

# 双稳态压电悬臂梁发电系统的动力学建模及分析\*

孙舒<sup>1)2)</sup> 曹树谦<sup>1)2)†</sup>

1) (天津大学机械工程学院, 天津 300072)

2) (天津市非线性动力学与混沌控制重点实验室, 天津 300072)

(2012年3月21日收到; 2012年5月23日收到修改稿)

针对双稳态压电悬臂梁发电系统进行了动力学建模与分析. 首先建立了能引发系统双稳态现象的磁力模型, 给出了两磁铁之间磁力的数学表达式; 其次建立了压电悬臂梁发电系统的集中参数模型, 得到了系统发生双稳态现象时磁铁之间的距离范围; 通过数值计算分析了系统的响应特性, 发现双稳态运动大大提高了系统的频率响应范围, 并且系统在低激励频率和低激励幅值下能发生大幅运动, 而激励幅值越大, 系统具有越高的能量逃离势阱产生大幅运动; 最后通过实验对数值计算结果进行了验证. 研究结果为双稳态压电悬臂梁发电系统的设计与应用提供了理论依据.

**关键词:** 双稳态悬臂梁, 压电发电, 大幅运动, 混沌运动

**PACS:** 05.45.-a, 77.84.-s, 84.90.+a

## 1 引言

随着微电子和微加工技术的发展, 对长寿命独立电源的需求越来越强烈. 微电子设备能耗低、功率小的特点使得利用环境微弱振动进行发电成为可能. 将振动能量转化为电能的方式一般有电磁式、压电式和静电式三种<sup>[1]</sup>. 相对电磁式和静电式, 压电式结构简单、能量密度大、寿命长、可与 MEMS 加工工艺兼容, 甚至可制成纳米发电机. 但环境振动的宽频和随机特点使得传统的机电谐振能量收集系统有很大的局限性, 当压电振子不能与振动源产生共振时, 其输出功率将变得很低. 而双稳态压电发电系统利用结构固有的非线性力, 可实现在微弱激励下的大幅、宽频周期或非周期运动, 从而在非共振状态下获得结构大变形, 提高发电效率.

国内外关于双稳态压电发电系统的研究刚刚处于起步阶段. Arrieta 等<sup>[2]</sup>对双稳态压电板的频率响应进行实验研究, 通过慢扫频激励实验, 发现

具有宽频带的亚谐共振大振幅极限环、混沌运动, 但只进行了实验研究, 并未对双稳态系统进行建模分析; Gammaitoni 等<sup>[3]</sup>提出利用双稳态结构的随机共振原理, 可有效利用具有随机属性的弱环境振动来进行振动发电, 通过选择势阱函数中的参数, 可使输出功率达到最大; Ferrari 等<sup>[4]</sup>建立了双稳态悬臂梁的 Duffing 型方程, 用数值方法计算梁在白噪声激励下的随机共振位移响应, 对压电悬臂梁模型进行实验测试, 但只研究了非线性项对双稳态现象的影响, 并未给出双稳态压电发电系统的响应特性; 文献 [5] 将文献 [6] 的双稳态模型用于压电发电, 通过数值计算和实验与传统的线性系统对比得出结论, 双稳态系统可发生大幅混沌运动, 比线性系统的输出电压的均方根高 46.5%, 功率高 113.7%, 并且大幅混沌运动的激励频率处于一个很宽的范围, 但未对产生双稳态现象的非线性项的产生机理进行分析; 文献 [7] 提出了一种基于双稳态势阱的电磁式发电系统, 并进行了数值计算和实验验证, 发现混沌等宽频运动; Stanton 等<sup>[8]</sup>对双稳态压电发电结构进一步研究, 得到叉形分岔的对称破缺、

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11172199) 资助的课题.

† E-mail: sqcao@tju.edu.cn

多吸引子共存、混沌、大幅运动等现象. 在国内, 关于双稳态压电发电系统的研究很少, 韩权威等<sup>[9]</sup>通过实验探索了磁力对悬臂梁的谐振频率漂移的影响以及得到其输出功率和电压都明显提高, 并未建立理论模型分析双稳态特性; 马华安等<sup>[10]</sup>也只是通过实验得到这种磁式压电振动能量采集器共工作在低频下, 并且频带较宽; 陈仲生和杨拥民<sup>[11]</sup>建立了单自由度双稳态压电悬臂梁的模型, 通过理论和实验得到该种压电振子能扩展共振频率范围, 并且能提高低频振动能量的转化输出, 对于双稳态压电发电系统的动力学特性并未深入研究.

现有的相关文献多直接引入 3 次非线性项, 并未对产生非线性项的磁力模型进行分析, 给双稳态压电发电系统的设计和应用带来不便. 本文建立了两永久磁铁之间的磁力模型, 并将其引入到压电悬臂梁数学模型中, 对无量纲后的动力学方程进行数值模拟. 分别分析了在激励频率和幅值以及磁铁之间的距离变化时的响应特性, 并对结果进行了实验验证.

## 2 两永久磁铁之间的磁力模型

双稳态压电发电系统利用压电材料把环境中的振动机械能转化为电能, 由根部粘有压电片的梁及电量收集部分组成. 通过加入磁力来实现双稳态, 其中将一块永久磁铁固定在悬臂梁自由端, 将另一块磁铁固定在距离自由端的  $d$  处, 而电量收集部分简化为负载阻抗, 如图 1. 当  $d$  足够大时, 两磁铁之间没有作用力, 此时系统为线性系统; 当  $d$  缩小到一定程度时, 梁具有 3 个平衡点, 其中包含有 2 个稳定的平衡点和一个不稳定的平衡点, 表现出双稳态现象.

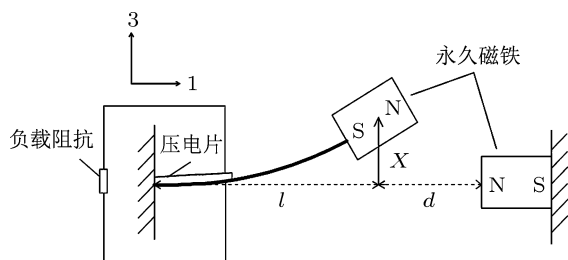


图 1 双稳态压电悬臂梁发电系统模型

基于磁偶极子之间的力模型<sup>[12]</sup>来分析两磁铁之间的磁力情况. 在图 2 中, 偶极子 B 在 A 处产生

的磁流密度可表示为

$$\mathbf{B}_{BA} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \frac{\mathbf{m}_B \cdot \mathbf{r}_{BA}}{|\mathbf{r}_{BA}|^3}, \quad (1)$$

其中,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$  为真空磁导率,  $\nabla$  为向量梯度,  $\mathbf{m}_B$  为偶极子 B 的磁矩, 且  $\mathbf{m}_B = \mathbf{M}_B V_B$ ,  $\mathbf{M}_B$  为磁铁 B 的磁化强度,  $V_B$  为磁铁 B 的体积,  $\mathbf{r}_{BA}$  为磁铁 B 到磁铁 A 的方向向量.

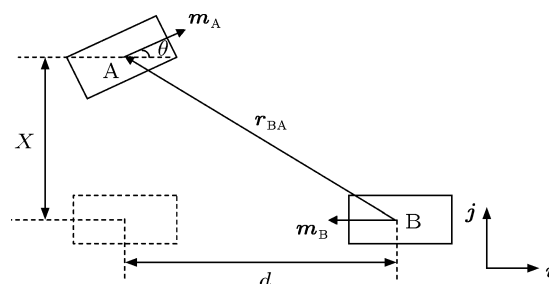


图 2 磁力分析

悬臂梁端磁铁 A 在固定磁铁 B 斥力作用下产生位移并能稳定在上 (或下) 平衡位置, 此时磁铁 A 偏转角为  $\theta$ , 磁铁 A 的振动位移为  $X$ , 则  $\mathbf{m}_A$ ,  $\mathbf{m}_B$  和  $\mathbf{r}_{BA}$  分别可表示为

$$\mathbf{m}_A = M_A V_A \cos \theta \cdot \mathbf{i} + M_A V_A \sin \theta \cdot \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\mathbf{m}_B = -M_B V_B \cdot \mathbf{i}, \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_{BA} = -d \cdot \mathbf{i} + X \cdot \mathbf{j}. \quad (4)$$

磁铁之间的势能为

$$U_m(X) = -\mathbf{m}_A \cdot \mathbf{B}_{BA}, \quad (5)$$

其中,  $d$  为两磁铁中心之间的水平距离,  $l$  为磁铁 A 中心到梁根部的水平距离,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  为矢量坐标.

根据磁场产生的势能得到两磁铁铅直方向的斥力为

$$\begin{aligned} F_m(X) &= \frac{\partial U_m(X)}{\partial X} \\ &= \frac{3\mu_0 M_B V_B M_A V_A X d}{4\pi(d^2 + X^2)^{5/2}(X^2 + l^2)^{1/2}} \\ &\quad \times \left[ 2 - \frac{5X^2}{d^2 + X^2} - \frac{X^2}{X^2 + l^2} \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

在  $X = 0$  处进行泰勒展开可得:

$$\begin{aligned} F_m(X) &= \frac{3\mu_0 M_B V_B M_A V_A}{2\pi d^4 l} \left[ X - \left( \frac{1}{l^2} + \frac{5}{d^2} \right) X^3 \right] \\ &\quad + O(X^5). \quad (7) \end{aligned}$$

从 (7) 式看出, 磁铁 A 在水平位置和上下各距离水平位置  $\frac{dl}{(d^2 + 5l^2)^{1/2}}$  处铅直方向的磁力为零. 此外, (7) 式反映了当  $d$  或  $l$  增大时, 磁铁之间的磁力减小, 而磁力零点的变化会引起系统平衡点位置的变化.

### 3 压电悬臂梁动力学模型

当悬臂梁以一阶模态运动时, 可以简化为集中参数模型, 如图 3.  $m$  为梁和磁铁的等效质量,  $m = M + 33/140m_l$ , 其中  $M$  为磁铁 A 的质量,  $m_l$  为梁的质量;  $k$  为悬臂梁的弹性常数,  $k = 3EJ/L^3$ , 其中  $E$  为等效弹性模量,  $J$  为横截面对中性轴的惯矩,  $L$  为梁的长度;  $c$  为机械阻尼系数.

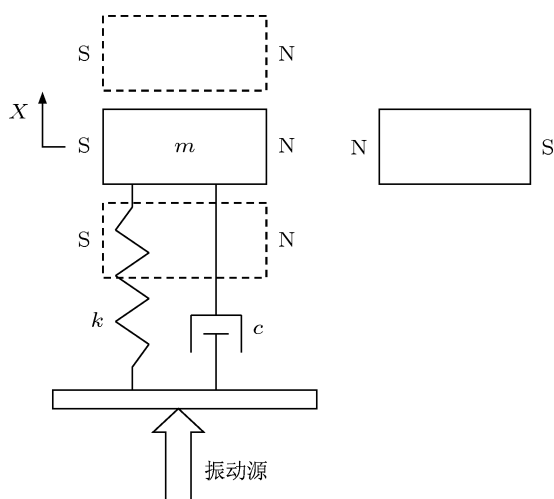


图 3 压电悬臂梁简化模型

对于悬臂梁上粘贴的压电层, 随着结构振动做横向伸缩运动, 则压电本构方程可写为

$$S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3, \quad (8)$$

$$D_3 = d_{31} T_1 + \epsilon_3^T E_3, \quad (9)$$

其中,  $S_1$  为 1 方向的应变;  $s_{11}^E$  为恒电场下的柔顺系数;  $T_1$  为 1 方向的应力;  $d_{31}$  为压电系数;  $E_3$  为 3 方向的电场强度;  $D_3$  为 3 方向的电位移;  $\epsilon_3^T$  为恒应力下的介电系数.

考虑质量块的受力情况, 除了受到弹性力、阻尼力和磁力外, 还有与电压  $V$  相关的机电耦合力  $F_p$ , 在零应变下, 分析  $F_p$  和  $V$  的关系. 由 (8) 式可得

$$T_1 = \frac{-d_{31} V}{s_{11}^E h_p}, \quad (10)$$

其中,  $V = E_3 h_p$ ,  $h_p$  为压电片的厚度.

又

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{l_e} \int_0^{l_e} \frac{F_p(l-u)(h_p+h_b)}{2J} du \\ &= \frac{F_p(2l-l_e)(h_p+h_b)}{4J}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $h_b$  为悬臂梁的厚度,  $l_e$  为压电片的长度,  $u$  为沿梁轴向距离梁根部的位移.

由 (10) 和 (11) 式可得到:

$$F_p = -\kappa_V V, \quad (12)$$

其中

$$\kappa_V = \frac{4Jd_{31}}{s_{11}^E h_p(2l-l_e)(h_p+h_b)}. \quad (13)$$

考虑在  $E_3 = 0$  时, 质量块位移  $X$  与产生的电流  $i$  的关系. 由 (9) 式可得:

$$\begin{aligned} D &= d_{31} T_1 = d_{31} E_p S_1 \\ &= \frac{3Ed_{31}(2l-l_e)(h_p+h_b)}{4l^3} X, \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $E_p$  为压电层的弹性模量. 则

$$i = 2bl_e \dot{D} = \kappa_c \dot{X}, \quad (15)$$

其中  $b$  为压电片的宽度, 且

$$\kappa_c = \frac{3Ebl_e d_{31}(2l-l_e)(h_p+h_b)}{2l^3}. \quad (16)$$

根据牛顿第二定律和基尔霍夫定律分别得到压电悬臂梁发电系统的机械方程和电学方程:

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX - F_m(X) - \kappa_V V = -m\ddot{Y}, \quad (17a)$$

$$C_p \dot{V} + \frac{1}{R_L} V + \kappa_c \dot{X} = 0, \quad (17b)$$

其中  $F_m(X)$  为垂直方向的磁力函数,  $V$  为负载两端电压,  $\ddot{Y} = A \cos(\omega\tau)$  为振动源振动加速度,  $C_p$  为压电陶瓷的等效电容,  $R_L$  为负载阻抗.

引入无量纲变换  $x = X/l$ ,  $v = V/e$ ,  $e = mg/\kappa_V$ ,  $t = \tilde{\omega}\tau$ ,  $\tilde{\omega} = \sqrt{k/m}$ , 则方程 (17) 的无量纲形式为

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} - ax + bx^3 - \gamma v = -f \cos(\Omega t), \quad (18a)$$

$$\dot{v} + \mu v + \vartheta \dot{x} = 0, \quad (18b)$$

其中

$$\zeta = \frac{c}{2m\tilde{\omega}},$$

$$a = \frac{3\mu_0 M_B V_B M_A V_A}{2\pi k d^4 l} - 1,$$

$$b = \frac{3\mu_0 M_B V_B M_A V_A l}{2\pi k d^4} \left( \frac{1}{l^2} + \frac{5}{d^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{mg}{kl}, \quad f = \frac{mA}{kl}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\tilde{\omega}}, \\ \mu &= \frac{1}{R_L C_P \tilde{\omega}}, \quad \vartheta = \frac{\kappa_c l}{C_P e}. \end{aligned} \quad (19)$$

#### 4 平衡点静态分岔分析

通过考察方程 (18) 对应自治系统的平衡点及其稳定性, 分析压电悬臂梁系统的静态分岔特性. 令  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = v$ , 方程 (18) 对应的自治系统可以写成一阶微分方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2\zeta x_2 + ax_1 - bx_1^3 + \gamma x_3 \\ -\mu x_3 - \vartheta x_2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

当  $a \leq 0$  时, 系统有一个平衡点  $(0, 0, 0)$ ; 当  $a > 0$  时, 系统有三个平衡点  $(0, 0, 0), (\pm\sqrt{a/b}, 0, 0)$ . 下面分别讨论平衡点的稳定性.

1) 当  $a \leq 0$  时, 对应平衡点  $(0, 0, 0)$  的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & -2\zeta & \gamma \\ 0 & -\vartheta & -\mu \end{bmatrix}, \quad (21)$$

它的特征方程  $\det(\mathbf{J}_1 - \lambda I) = 0$  为

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (2\zeta + \mu)\lambda^2 + (2\zeta\mu + \gamma\vartheta - a)\lambda - a\mu \\ = 0. \end{aligned}$$

当  $a < 0$  时, 由于  $\zeta, \mu, \gamma, \vartheta$  为正, 根据 Routh-Hurwitz 定理可得,  $(0, 0, 0)$  是渐近稳定的; 当  $a = 0$  时, (21) 式变为

$$\lambda^3 + (2\zeta + \mu)\lambda^2 + (2\zeta\mu + \gamma\vartheta)\lambda = 0, \quad (22)$$

此时 (22) 式具有零根, 则对应平衡点  $(0, 0, 0)$  为分岔点.

2) 当  $a > 0$  时, 对于平衡点  $(0, 0, 0)$ , 根据 Routh-Hurwitz 定理可知, 特征多项式必有正实部根, 故可推出平衡点  $(0, 0, 0)$  不稳定; 对于平衡点  $(\pm\sqrt{a/b}, 0, 0)$ , 其雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2a & -2\zeta & \gamma \\ 0 & -\vartheta & -\mu \end{bmatrix},$$

它的特征方程  $\det(\mathbf{J}_2 - \lambda I) = 0$  为

$$\lambda^3 + (2\zeta + \mu)\lambda^2 + (2\zeta\mu + \gamma\vartheta + 2a)\lambda + 2a\mu$$

$$= 0, \quad (23)$$

根据 Routh-Hurwitz 定理可得, 平衡点  $(\pm\sqrt{a/b}, 0, 0)$  渐近稳定.

通过上述分析可知,  $a < 0$  时有一个稳定的零平衡点,  $a = 0$  为分岔点,  $a > 0$  时有两个稳定的非零平衡点和一个不稳定的零平衡点, 故  $a = 0$  为叉形分岔点.

事实上, 上述分岔分析可以从能量角度给予解释, 当  $a \leq 0$  时, 势能函数  $U(x) = -1/2ax^2 + 1/4bx^4$  表现为具有一个势阱; 当  $a > 0$  时, 势能函数表现为具有两个势阱和一个势垒, 如图 4. 其中势阱坐标为  $(\pm\sqrt{a/b}, -a^2/4b)$ , 当  $d$  减小时,  $a, b$  的值同时增大,  $a^2/4b$  的值也越大, 则系统越过势垒需要的能量越大.

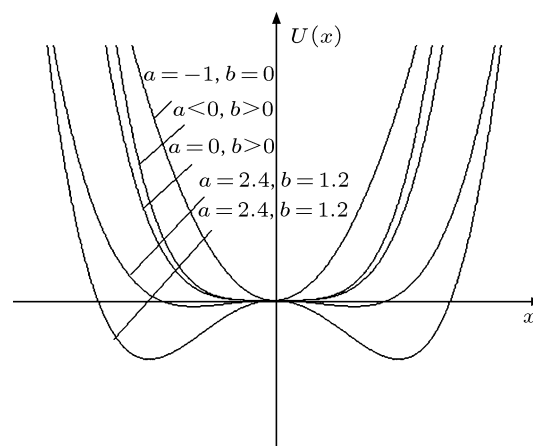


图 4 悬臂梁的势函数

#### 5 双稳态压电发电系统动态响应数值模拟

##### 5.1 激励频率和幅值对系统响应特性的影响

根据无量纲后的方程分析双稳态压电发电系统在基础激励变化下的响应特性, 系统的各参数取值如表 1. 根据上节分析可知, 当  $a > 0$  时系统才会产生双稳态运动, 故在保证  $a > 0$  的情况下, 选取  $d = 10 \text{ mm}$ . 图 5(a), (b) 给出了不同激励幅值下以激励频率为分岔参数的分岔图, 图 5(c) 为图 5(b) 对应的最大 Lyapunov 指数谱.

表 1 物理参数值

物理参数	物理参数值
$m/g$	25.9
$L/mm$	71.68
$l/mm$	74.18
$b/mm$	12.62
$h_b/mm$	0.76
$E_b/GPa$	206
$l_e/mm$	20
$h_p/mm$	0.25
$E_p/GPa$	63
$d_{31}/C \cdot N^{-1}$	$285 \times 10^{12}$
$\epsilon_{33}/F \cdot m^{-1}$	$285 \times 10^{-8}$
$M_A, M_B/A \cdot m^{-1}$	$1.19 \times 10^6$
$V_A, V_B/mm^3$	$2.23 \times 10^3$

从图 5(a) 和 (b) 可以看出, 随着激励幅值的增大, 做大幅运动的频率范围越宽. 当频率很小时系统在一平衡点附近做周期运动, 增大频率, 系统将具有足够的能量越过势垒在两个平衡点之间做

大幅周期运动, 如图 6(a) 和 (b). 继续增大激励频率, 压电振子开始在上下两个平衡点之间的吸引域内做大幅混沌运动, 如图 7(a) 和 (b), 对应于最大 Lyapunov 指数大于 0 的部分, 如图 5(c). 并且从图 7(b) 可以看到系统的响应频带在一个很宽的范围. 但如果此时增大激励幅值, 压电振子则会由大幅不规则运动变为大幅周期运动, 如图 7(c) 和 (d), Guckenheimer 和 Holmes<sup>[13]</sup> 提到在相同激励下奇怪吸引子和大幅周期吸引子可以共存, 此现象说明此时所产生的混沌吸引子 (图 8) 可以转换为大幅周期运动吸引子<sup>[5]</sup>. 如果激励频率继续增大, 系统输出响应所消耗的能量会越来越大<sup>[14]</sup>, 则需要更大的驱动幅值才能使系统从一个势阱跃迁到另一个势阱, 那么在不增大激励幅值的情况下, 系统最终在一个平衡点附近做小幅周期运动, 如图 9. 通过上述分析可知, 如果要使收集的能量增加, 激励频率范围并非越大越好, 而是在低频率范围下会出现大幅运动, 并且响应频带很宽, 激励幅值越大, 系统具有越高的能量逃离势阱做大幅周期运动.

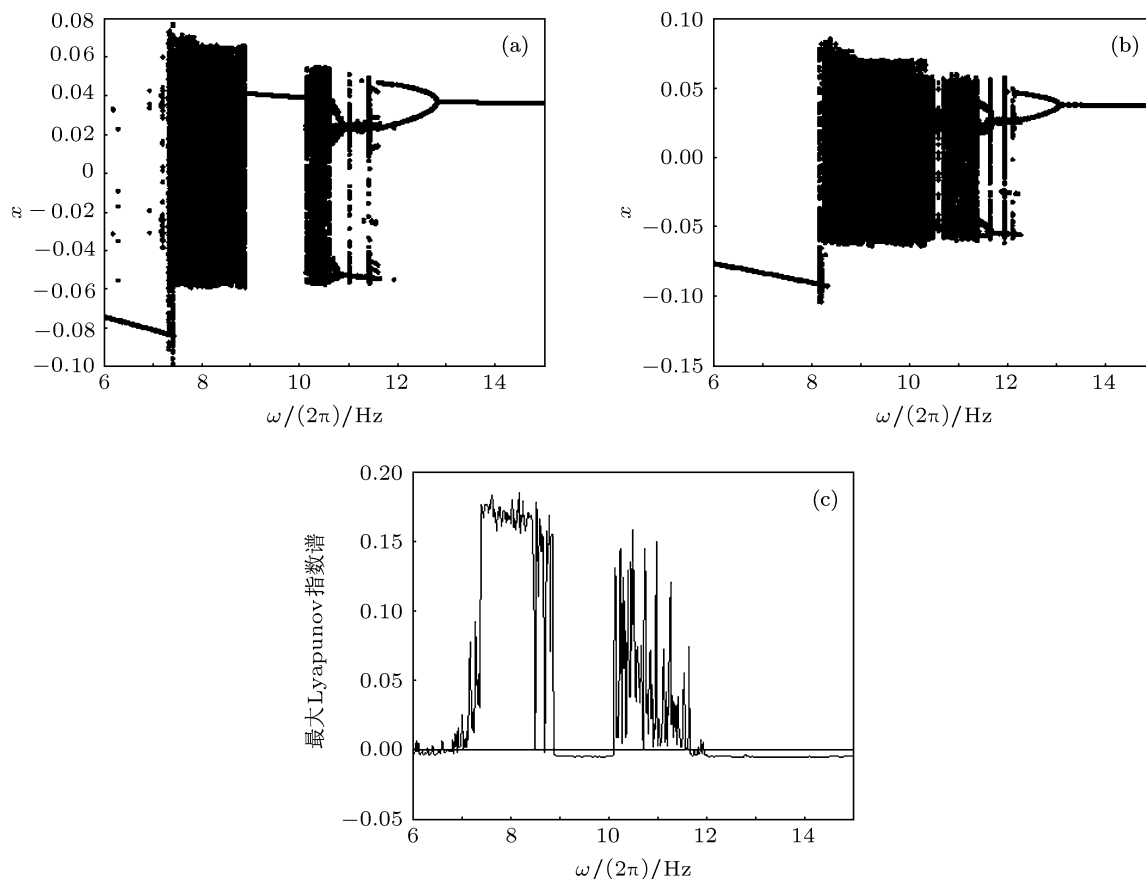


图 5 以激励频率为分岔参数的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱 (a)  $A = 12 \text{ m/s}^2$  时的分岔图; (b)  $A = 17 \text{ m/s}^2$  时的分岔图; (c)  $A = 12 \text{ m/s}^2$  时的最大 Lyapunov 指数谱

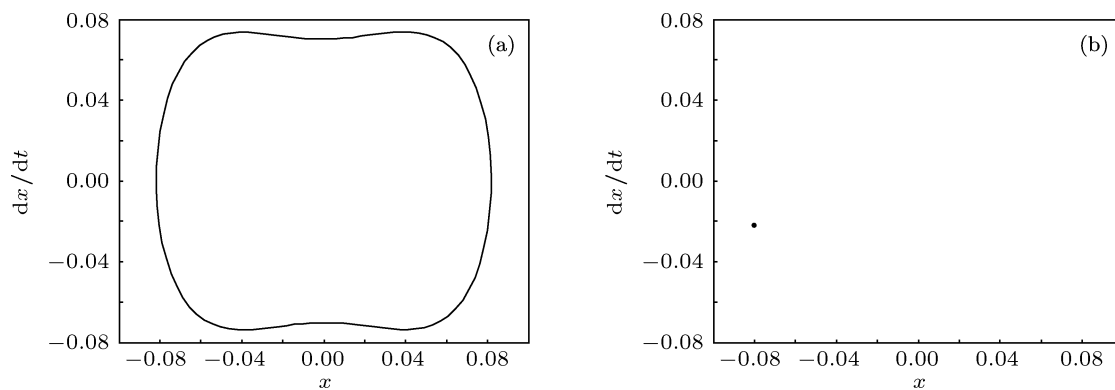


图6  $A = 12 \text{ m/s}^2, \omega/2\pi = 7 \text{ Hz}$  时的相图和 Poincaré 映射图 (a) 相图; (b) Poincaré 映射图

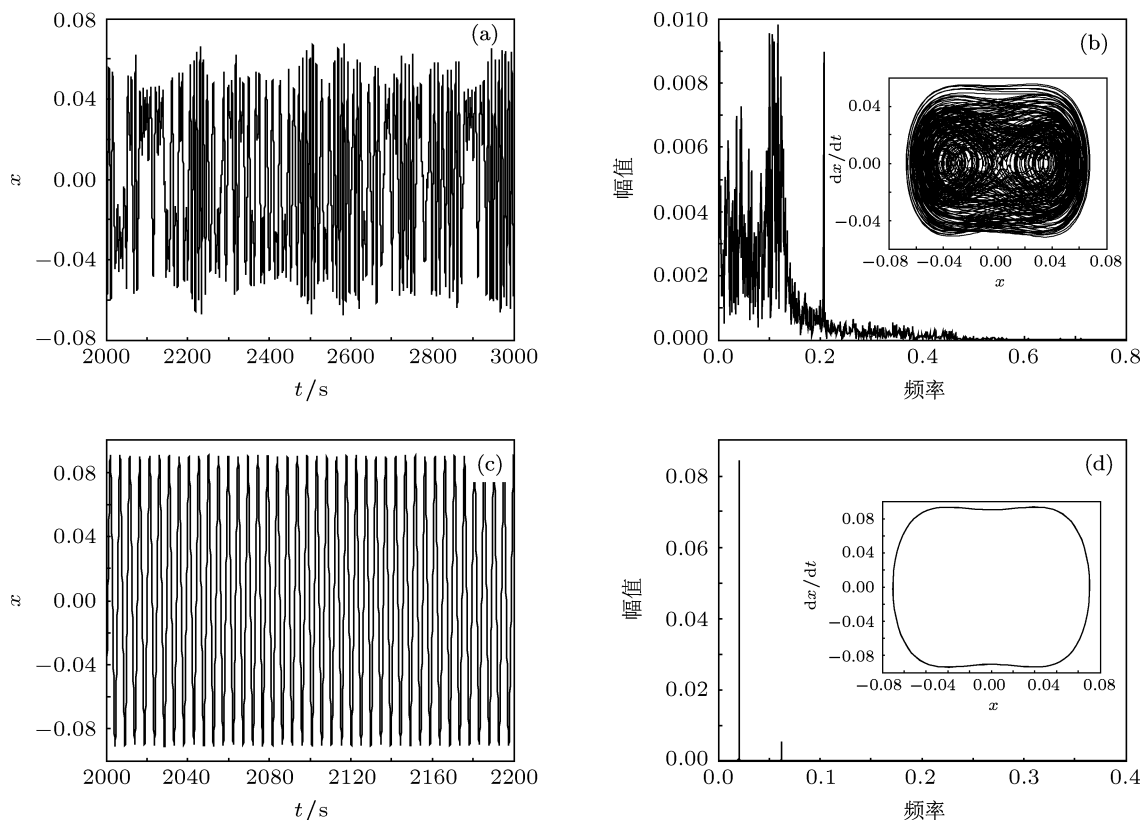


图7 同一激励频率下不同激励幅值的时域图、频域图和相图 ( $\omega/2\pi = 8 \text{ Hz}$ ) (a)  $A = 12 \text{ m/s}^2$  时的时域图; (b)  $A = 12 \text{ m/s}^2$  时的频域图和相图; (c)  $A = 17 \text{ m/s}^2$  时的时域图; (d)  $A = 17 \text{ m/s}^2$  时的频域图和相图

图 10(a) 和 10(b) 为不同的激励频率下以激励幅值为分岔参数的分岔图, 图 10(c) 为图 10(b) 对应的最大 Lyapunov 指数谱图. 它同样说明了大幅周期运动吸引子的存在性, 在低频激励下, 当激励幅值增大到一定的值, 系统总能由混沌运动变为大幅周期运动. 但激励频率越高, 系统要做大幅周期运动所需要的激励幅值也越大, 而大幅周期运动时电

量收集效率最高, 故这种双稳态压电发电系统更适合于低频环境下.

### 5.2 $d$ 的变化对系统响应特性的影响

根据磁力模型可知,  $d$  的变化直接决定着磁铁之间磁力的大小, 从而对系统的响应特性有着重要

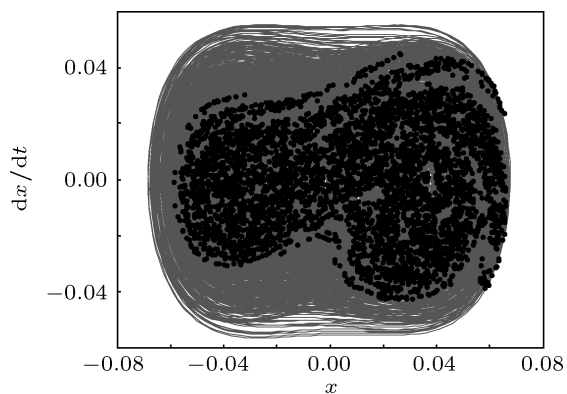


图8 大幅混沌运动吸引子 ( $A = 12 \text{ m/s}^2, \omega = 8 \text{ Hz}$ )

的影响, 分析磁铁之间的距离变化时系统的响应特性, 可对双稳态压电发电系统的结构设计提供依据. 图 11 分别给出了在  $A = 12 \text{ m/s}^2, \omega/2\pi = 8 \text{ Hz}$  和  $A = 12 \text{ m/s}^2, \omega/2\pi = 12 \text{ Hz}$  时随  $d$  变化的分岔图以及  $A = 12 \text{ m/s}^2, \omega/2\pi = 8 \text{ Hz}$  时的最大 Lyapunov 指数谱. 从图中可以看出, 只有当  $d$  在某段范围时, 系统才能发生大幅运动; 当  $d$  很小时, 会导致系统中的非线性力很大, 悬臂梁很难有足够的能量越过势垒做大幅运动 [15], 如图 12; 而当  $d$  趋于无穷大时, 磁力的作用变为 0, 此时双稳态系统变为线性系统. 图 13 为  $A = 12 \text{ m/s}^2, \omega/2\pi = 8 \text{ Hz}, d = 9 \text{ mm}$

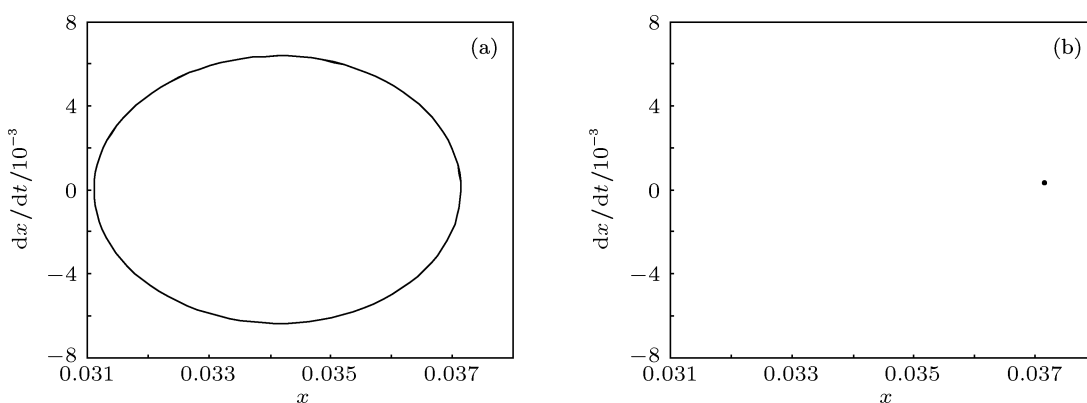


图9  $A = 12 \text{ m/s}^2, \omega/2\pi = 13 \text{ Hz}$  时的相图和 Poincaré 映射图 (a) 相图; (b) Poincaré 映射

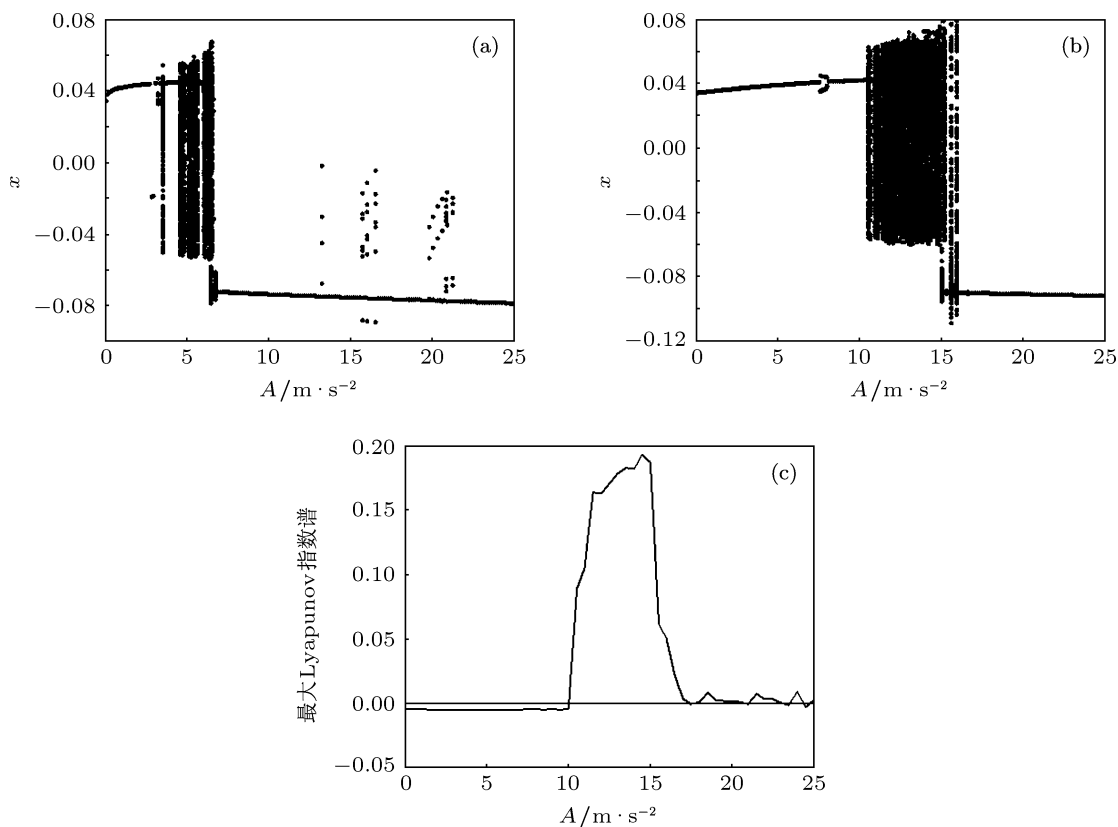


图 10 以激励幅值为分岔参数的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱 (a)  $\omega/2\pi = 6 \text{ Hz}$  时的分岔图; (b)  $\omega/2\pi = 8 \text{ Hz}$  时的分岔图; (c)  $\omega/2\pi = 8 \text{ Hz}$  时的最大 Lyapunov 指数谱

时双稳态系统和线性系统的相图. 从图中可以看出, 双稳态系统发生大幅运动时, 其响应幅值比线性系统的响应幅值大.

## 6 实验研究

第 5 节的数值计算结果可以通过实验进行

验证. 图 14 为双稳态压电发电系统的实验装置, 主要参数值同表 1. 将双稳态压电发电装置放置在激振台上, 通过激振控制器控制激励信号, 在压电梁末端放置加速度传感器测量梁的振动情况, 并用数据采集器采集实验数据. 实验过程中可以通过旋转右端的螺丝调节两永久磁铁之间的距离.

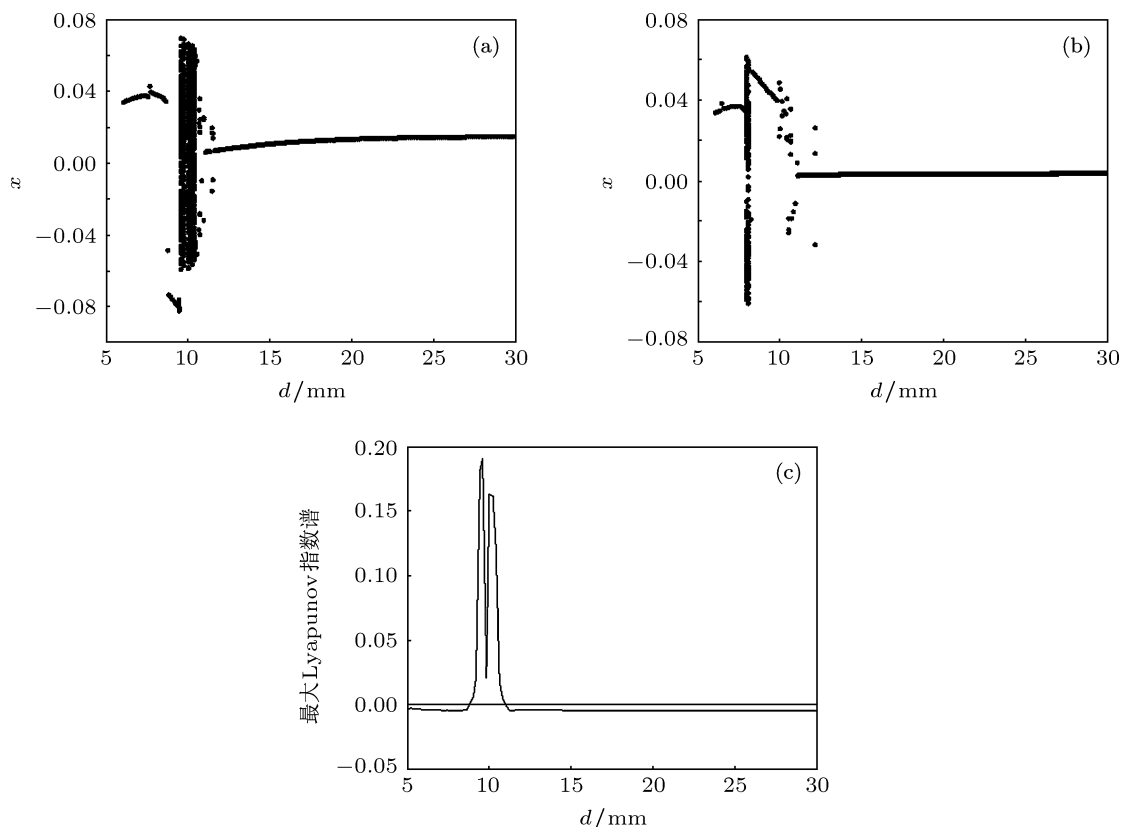


图 11 以  $d$  为分岔参数的分岔图和最大 Lyapunov 指数谱 (a)  $A = 12 \text{ m/s}^2$ ,  $\omega/2\pi = 8 \text{ Hz}$  时的分岔图; (b)  $A = 12 \text{ m/s}^2$ ,  $\omega/2\pi = 12 \text{ Hz}$  时的分岔图; (c)  $A = 12 \text{ m/s}^2$ ,  $\omega/2\pi = 8 \text{ Hz}$  时的最大 Lyapunov 指数谱

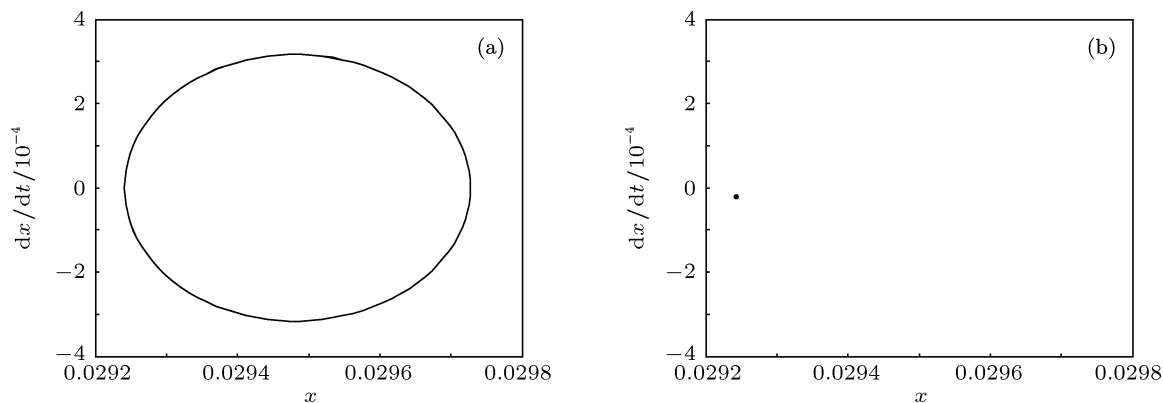


图 12  $d = 5 \text{ mm}$ ,  $A = 12 \text{ m/s}^2$ ,  $\omega/2\pi = 8 \text{ Hz}$  时的相图和 Poincaré 映射 (a) 相图; (b) Poincaré 映射



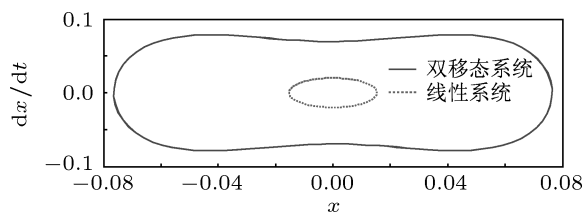


图 13 双稳态系统和线性系统相图对比图 ( $A = 12 \text{ m/s}^2$ ,  $\omega/2\pi = 7 \text{ Hz}$ ,  $d = 9 \text{ mm}$ )

选取激励幅值  $A = 12 \text{ m/s}^2$ , 逐渐增大激励频率, 测量双稳态压电发电系统不同频率下的响应特性. 图 15 为激励频率  $\omega/2\pi = 13 \text{ Hz}$  时的实验现象, 此时系统发生大幅混沌运动, 并且从图 15(c) 中可以看出响应频率范围很宽. 若此时增大激励幅值  $A = 17 \text{ m/s}^2$ , 则系统由混沌运动变为了大幅周期运动, 如图 16. 这与第 5.1 节中指出的大幅周期吸引子是相符的. 继续增大频率, 当激励频率  $\omega/2\pi = 19 \text{ Hz}$  时, 系统做小幅周期运动, 如图 17.

同 5.1 节中的结论, 可看出双稳态系统只有在低频下才能产生大幅运动, 并且响应频带很宽. 但同时, 由于建立的磁力模型以及双稳态压电悬臂梁理论模型存在一定的误差, 并且实验时会受到环境噪声干扰, 所以数值模拟结果与实验结果不能完全定量对应, 但定性结论相同.

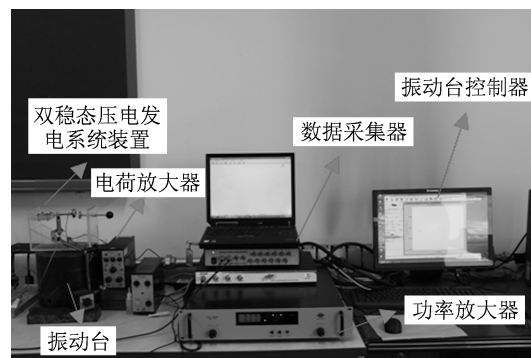


图 14 实验装置图

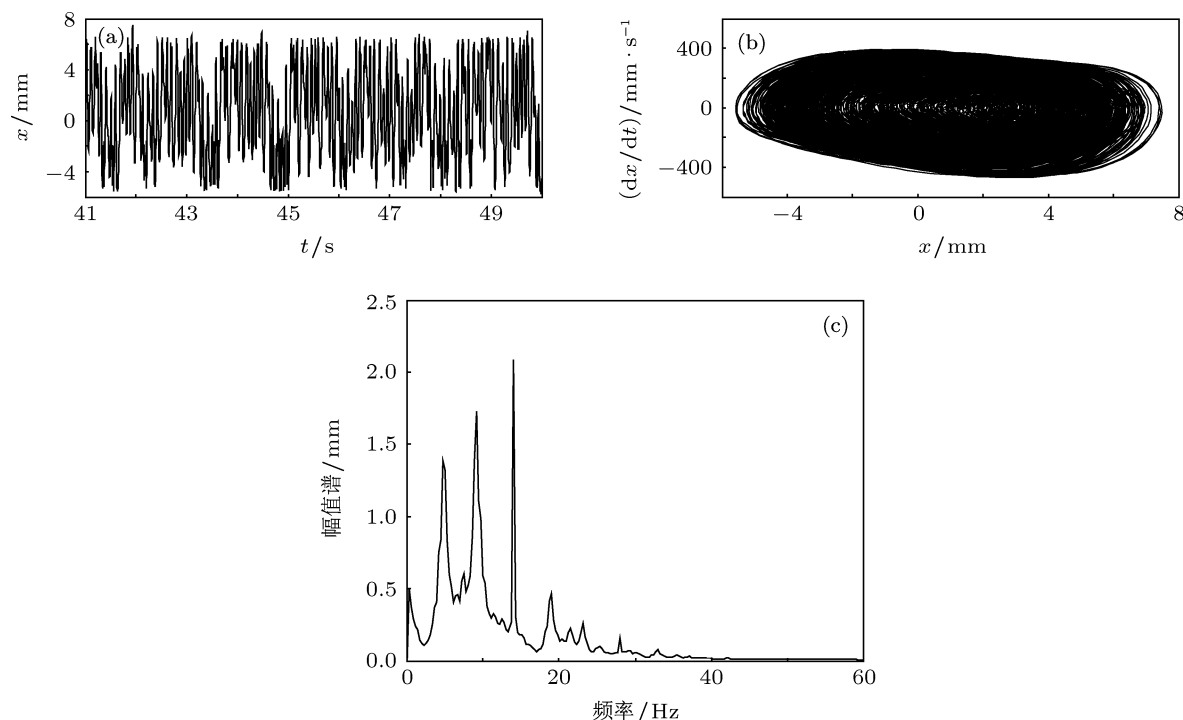


图 15 时域、频域和相图 ( $A = 12 \text{ m/s}^2$ ,  $\omega/2\pi = 13 \text{ Hz}$ ,  $d = 11.3 \text{ mm}$ ) (a) 时域图; (b) 相图; (c) 频域图

分析两永久磁铁之间的距离  $d$  对系统响应的影响. 当两永久磁铁之间的距离  $d$  过小时, 如图 18 给出了  $d = 6.5 \text{ mm}$  时的相图和幅值谱图, 此时磁铁之间的磁力很大, 悬臂梁没有足够的能量越过势垒做大幅运动, 只能在一个平衡点附近做相对较小

幅值的运动. 用装置右端旋钮调整  $d$  使得磁力减为 0, 则该压电发电系统变为线性系统. 图 19 给出了在  $A = 12 \text{ m/s}^2$ ,  $\omega/2\pi = 8\text{--}25 \text{ Hz}$  时, 双稳态系统和线性系统振幅有效值的对比曲线, 明显可以看出在低于固有频率很宽的范围内, 双稳态系统的响

应幅值比线性系统高很多.

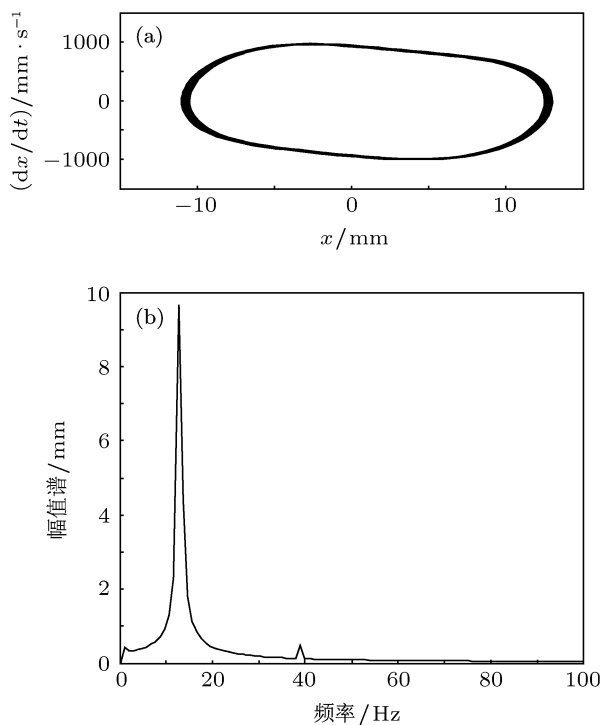


图 16 频域和相图 ( $A = 17 \text{ m/s}^2$ ,  $\omega/2\pi = 13 \text{ Hz}$ ,  $d = 11.3 \text{ mm}$ ) (a) 相图; (b) 频域图

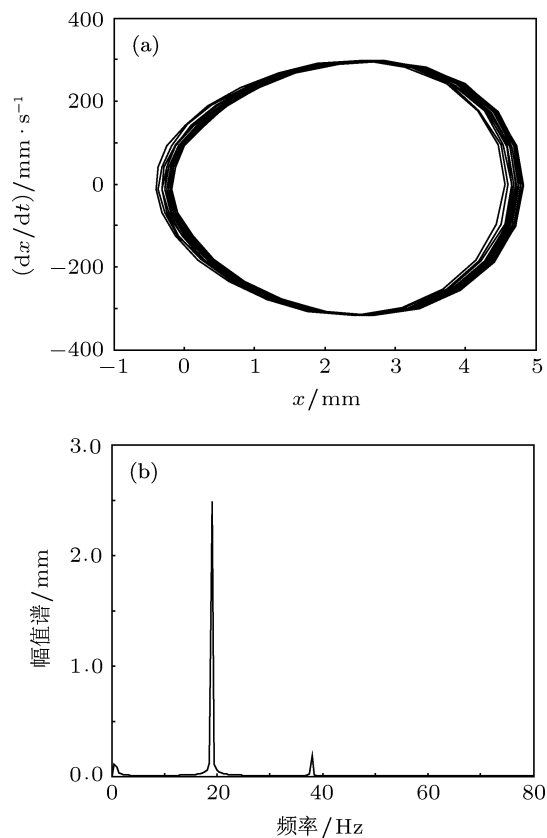


图 17  $A = 12 \text{ m/s}^2$ ,  $\omega/2\pi = 19 \text{ Hz}$ ,  $d = 11.3 \text{ mm}$  时的频域图和相图 (a) 相图; (b) 频域图

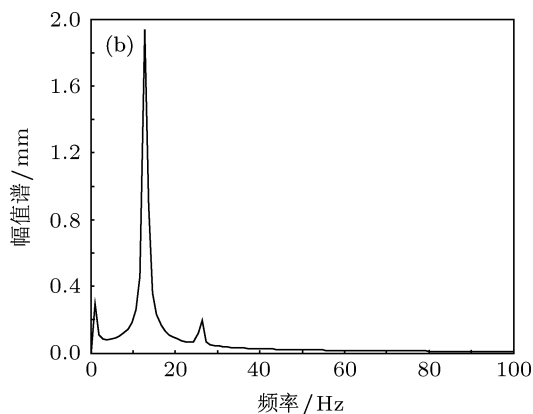
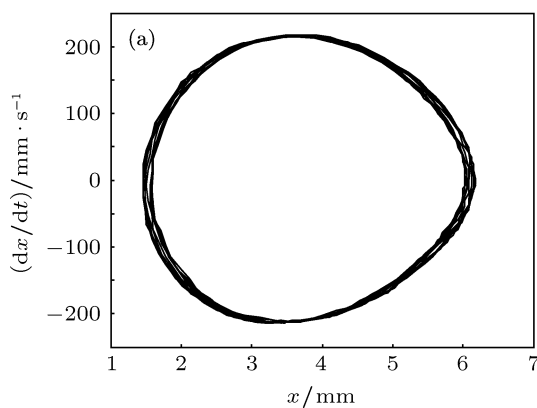


图 18  $A = 12 \text{ m/s}^2$ ,  $\omega/2\pi = 13 \text{ Hz}$ ,  $d = 6.5 \text{ mm}$  时的频域图和相图 (a) 相图; (b) 频域图

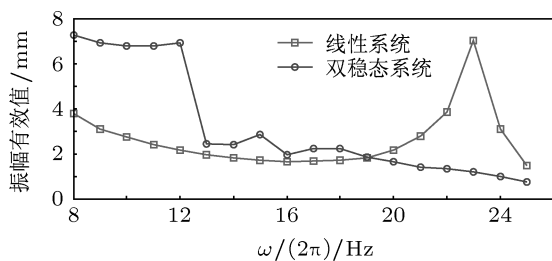


图 19 双稳态系统和线性系统幅值有效值对比 ( $A = 12 \text{ m/s}^2$ )

## 7 结论

本文给出了两永久磁铁之间的磁力计算模型, 从而得到了发生双稳态运动时磁铁之间的距离范围. 利用磁力模型建立了双稳态压电悬臂梁发电系统的动力学模型, 通过数值和实验研究了不同激励频率、幅值以及不同磁铁距离  $d$  下系统的响应特性. 得到如下结论:

1) 双稳态系统在低频率范围下会出现大幅运动, 并且响应频带很宽;

2) 系统存在大幅运动吸引子, 改变激励参数, 压电振子会由混沌运动变为大幅周期运动;

3) 永久磁铁之间的距离  $d$  会影响双稳态压电

发电系统的响应特性, 在低频激励下双稳态压电发电系统比线性系统的发电效率高, 可以依据数值模拟结果对  $d$  进行合理选择.

本文结论为双稳态压电悬臂梁发电系统的设计和应用提供了理论依据.

- 
- [1] Wu X M, Fang H J, Lin J H, Ren T L, Liu L T 2008 *Journal of Functional Materials and Devices* **14** 467 (in Chinese) [伍晓明, 方华军, 林建辉, 任天令, 刘理天 2008 功能材料与器件学报 **14** 467]
- [2] Arrieta A F, Hagedorn P, Erturk A, Inman D J 2010 *Appl. Phys. Lett.* **97** 104102
- [3] Gammaitoni L, Neri I, Vocca H 2010 *Chem. Phys.* **375** 435
- [4] Ferrari M, Ferrari V, Guizzetti M, Andò B, Baglio S, Trigona C 2010 *Sens. Actuators A: Phys.* **162** 425
- [5] Erturk A, Inman D J 2011 *J. Sound Vib.* **330** 2339
- [6] Moon F C, Holmes P J 1979 *J. Sound Vib.* **65** 275
- [7] Mann B P, Owens B A 2010 *J. Sound Vib.* **329** 1215
- [8] S Stanton S C, McGehee C C, Mann B P 2010 *Physica D* **239** 640
- [9] Han Q W, Li K, Yan L, Zhou J L, Wang Y, Chen W L H 2011 *Piezoelectrics & Acousto-optics* **33** 85 (in Chinese) [韩权威, 李坤, 严玲, 周金龙, 王雨, 陈王丽华 2011 压电与声光 **33** 85]
- [10] Ma H A, Liu J Q, Tang G, Yang C S, Li Y G 2011 *Transducer and Microsystem Technology* **30** 66 (in Chinese) [马华安, 刘景全, 唐刚, 杨春生, 李以贵 2011 传感器与微系统 **30** 66]
- [11] Chen Z S, Yang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 074301 (in Chinese) [陈仲生, 杨拥民 2011 物理学报 **60** 074301]
- [12] Yung K W, Landecker P B, Villani D D 1998 *Magnetic and Electrical Separation* **9** 39
- [13] Guckenheimer J, Holmes P 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York: Springer-Verlag)
- [14] Lin M, Meng Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3627 (in Chinese) [林敏, 孟莹 2010 物理学报 **59** 3627]
- [15] Gottwald J A, Virgin L N, Dowell E H 1995 *J. Sound Vib.* **187** 133

# Dynamic modeling and analysis of a bistable piezoelectric cantilever power generation system\*

Sun Shu<sup>1)2)</sup> Cao Shu-Qian<sup>1)2)†</sup>

1) (School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

2) (Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Chaos Control, Tianjin 300072, China)

(Received 21 March 2012; revised manuscript received 23 May 2012)

## Abstract

Dynamic modeling and analysis of a bistable piezoelectric cantilever power generation system are presented. Firstly, a magnetic force model is established which could induce bistability, and the force mathematical expression between the two magnets is given. Secondly, a lumped parameter model of piezoelectric cantilever power generation system is built, and the range of distance between the two magnets is analyzed while the bistable phenomenon occurs. Thirdly, the response characteristics of the system are studied numerically. The results show that the beam undergoes large-amplitude motion at low frequency and low amplitude, and that the voltage response has a broadband. The system has high energy escaped from potential well when excitation amplitude increases. Finally, the result is verified experimentally. This study provides a theoretical basis for the design and application of bistable piezoelectric cantilever power generation system.

**Keywords:** bistable cantilever beam, piezoelectric power generation, large-amplitude motion, chaotic motion

**PACS:** 05.45.-a, 77.84.-s, 84.90.+a

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11172199).

† E-mail: sqcao@tju.edu.cn