一类厄尔尼诺-南方涛动充电-放电振子模型研究*

赵强† 刘式适 刘式达

(北京大学物理学院, 北京 100871)

(2012 年 5 月 8 日收到; 2012 年 5 月 30 日收到修改稿)

通过数学变换将一类厄尔尼诺 - 南方涛动 (简称 ENSO) 的充电 - 放电振子模型转换成 van der Pol 方程, 由 van der Pol 方程的定性分析严格证明了该 ENSO 振荡子模型存在一个稳定的极限环.

关键词: ENSO 模型, van der Pol 方程, 极限环

PACS: 02.30.Hq

1 引 言

ENSO 是发生在热带大气和海洋中的异常事件, 它是影响全球气候、生态等异常变化的大尺度大气 - 海洋相互作用耦合系统, 在国内外学术界中是非常值得关注的研究对象, 许多学者已使用不同的方法对其局部和整体性的性态作了多方位研究 [1−5]. 相对于复杂的全球海 - 气耦合数值模式, 通过简化海气非线性相互作用物理过程所得到的振子概念模型能够更容易地刻画海气耦合运动本质和物理机理, 从而更成功地模拟 ENSO 的某些重要物理现象. 因此许多学者提出研究 ENSO 的各种振子形式的动力系统模型, 例如: “延迟振子”, “西太平洋振子”, “充电 - 放电振子”以及“平流 - 反射”等理论 [5]. Wang[4] 通过严格的数学推导和物理简化建立了一个描述 ENSO 事件的随机动力学模式, 封国林等 [1] 进一步论证了该模式含有唯一极限环解, 且表征的是一个内在耦合系统的年际振荡子; 莫嘉琪等还求得多个 ENSO 振子模型的近似解析解 [6]. 本文是讨论一类典型的 ENSO 海 - 气耦合充电 - 放电振子动力学模型, 将描述该模型的方程组转换成 van der Pol 方程, 通过对 van der Pol 方程的简单定性分析, 从理论上证明了该 ENSO 振子模型存在一个稳定的极限环, 即存在周期振荡解.

2 ENSO 模型的充电 - 放电振子理论

本文考虑由 Jin[2,3] 所提出的 ENSO 充电 - 放电振子理论, 该振子模型的动力学控制方程组可写成如下形式 [5,7,8]:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = CT + Dh - \varepsilon T^3, \tag{1a}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -Et - R_h h, \tag{1b}$$

其中 T 表示赤道东太平洋的海表温度 (SST) 距平, h 表示赤道西太平洋的温跃层厚度距平. 上面的模型有效地描述了海表温度距平和温跃层厚度距平间的非线性相互作用. C, D, E, R_h 和 ε 表示正的模式参数, 有关它们的详细定义和物理意义参见文献 [2]. 李晓静 [7] 利用 Mawhin 重合度拓展定理得到该 ENSO 振子模型的周期解; 曹小群等 [8] 应用改进变分迭代方法简洁地得到该耦合非线性动力系统的近似解析解; 谢峰等 [9] 利用同伦映射方法求得该 ENSO 振子模型包含扰动项的近似解与精确解. 本文用数学变化将 (1) 式转换为 van der Pol 方程, 通过对 van der Pol 方程的定性分析, 证明该 ENSO 振荡子模型存在一个稳定的极限环, 即存

* 国家自然科学基金 (批准号: 40975028) 资助的课题.

† E-mail: zhqing@pku.edu.cn

在一个周期振荡解.

2.1 化 ENSO 振子模型为van der Pol方程

首先, 将 ENSO 振子模型 (1) 改写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-C+\varepsilon T^2\right)T=Dh, \tag{2a}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+R_h\right)h=-Et. \tag{2b}$$

对 (2a) 式做 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+R_h\right)$ 运算, 并利用 (2b) 式消去 h, 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}+2\mu\left(\frac{T^2}{T_{\mathrm{c}}^2}-1\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2T=0, \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned}&\mu=C-R_h,\\&T_{\mathrm{c}}^2=\frac{2\mu}{3\varepsilon}=\frac{C-R_h}{3\varepsilon},\\&\omega_0^2=DE-CR_h,\end{aligned} \tag{4}$$

(3) 式就是著名的 van der Pol 方程. 它成立也就意味着有

$$C>R_h,\quad DE>CR_h. \tag{5}$$

2.2 van der Pol 方程的定性分析

根据文献 [10], 我们对 van der Pol 方程做简单的定性分析. 从 van der Pol 方程 (3) 可知它是一个阻尼振荡方程, 阻尼系数为 $2\mu=C-R_h$. 当 $T<T_{\mathrm{c}}$ 时, 它表征负阻尼; 当 $T>T_{\mathrm{c}}$ 时, 它表征正阻尼. 它说明当非线性系数 ε 越小时, 振子运动越容易负阻尼; 当非线性系数 ε 越大时, 振子运动越易正阻尼. van der Pol 方程 (3) 存在一个等价的动力系统

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right)=U, \tag{6a}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right)=-\omega_0^2T-2\mu\left(\frac{T^2}{T_{\mathrm{c}}^2}-1\right)U, \tag{6b}$$

这里 $\mu>0$. 方程组 (6) 只有一个平衡态

$$(T^\star,U^\star)=(0,0). \tag{7}$$

这就是海表温度距平和温跃层厚度距平不随时间变化的状态, 即气候的平均状态. 此状态的 Jacobi 矩阵为

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 2\mu\end{pmatrix}. \tag{8}$$

相应的特征方程及其特征根分别为

$$\lambda^2-2\mu\lambda+\omega_0^2=0, \tag{9}$$

$$\lambda=\mu\pm\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}. \tag{10}$$

在弱阻尼的情况下 ($\mu^2<\omega_0^2$), λ 为二共轭复数根且实部为正, 平衡态 $(T^\star,U^\star)=(0,0)$ 是一个不稳定的焦点. 而在强阻尼的情况下 ($\mu^2>\omega_0^2$), λ 为同是正号的二不等实根, 平衡态 $(T^\star,U^\star)=(0,0)$ 是一个不稳定的结点. 这就意味着当气候变化稍有偏离平均态, 将会出现不稳定. 不仅如此, 由系统 (6) 可知在相平面 (T,U) 上 van der Pol 方程的相轨满足

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}=-\frac{\omega_0^2T+2\mu\left(\frac{T^2}{T_{\mathrm{c}}^2}-1\right)U}{U}. \tag{11}$$

由此求得系统 (6) 的总能量及其变化率分别为

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}U^2+\frac{1}{2}\omega_0^2T^2\\=&-2\mu\int_0^t\left(\frac{T^2}{T_{\mathrm{c}}^2}-1\right)\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{12}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=&U\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2T\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\\=&-2\mu\left(\frac{T^2}{T_{\mathrm{c}}^2}-1\right)\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right)^2.\end{aligned} \tag{13}$$

由此可见, van der Pol 方程是一个非保守系统或非 Hamilton 系统. 当 $T<T_{\mathrm{c}}$ (负阻尼) 时, $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}>0$; 当 $T>T_{\mathrm{c}}$ (正阻尼) 时, $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}<0$. 这表明在运动过程中 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ 可以改变符号. 考虑到 $\mu=0$ (无阻尼) 时, 方程 (3) 是一个保守系统或 Hamilton 系统. 它在 $T|_{t=0}=0$ 条件下的解为

$$T(t)=a\sin\omega_0t, \tag{14}$$

其中 a 为振幅. 它表明无阻尼时海表温度距平将作周期振荡, 圆频率为 ω_0, 周期为 $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$. 此时的 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ 和总能量 H 分别为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\omega_0\cos\omega_0t, \tag{15}$$

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{1}{2}\omega_0^2T^2=\frac{1}{2}\omega_0^2a^2. \tag{16}$$

这样, 在无阻尼时 (14) 式和 (15) 式可分别写为

$$T = \pm\frac{\sqrt{2H}}{\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{17}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{2H}\cos\omega_0 t. \tag{18}$$

对于 $\mu \neq 0$ 的情况, 在弱阻尼 ($\mu^2 < \omega_0^2$) 的条件下, 我们可以认为 H 和 T 都是时间 t 的慢变函数. 考虑 (17) 式和 (18) 式, 我们可假设 $\mu \neq 0$ 的弱阻尼条件下有

$$\begin{aligned} T &= \pm\frac{\sqrt{2H(t)}}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \pm\sqrt{2H(t)}\cos\omega_0 t. \end{aligned} \tag{19}$$

这里 $H(t)$ 是 t 的慢变函数. 将 (19) 式代入方程 (13) 式, 得到

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -4\mu\left[\frac{2H(t)\sin^2\omega_0 t}{\omega_0^2 T_\mathrm{c}^2} - 1\right]H(t)\cos^2\omega_0 t. \tag{20}$$

上式在一个周期 $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 内求平均, 在其右端积分时忽略 H 的变化, 左端平均后仍记为 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}$, 则得到

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &= -2\mu H\left(\frac{H}{H_0} - 1\right), \end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$H_0 = 2\omega_0^2 T_\mathrm{c}^2. \tag{22}$$

对于系统 (21) 而言, 使得 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0$ 的平衡态有两个:

$$H_1^\star = 0, \quad H_2^\star = H_0. \tag{23}$$

从 (16) 式可知 $H_1^\star = 0$ 就是平衡态 $(T^\star, U^\star) = (0,0)$, 即气候的平均状态. 在此平衡态附近, (21) 式近似为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 2\mu H. \tag{24}$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} > 0$, 运动是不稳定, $H_1^\star = 0$ 便是不稳定焦点. 这种分析与 (10) 式在弱阻尼条件下的分析结论是一致的. 在平衡态 $H_2^\star = H_0$ 附近, (21) 式近似为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} &= -2\mu H_0\left(\frac{H}{H_0} - 1\right) \\ &= -2\mu(H - H_0). \end{aligned} \tag{25}$$

由上式可见, 当 $H < H_0$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} > 0$; 当 $H > H_0$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} < 0$. 这意味着运动从 $H < H_0$ 和 $H > H_0$ 两边趋向于 $H = H_0$, 因为 $H = H_0$ 就是

$$\frac{1}{2}\omega_0^2 T^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2\omega_0^2 T_\mathrm{c}^2, \tag{26}$$

即

$$\left(\frac{T}{2T_\mathrm{c}}\right)^2 + \left(\frac{U}{2\omega_0 T_\mathrm{c}}\right)^2 = 1. \tag{27}$$

在相平面 (T, U) 上它是一个椭圆闭合轨道称为极限环, 而且是稳定的极限环. 稳定的极限环是 van der Pol 方程在弱阻尼条件下求得的孤立的周期波解, 也称为周期吸引子. 以上分析表明: 当运动脱离气候平均态后, 有可能进入一个周期运动的状态, 而且应该是一个振荡周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 气候振荡的状态. 在这里我们从数学上严格证明了 ENSO 充电 - 放电振子理论模型存在一个稳定的极限环, 即存在一个周期振荡解. 王雯等 [11], 李晓静 [7] 都曾利用 Mawhin 重合度拓展定理得到厄尔尼诺, ENSO 时滞海 - 气振子模型以及 ENSO 充电 - 放电振子模型的周期解也从另一方面证明了我们所得到的结论是正确的.

3 结 论

通过数学变换将一类 ENSO 充电 - 放电振子理论模型转换成 van der Pol 方程. 由 van der Pol 方程的定性分析, 我们严格地证明了该 ENSO 充电 - 放电振荡子模型存在一个稳定的极限环, 即存在一个周期振荡解.

[1] Feng G L, Dong W J 2005 *Acta. Meteo. Sin.* **63** 864 (in Chinese) [封国林, 董文杰 2005 气象学报 **63** 864]
[2] Jin F F 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 811
[3] Jin F F 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 830
[4] Wang B, Feng Z 1999 *J. Atmos. Sci.* **56** 5
[5] Wang C Z 2001 *Adv. Atmos. Sci.* **18** 674
[6] Zhou X C, Yao J S, Mo J Q 2012 *Chin. Phys.* B **21** 030201
[7] Li X J 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030201
[8] Cao X Q, Song J Q, Zhang W M, Zhao J, Zhu X Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 030203 (in Chinese) [曹小群, 宋君强, 张卫民, 赵军, 朱小谦 2012 物理学报 **61** 030203]
[9] Xie F, Lin Y H, Lin W T, Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010201 (in Chinese) [谢峰, 林一骅, 林万涛, 莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 010201]
[10] Liu S K, Liu S D 2012 *Nonlinear equations in Physics* (Peking University Press, Beijing) (in Chinese) [刘式适, 刘式达 2012 物理学中的非线性方程 (北京: 北京大学出版社)]
[11] Wang W, Xu Y, Lu S P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030205 (in Chinese) [王雯, 徐燕, 鲁世平 2011 物理学报 **60** 030205]

On the recharge-discharge oscillator model for El Niño-Southern Oscillation (ENSO)*

Zhao Qiang† Liu Shi-Kuo Liu Shi-Da

(*School of Physics, Peking University, Beijing* 100871, *China*)

(Received 8 May 2012; revised manuscript received 30 May 2012)

Abstract

A kind of recharge-discharge oscillator model for the El Niño-Southern Oscillation (ENSO) is considered. By transforming the ENSO model into the van der Pol equation and analyzing its properties qualitatively, we proved that the ENSO recharge-discharge oscillator model possesses a stable limit cycle.

Keywords: ENSO model, van der Pol equation, limit cycle

PACS: 02.30.Hq

* Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40975028).

† E-mail: zhqing@pku.edu.cn