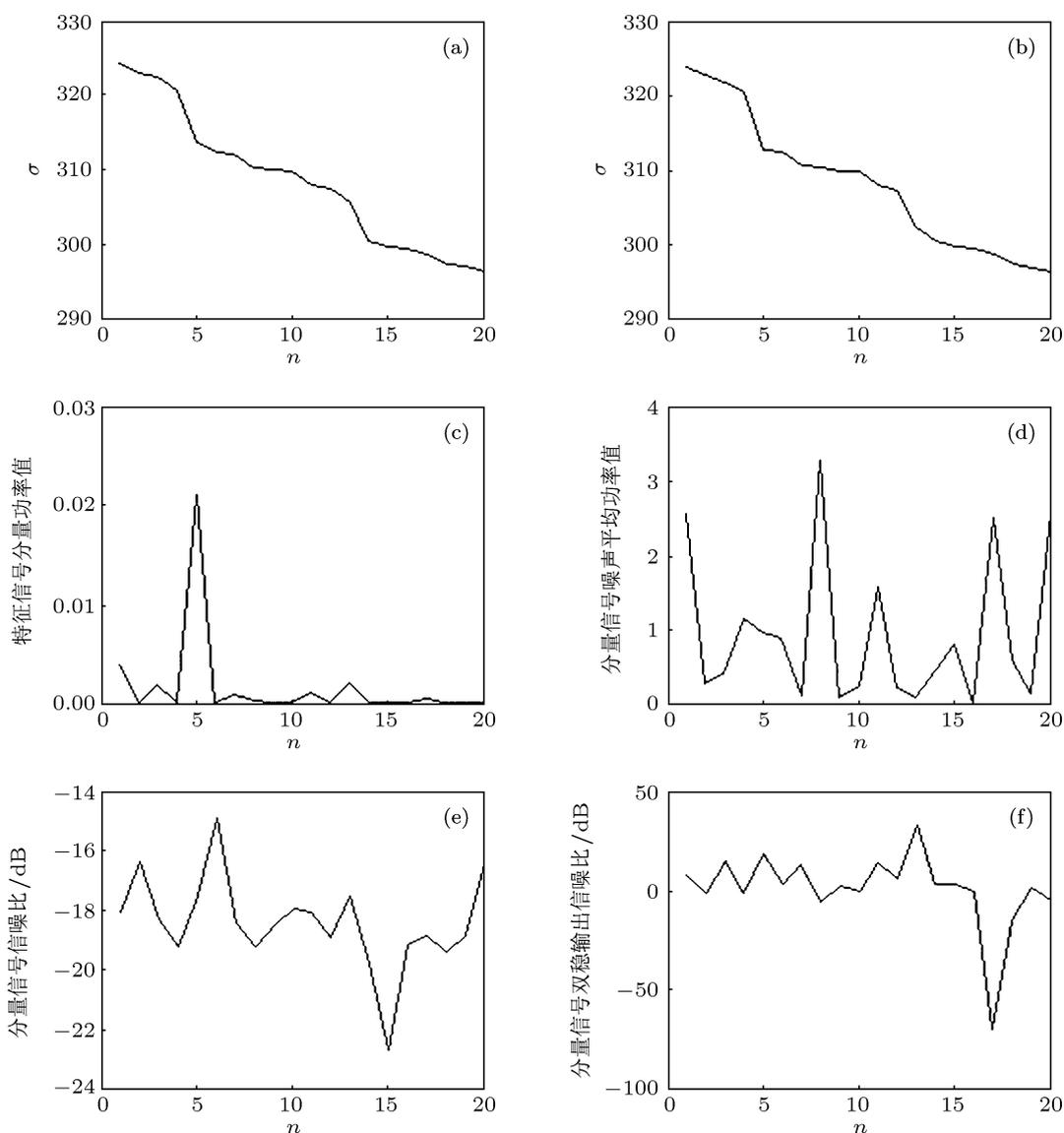


图5 采样信号奇异值分解及其随机共振分析 (a) 采样信号奇异值分布形式; (b) 高斯白噪声奇异值分布形式; (c) 20个分量信号中特征信号分量的功率值; (d) 20个分量信号的噪声平均功率值; (e) 20个分量信号的信噪比; (f) 20个分量信号的双稳输出信噪比

图 6(a) 给出了第 5 个分量信号的频谱, 在频谱中无法分辨特征信号. 图 6(b) 给出了第 5 个分量信号的特征频率处的频谱放大图, 可以看到在特征频率处有一个较突出的峰, 反映了此时的分量信号信噪比得到了很大的改善. 图 6(c) 和 (d) 分别给出了第 5 个分量信号的双稳系统响应的时域图和频域图, 此时时域波形已明显达到随机共振, 从其对应的频谱中也能识别特征信号频率 (0.01 Hz) 处突出的谱峰.

对于 SVD 分解的其他分量信号, 其中第 2, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19 个分量信号的双

稳系统响应均为无跃迁状态, 第 1, 3, 13, 20 个分量信号的双稳系统响应均为欠共振状态, 第 8, 17 个分量信号的双稳系统响应为过共振状态.

作为典型分析, 分别取三种状态中的一个分量信号, 如第 7, 8, 13 这三个分量信号进行双稳系统的输出响应讨论. 图 7 给出了三个分量信号 SVD 分解后的双稳响应时频图.

图 7(a) 和 (b) 为第 7 个分量信号的双稳响应结果. 结合图 5(c) 和 (d) 知, 此时特征信号的分量不多, 分量信号功率很小, 噪声强度也很低. 因为分量信号功率太低, 加之没有足够合适量的噪声, 因此

该信号粒子的双稳响应将无法产生跃迁, 只能在单阱中做小幅振荡. 由于是小噪声的特征频率单阱振荡, 因此即使在无跃迁的情形下, 图 7(b) 的频谱中特征频率处依旧有一相对突出的峰, 使得双稳系统输出响应的信噪比较大, 见图 5(f), 但其并不是随机共振情形.

图 7(c) 和 (d) 为第 8 个分量信号的双稳系统响应. 从图 5(c) 和 (d) 中看出, 此时特征信号的分量很小, 而噪声强度很大, 因此双稳系统响应的残余噪声过大, 系统处于过共振状态, 输出响应的时域图和频域图无法得到特征信息. 图 5(f) 也反映了第 8 个分量信号双稳输出响应的低信噪比情况.

图 7(e) 和 (f) 为第 13 个分量信号的双稳系统输出响应. 同样由图 5(c) 和 (d) 知, 此时该信号分量有一定功率 (但比第 5 个分量信号的功率小得多), 而噪声强度很低. 在功率有限的分量信号和不足够适量的噪声条件下, 信号粒子无法形成有规律的跃

迁, 因此双稳系统响应只能是无规律跃迁的欠共振状态. 在欠共振情形下, 虽然特征频率处有相对高的输出信噪比, 如图 5(f), 但是从图 7(f) 整体频谱看出, 特征信号仍然无法清晰分辨出, 原因在于输出信噪比只衡量了特征信号与其附近噪声的比较情况, 没有衡量整体频段谱. 这种大信噪比未产生随机共振的情况也反映在图 5(e) 中, 如第 7 个分量信号的信噪比达到  $-18.5$  dB, 第 8 个分量信号的信噪比达到  $-19.2$  dB. 第 13 个分量信号的信噪比达到  $-17.6$  dB. 三个信噪比均接近第 5 个分量信号的信噪比  $-17.5$  dB, 但它们的输出图形均没有达到随机共振状态.

本文提出的基于奇异值分解的随机共振特征提取方法能够检测信噪比很低的特征信号, 其模拟采样信号的信噪比可达到  $-33.4$  dB, 该信噪比相应的噪声强度为  $D = 22$ , 其他参数同图 3 的参数. 图 8 是该信噪比下的奇异值分解的随机共振结果, 从图 8 的时频图仍然可以辨识特征信号.

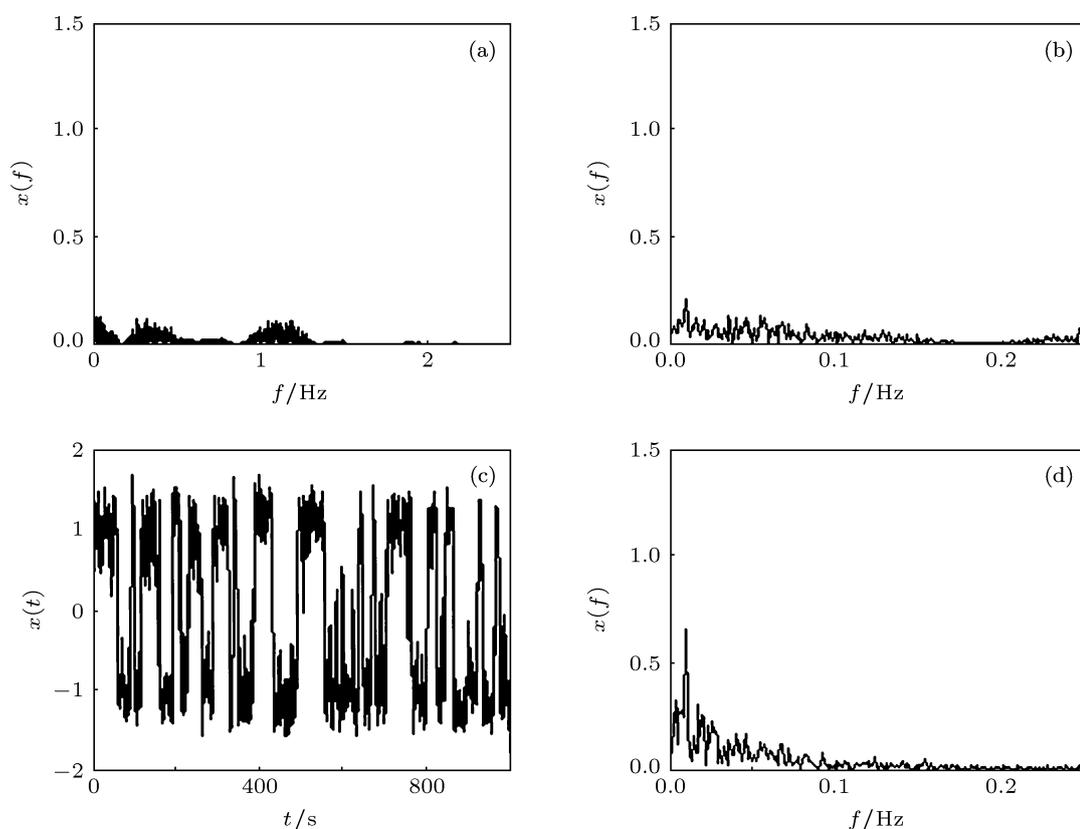


图 6 第 5 个分量信号的双稳输入输出情况 (a) 全频段双稳输入频域图; (b) 低频段放大双稳输入频域图; (c) 双稳响应时域图; (d) 双稳响应频域图

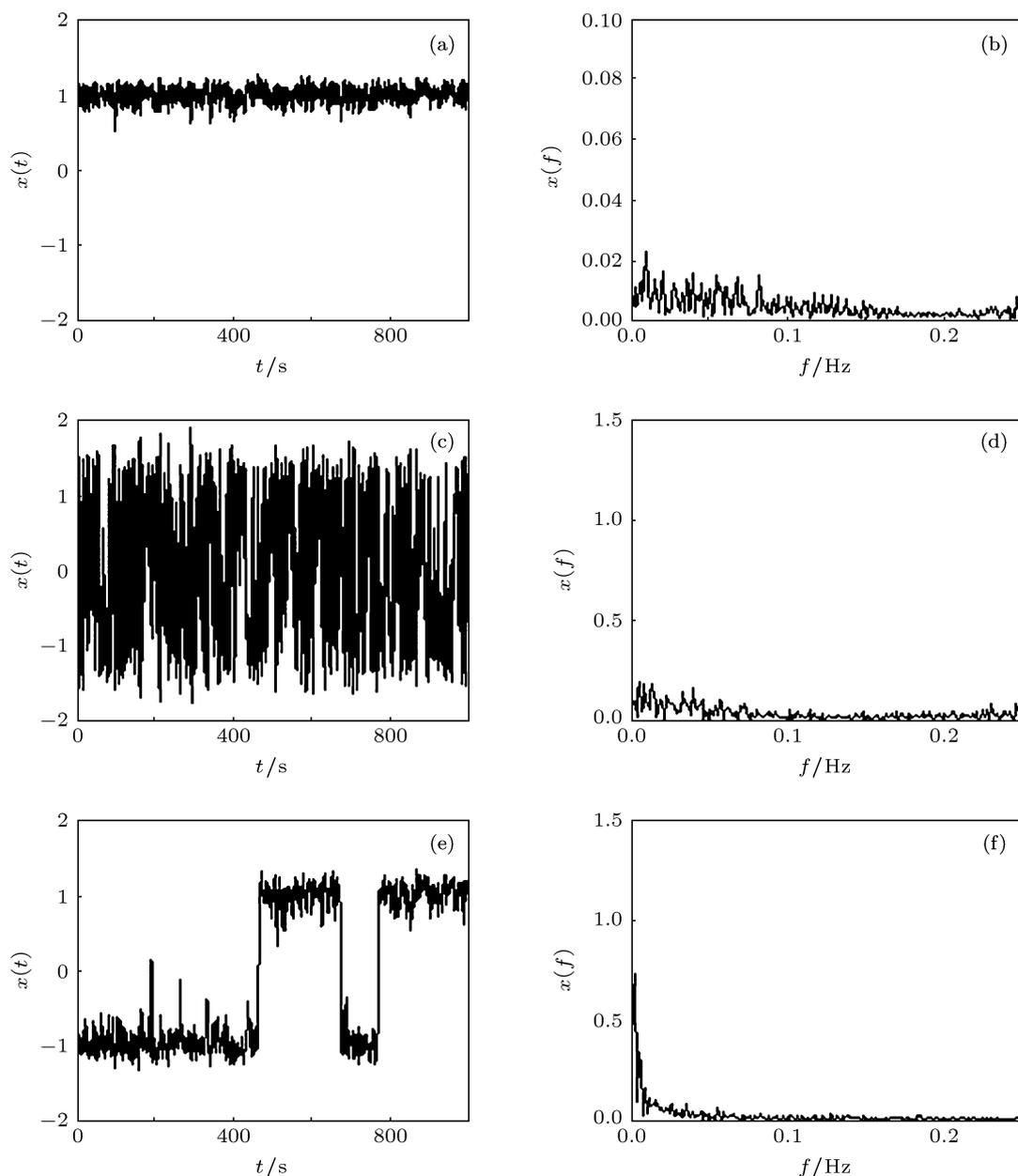


图7 其他分量信号非共振状态的双稳系统响应分析 (a) 第7个分量信号的双稳响应时域图; (b) 第7个分量信号的双稳响应频域图; (c) 第8个分量信号的双稳响应时域图; (d) 第8个分量信号的双稳响应频域图; (e) 第13个分量信号的双稳响应时域图; (f) 第13个分量信号的双稳响应频域图

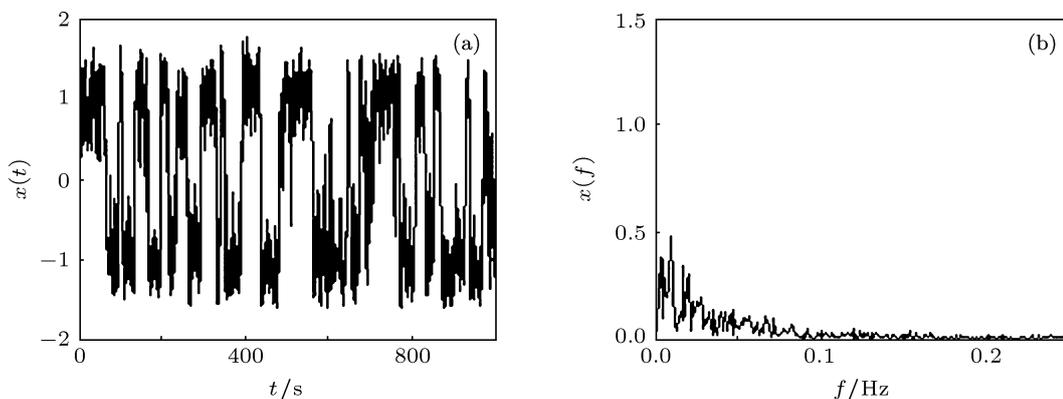


图8 信噪比为  $-33.4$  dB 时的双稳系统响应 (a) 第5个分量信号的双稳响应时域图; (b) 第5个分量信号的双稳响应频域图

## 5 结论

本文提出了奇异值分解的随机共振特征提取方法,该方法可从信噪比极低的强噪声背景中提取微弱的特征信号.在实际应用中,本文检测方法可

简化为:将 SVD 分解后的每个分量信号进行特征信号分量和噪声平均功率分析,选取特征信号分量相对集中且噪声相匹配的分量信号作为双稳系统的输入信号,得到双稳系统的输出响应并计算其对应的信号频率,该频率就是特征信号频率.

- 
- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiana A 1981 *Physica A* **14** 453
- [2] Benzi R, Parisi G, Sutera A, Vulpiana A 1982 *Tellus* **34** 10
- [3] Levin J E, Miller J P 1996 *Nature* **380** 165
- [4] Anishchenko V S, Safonova M A, Vadivasova T E, Postnov D E 1992 *Int. J. Bifurc. Chaos.* **2** 633
- [5] Kaufman I K, Luchinsky D G, McClintock P V E, Soskin S M, Stein N D 1998 *Phys. Rev.* **57** 78
- [6] Qin G R, Gong D C, Hu G, Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese) [秦光荣, 龚德纯, 胡岗, 温孝东 1992 物理学报 **41** 360]
- [7] Lu Z H, Lin J H, Hu G 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 1556 (in Chinese) [卢志恒, 林建恒, 胡岗 1993 物理学报 **42** 1556]
- [8] Leng Y G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5196 (in Chinese) [冷永刚 2009 物理学报 **58** 5196]
- [9] Leng Y G, Leng Y S, Wang T Y, Guo Y 2006 *J. Sound Vib.* **292** 788
- [10] Leng Y G 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020503 (in Chinese) [冷永刚 2011 物理学报 **60** 020503]
- [11] Gong D C, Hu G, Wen X D, Yang C Y, Qin G R, Li R, Ding D F 1992 *Phys. Rev. A* **46** 3243
- [12] Zhao X Z, Ye B Y, Chen T J 2010 *J. Mech. Eng.* **46** 100 (in Chinese) [赵学智, 叶邦彦, 陈统坚 2010 机械工程学报 **46** 100]
- [13] Bai Y, Liu X Y, He D W, Ru H Y, Qi L, Ji M B, Zhao W, Xie F X, Nie R J, Ma P, Dai Y D, Wang F R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2651 (in Chinese) [白云, 刘新元, 何定武, 汝鸿羽, 齐亮, 季敏标, 赵巍, 谢飞翔, 聂瑞娟, 马平, 戴远东, 王福仁 2006 物理学报 **55** 2651]
- [14] Duan X Y, Wang Y S, Su Y S 2009 *J. Vib. Shock.* **28** 30 (in Chinese) [段向阳, 王永生, 苏永生 2009 振动与冲击 **28** 30]
- [15] Zhao X Z, Chen T J, Ye B Y 2007 *J. Mech. Eng.* **43** 169 (in Chinese) [赵学智, 陈统坚, 叶邦彦 2007 机械工程学报 **43** 169]

# Features extraction based on singular value decomposition and stochastic resonance\*

Zheng An-Zong<sup>1)</sup> Leng Yong-Gang<sup>1)2)†</sup> Fan Sheng-Bo<sup>1)</sup>

1) (*School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

2) (*Key Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design of Ministry of Education, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

(Received 15 January 2012; revised manuscript received 7 May 2012)

## Abstract

In order to detect the weak characteristic signal submerged in heavy noise with extremely low signal-to-noise ratio, a method based on singular value decomposition (SVD) and stochastic resonance is proposed. The sampling signal is first preprocessed and reconstructed by means of SVD, and then we search for a component signal. In the component signal, the components of the characteristic signal match noise strength. Then the component signal is processed with the non-linear bistable system to obtain stochastic resonance response, thus the goal of detecting the weak characteristic signal submerged in a heavy background noise is realized.

**Keywords:** singular value decomposition, stochastic resonance, noise

**PACS:** 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50975202) and the Key Laboratory of Beijing Municipality for Advanced Manufacturing Technology, China (Grant No. 001000546612018).

† E-mail: leng\_yg@tju.edu.cn