

厄尔尼诺 - 南方涛动时滞海气振子耦合模型的分岔分析*

徐昌进[†]

(贵州省经济系统仿真重点实验室, 贵州财经大学, 贵阳 550004)

(2012年5月19日收到; 2012年6月2日收到修改稿)

本文研究了一类具有时滞的厄尔尼诺 - 南方涛动模型, 得到了该模型在平衡点稳定的充分条件. 通过选择时滞 η 为分岔参数, 得到了当时滞 η 通过一系列的临界值时, Hopf 分岔产生, 然后, 应用中心流形和规范型理论, 得到了确定 Hopf 分岔特性 (例如 Hopf 分岔方向和分岔周期解的稳定性以及 Hopf 分岔周期解的周期等) 的计算公式. 最后进行数值模拟验证了所得结果的正确性.

关键词: 时滞, 厄尔尼诺 - 南方涛动模型, Hopf 分岔, 稳定性

PACS: 02.30.Sa

1 引言

厄尔尼诺 - 南方涛动 (ENSO) 是发生在赤道太平洋的大气和海洋运动相互作用的自然现象. 它是目前全球气候系统年际变化中最强的信号之一. 它的发生严重地影响全球各地区气候和生态等方面的变化. 因此, ENSO 现象已经成为当前学术界关注的焦点 [1-8]. 文献 [9] 研究了一类厄尔尼诺时滞海 - 气振子摄动解, 文献 [10] 研究海 - 气振荡子中的极限环解, 文献 [11] 讨论了 ENSO 非线性模型的摄动解, 文献 [12] 分析了厄尔尼诺 - 南方涛动时滞海 - 气振子耦合模型的解的渐近展开式. 文献 [13] 运用同伦映射方法给出了一个厄尔尼诺 - 南方涛动 (ENSO) 的时滞振子的模型的近似解. 2001 年, 王雯等 [14] 研究了下列赤道太平洋的非线性时滞模型:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= a\tau_1 - b_1\tau_1(t - \eta) - \varepsilon T^3, \\ \frac{d\tau_1}{dt} &= dT - R_{\tau_1}\tau_1, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 T 为区域 Niño-3 的 SST 异常, τ_1 为在区域 Niño-4 的信风强度异常, η 为西太平洋转到东太平洋信风传播波的时间, a 为关于 T 的正反馈系数, b_1 为由于在西海岸反射波的负反馈系数, d 为联系到 Niño-3 区域的 SST 异常到 Niño-4 区域的信风强度异常的系数, R_{τ_1} 为信风衰减系数, ε 为 SST 的立方衰减系数, 这里 ε 为正的小参数. a, b_1, d, R_{τ_1} 均为正常数.

考虑到实际现象模型 (1) 中的各系数一般与随着时间发生变化, 文献 [1] 研究了下列厄尔尼诺 - 南方涛动时滞海气振子模型:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= a(t)\tau_1 - b_1(t)\tau_1(t - \eta) - \varepsilon T^3, \\ \frac{d\tau_1}{dt} &= d(t)T - R_{\tau_1}(t)\tau_1 \end{aligned} \quad (2)$$

的周期解问题, 其中 $a(t), b_1(t), d(t)$ 和 R_{τ_1} 均为连续的 ω 周期函数. 运用重合度理论, 文献 [1] 得到了系统 (2) 存在周期解存在的充分条件.

我们知道时滞对系统动力学行为有着重要的影响, 本文将选择时滞 η 为参数对 (1) 进行 Hopf 分

* 国家自然科学基金 (批准号: 11261010)、贵州省省长基金 (2012)、贵州省软科学研究项目 (批准号: 黔科合体 R 字 [2011]LKC2030 号)、贵州省科学技术基金 (批准号: 黔科合 J 字 [2012]2100 号) 和贵州财经大学博士科研启动项目 (2010) 资助的课题.

[†] E-mail: xcj403@126.com

岔分析,得到了系统(1)的平凡解稳定的条件, Hopf 分岔产生的条件及确定 Hopf 分岔方向和分岔周期解的稳定性的计算公式.

2 平衡点的稳定性和 Hopf 分岔的存在性

如果下列条件:

$$(H) a < b_1$$

成立,则系统(1)有唯一的平衡点 $E(0,0)$. 系统(1)的线性化方程为

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= a\tau_1 - b_1\tau_1(t - \eta), \\ \frac{d\tau_1}{dt} &= dT - R_{\tau_1}\tau_1. \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式的特征方程为

$$\lambda^2 + R_{\tau_1}\lambda - ad + b_1de^{-\lambda\eta} = 0. \quad (4)$$

引理 1 假设条件(H)成立,则(4)式当 $\eta = \eta_k$ 时有唯一一对简单纯虚根 $\pm i\omega_0$, 其中,

$$\begin{aligned} \eta_k &= \frac{1}{\omega_0} \left[\arccos \frac{\omega_0^2 + ad}{b_1d} + 2k\pi \right], \\ (k &= 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-(2ad + R_{\tau_1}^2) + \sqrt{\Delta} \right]^{1/2}, \quad (6)$$

$$\Delta = ((2ad + R_{\tau_1}^2))^2 - 4[(ad)^2 - (b_1d)^2]. \quad (7)$$

证明 若 $\lambda = i\omega$ ($\omega > 0$) 是(4)的根,则当且仅当 ω 满足

$$\begin{aligned} b_1d \cos \omega\eta &= \omega^2 + ad, \\ b_1d \sin \omega\eta &= R_{\tau_1}\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

两式平方相加得

$$(\omega^2 + ad)^2 + (R_{\tau_1}\omega)^2 = (b_1d)^2, \quad (9)$$

$$\omega^4 + (2ad + R_{\tau_1}^2)\omega^2 + (ad)^2 - (b_1d)^2 = 0. \quad (10)$$

于是由(10)式知该方程有正根

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-(2ad + R_{\tau_1}^2) + \sqrt{\Delta} \right]^{1/2},$$

其中 Δ 由(7)式定义,由 ω_0 是(10)式的根(也就是(9)式的根),从而有

$$\frac{(\omega^2 + ad)^2 + (R_{\tau_1}\omega)^2}{(b_1d)^2} = 1.$$

因此

$$\frac{(\omega^2 + ad)^2}{(b_1d)^2} \leq 1.$$

于是

$$-1 \leq \frac{\omega^2 + ad}{b_1d} \leq 1. \quad (11)$$

令

$$\eta_k = \frac{1}{\omega_0} \left[\arccos \frac{\omega_0^2 + ad}{b_1d} + 2k\pi \right], (k = 0, 1, 2, \dots).$$

由(11)式知 η_k 有定义,于是 (η_k, ω_0) 是(8)式的解,故 $\lambda = \pm i\omega_0$ 是(4)式当 $\eta = \eta_k$ 时的纯虚根,唯一性显然. 令

$$K(\lambda, \eta) = \lambda^2 + R_{\tau_1}\lambda - ad + b_1de^{-\lambda\eta}.$$

若 $\lambda = i\omega_0$, 不是(4)当 $\eta = \eta_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时的单根,则有

$$\left. \frac{dK}{d\lambda} \right|_{\lambda=i\omega_0}^{\eta=\eta_k} = [2\lambda + R_{\tau_1} - b_1de^{-\lambda\eta}] \Big|_{\lambda=i\omega_0}^{\eta=\eta_k} = 0. \quad (12)$$

联立(4)式与(12)式有

$$b_1de^{-i\omega_0\eta_k} = \omega_0^2 - R_{\tau_1}\omega_0i + ad, \quad (13)$$

$$b_1de^{-i\omega_0\eta_k}\eta_k = -2i\omega_0 + R_{\tau_1}.$$

两式相除得

$$\eta_k = -\frac{2i\omega_0 - R_{\tau_1}}{\omega_0^2 - R_{\tau_1}\omega_0i + ad}.$$

从而有

$$(\omega_0^2 + ad)\eta_k = R_{\tau_1},$$

也就是

$$\eta_k = \frac{R_{\tau_1}}{\omega_0^2 + ad}. \quad (14)$$

与(5)式矛盾. 故 $\lambda = \pm i\omega_0$ 是(4)式当 $\eta = \eta_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时的单根. 证毕.

记 $\lambda(\eta) = \alpha(\eta) + i\omega(\eta)$ 为(4)式的满足 $\alpha(\eta_k) = 0, \omega(\eta_k) = \omega_0$ 的根,其中 η_k 由(5)式定义.

引理 2 假设(H)成立,则 $\left. \frac{d\alpha(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_k} > 0$.

证明 把 $\lambda(\eta)$ 代入(4)式,两端对 η 求导,整理得

$$\left[\frac{d\lambda(\eta)}{d\eta} \right]^{-1} = \frac{2\lambda + R_{\tau_1}}{b_1d\lambda e^{-\lambda\eta}} - \frac{\eta}{\lambda}. \quad (15)$$

把 $\eta = \eta_k$ 代入(15)式并根据(8)式得

$$\left[\frac{d\alpha(\eta)}{d\eta} \right]^{-1} = \frac{R_{\tau_1} \sin \omega_0\eta_k + 2\omega_0 \cos \omega_0\eta_k}{b_1d\omega_0}$$

$$= \frac{R_{\tau_1}^2 + 2(\omega_0^2 + ad)}{b_1 d} > 0 \quad (16)$$

证毕.

引理 3 对方程 (4), 假设 (H) 成立, 当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 其所有根具有严格负实部, 当 $\eta = \eta_0$ 时, (4) 式除 $\pm i\omega_0$ 外的其他根都具有严格负实部, 当 $\eta \in (\eta_k, \eta_{k+1}]$ 时, (4) 式有 $2(k+1)$ 个具有严格正实部的根, ($k = 0, 1, 2, \dots$), 其中, η_k 由 (5) 式定义.

证明 注意到在条件 (H) 下, 当 $\eta = 0$, (4) 式的根都具有严格的负实部, 再应用 [15] 中的引理及上述引理 1 和引理 2, 即得该引理的证明. 证毕.

应用引理 1 和引理 2, 引理 3 和 Hale^[16] 的第 11 章的定理 1.1 可得

定理 1 假设 (H) 成立, 对系统 (1) 有如下结论: (i) $\eta \in [0, \eta_0)$, 其零解是渐近稳定的; (ii) $\eta > \eta_0$, 其零解是不稳定的; (iii) $\eta = \eta_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 是 Hopf 分岔值, 其中 η_k 由 (5) 式定义.

3 Hopf 分岔方向及稳定性

本节我们利用中心流形理论和和规范型方法 [2] 给出系统 (1) 的 Hopf 分岔方向, 分岔周期解的稳定性等计算公式.

为方便, 令 $t = s\eta$, $T(s\eta) = x_1(s)$, $\tau_1(s\eta) = x_2(s)$, $\eta = \eta_k + \mu$, $\mu \in R$, η_k 由 (5) 式定义, 且仍记 $t = s$, 则系统 (1) 等价于系统

$$\frac{dT}{dt} = (\eta_k + \mu)[a\tau_1 - b_1\tau_1(t-1) - \varepsilon T^3], \quad (17)$$

$$\frac{d\tau_1}{dt} = (\eta_k + \mu)[dT - R_{\tau_1}\tau_1],$$

(17) 式的线性部分为

$$\frac{dT}{dt} = (\eta_k + \mu)[a\tau_1 - b_1\tau_1(t-1)], \quad (18)$$

$$\frac{d\tau_1}{dt} = (\eta_k + \mu)[dT - R_{\tau_1}\tau_1].$$

(17) 式的右端的非线性部分为

$$h = (\eta_k + \mu) \begin{pmatrix} -\varepsilon T^3(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

对 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \in C([-1, 0], R^2)$, 记

$$L_\mu \varphi = B\varphi(0) + C\varphi(-1),$$

$$h(\mu, \varphi) = (\eta_k + \mu) \begin{pmatrix} -\varepsilon \varphi_1^3(0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

这里

$$B = (\eta_k + \mu) \begin{pmatrix} 0 & a \\ d - R_{\tau_1} & \end{pmatrix},$$

$$C = (\eta_k + \mu) \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, 由 Riesz 表示定理, 存在分量为有界变差函数的二阶矩阵 $\eta(\theta, \mu) : [-1, 0] \rightarrow R^2$. 使对任意的 $\varphi \in C([-1, 0], R^2)$ 有

$$L_\mu \varphi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\varphi(\theta).$$

事实上, 只要取

$$\eta(\theta, \mu) = \begin{cases} -C, & \theta = -1, \\ 0, & -1 < \theta < 0, \\ B, & \theta = 0 \end{cases}$$

即可. 对 $\varphi \in C([-1, 0], R^2)$, 定义

$$A(\mu)\varphi = \begin{cases} \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}, & -1 \leq \theta < 0, \\ \int_{-1}^0 d\eta(s, \mu)\varphi(s), & \theta = 0, \end{cases}$$

$$R\varphi = \begin{cases} 0, & -1 \leq \theta < 0, \\ h(\mu, \varphi), & \theta = 0. \end{cases}$$

于是 (17) 式可写成如下形式:

$$\dot{x}_t = A(\mu)x_t + R x_t. \quad (20)$$

其中 $x = (x_1, x_2)^T$. 对 $\alpha \in C([0, 1], (R^2)^*)$, 定义

$$A^*\alpha(s) = \begin{cases} -\frac{d\alpha(s)}{ds}, & s \in (0, 1], \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(t, 0)\varphi(-t), & s = 0. \end{cases}$$

对 $\varphi \in C([-1, 0], R^2)$ 和 $\psi \in C([0, 1], (R^2)^*)$, 定义双线性积

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \bar{\psi}(0)\varphi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \psi^T(\xi - \theta) d\eta(\theta)\varphi(\xi) d\xi.$$

这里 $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$, 则算子 $A = A(0)$ 与 A^* 是共轭算子.

由第 2 节的讨论及变换 $t = s\eta$ 可知, $\pm i\omega_0\eta_k$ 是算子 $A = A(0)$ 的特征值, 且 A 的其它的特征值都具有严格负实部, 从而, $\pm i\omega_0\eta_k$ 也是算子 A^* 的特征值, 于是有

引理 4 $q(\theta) = (1, \alpha)^T e^{i\omega_0\eta_k\theta}$ 是算子 $A(0)$ 关于 $\omega_0\eta_k i$ 的特征向量, $q^*(s) = D(1, \beta)^T e^{i\omega_0\eta_k s}$ 是

算子 A^* 关于 $-\omega_0\eta_k i$ 的特征向量并且 $\langle q^*, q \rangle = 1$, $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$, 其中

$$\alpha = \frac{i\omega_0}{a - b_1 e^{-i\omega_0\eta_k}},$$

$$\beta = \frac{i\omega_0}{d},$$

$$D = \frac{1}{1 + \bar{\alpha}\beta - \eta_k b_1 \bar{\alpha} e^{i\omega_0\eta_k}}.$$

上述引理的证明直接计算即可, 故我们省略. 令 $z(t) = \langle q^*, x_t \rangle$, 其中 x_t 是方程 (20) 当 $\mu = 0$ 时的解, 则由文献 [2] 有

$$\frac{dz(t)}{dt} = i\eta_k\omega_0 z(t) + \bar{q}^*(0)\bar{f}(z, \bar{z}), \quad (21)$$

其中 $\bar{f}(z, \bar{z}) = h(0, W(z, \bar{z}) + 2\text{Re}\{zq\})$, $W(z, \bar{z}) = x_t - 2\text{Re}\{zq\}$. 而

$$W(z, \bar{z}) = W_{20} \frac{z^2}{2} + W_{11}z\bar{z} + W_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (22)$$

再把 (21) 式改写为

$$\frac{dz(t)}{dt} = i\tau_k\omega_0 z(t) + g(z, \bar{z}),$$

其中

$$g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (23)$$

又

$$W' = x_t' + z'q - \bar{z}'\bar{q}. \quad (24)$$

将 (20), (21) 式代入 (24) 式得

$$W' = \begin{cases} AW - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0)\bar{f}q(\theta)\}, & -1 \leq \theta < 0, \\ AW - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0)\bar{f}q(\theta)\} + \bar{f}, & \theta = 0, \end{cases}$$

$$\bar{f}(z, \bar{z}) = \eta_k \begin{pmatrix} -\varepsilon(z + \bar{z} + W_{20}^{(1)}(0)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0)z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3))^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

另一方面,

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)\bar{f}(z, \bar{z}) = \bar{D}\eta_k\varepsilon \left[\left(z + \bar{z} + W_{20}^{(1)}(0)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0)z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3) \right)^3 \right]. \quad (29)$$

比较 (23), (29) 式并注意到 (22) 式有

$$g_{20} = g_{11} = g_{02}, g_{21} = 2\bar{D}\eta_k\varepsilon.$$

于是我们可以计算如下数值:

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0\eta_k} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2} = \bar{D}\eta_k\varepsilon,$$

$$\mu_2 = -\frac{\text{Re}\{c_1(0)\}}{\text{Re}\{\lambda'(\eta_k)\}},$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} AW + H(z, \bar{z}, \theta), \quad (25)$$

其中

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20} \frac{z^2}{2} + H_{11}z\bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (26)$$

且

$$W' = W_z z' + W_{\bar{z}} \bar{z}' = AW + H(z, \bar{z}, \theta).$$

将上述相应的级数展式代入, 比较系数得

$$(AW - 2i\eta_k\omega_0)W_{20} = -H_{20}(\theta), \quad (27)$$

$$AW_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta). \quad (28)$$

注意到

$$\begin{aligned} x_t(\theta) &= (x_{1t}(\theta), x_{2t}(\theta)) \\ &= W(z, \bar{z}, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta) \\ &= \begin{pmatrix} W^{(1)}(z, \bar{z}, \theta) \\ W^{(2)}(z, \bar{z}, \theta) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{i\eta_0\omega_0\theta} \\ &\quad + \bar{z} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\alpha} \end{pmatrix} e^{-i\eta_0\omega_0\theta}, \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} x_{1t}(0) &= z + \bar{z} + W_{20}^{(1)}(0)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0)z\bar{z} \\ &\quad + W_{02}^{(1)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + O(|(z, \bar{z})|^3). \end{aligned}$$

由 $\bar{f} = h$ 和 h 的定义, 有

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 2\text{Re}(c_1(0)), \\ T_2 &= -\frac{\text{Im}\{c_1(0)\} + \mu_2\text{Im}\{\lambda'(\eta_k)\}}{\omega_0\eta_k}. \end{aligned} \quad (30)$$

定理 2 在假设 (H) 的条件下, $\mu = 0$ 是系统 (1) 的 Hopf 分岔值. 分岔方向由 μ 确定, 如果 $\mu > 0$ ($\mu < 0$), 则系统 (1) 有超临界分岔 (次临界分岔); 分岔周期解稳定性由 β_2 确定, 如果 $\beta_2 > 0$ ($\beta_2 < 0$), 分岔周期解是稳定的 (不稳定的); 分岔周

期解的周期由 T_2 确定, 如果 $T_2 > 0$ ($T_2 < 0$), 分岔周期解的周期是增加的 (减小的).

4 数值模拟

在这一节, 我们取不同的时滞 η 对系统 (1) 进行数值模拟, 我们考虑下列系统:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= 0.5\tau_1 - 0.9\tau_1(t - \eta) - 0.6T^3, \\ \frac{d\tau_1}{dt} &= 0.6T - 0.8\tau_1, \end{aligned} \tag{31}$$

显然, 系统 (31) 有唯一平衡点 $E(0, 0)$ 并且满足定理 1 的条件, 经计算得 $\omega_0 = 0.89458$, $\eta_0 = 1.55$, $\lambda'(\eta_0) = 0.48954 - 0.43233i$, 从而, $c_1(0) = -16.2754 - 32.5538i$, $\mu_2 = 22.4508 > 0$, $\beta_2 = -17.4869 < 0$, $T_2 = 27.5301 > 0$. 故得到当 $\eta < \eta_0 = 1.55$ 时, 正平衡点 $E(0, 0)$ 是渐近稳定的, 当 τ 通过临界值 $\tau_0 = 1.55$ 时, 正平衡点 $E(0, 0)$ 失去稳定性, Hopf 分岔产生, 由 $\mu_2 > 0$, $\beta_2 < 0$ 知 Hopf 分岔为超临界的, 分岔方向为 $\eta > \eta_0$ 且从 $E(0, 0)$ 附近产生的 Hopf 分岔周期解是稳定的, 其数值模拟见图 1 和图 2.

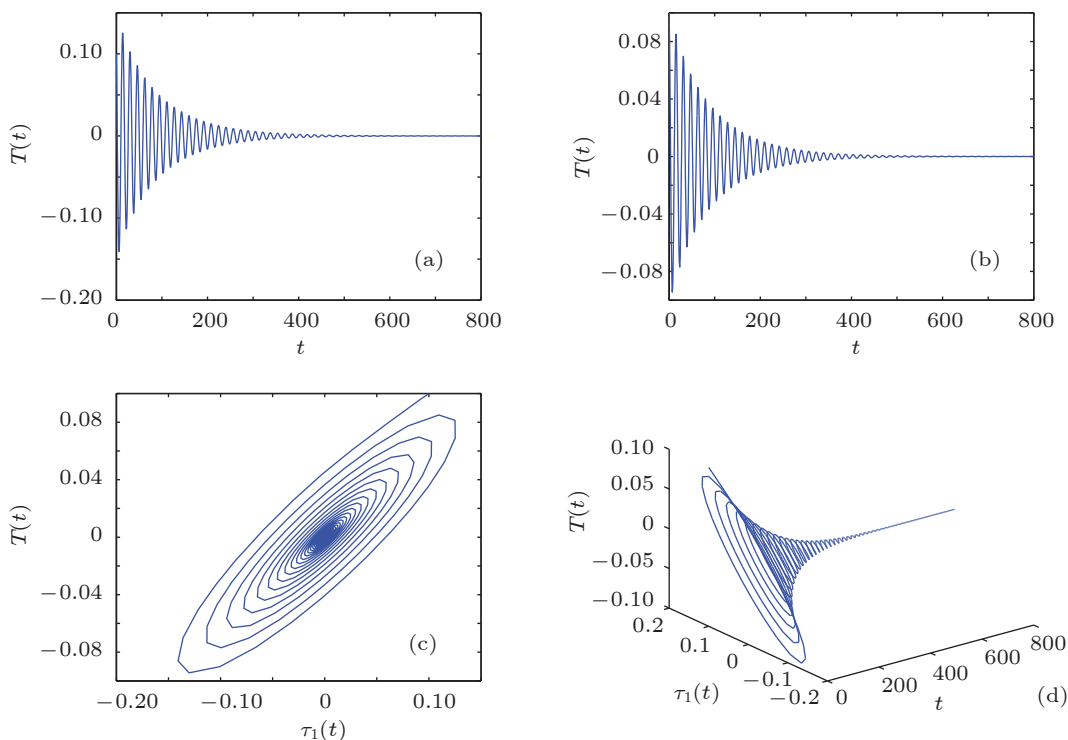


图 1 当 $\eta = 1.5 < \eta_0 \approx 1.55$ 时, 系统 (31) 的波形图和相图, 平衡点是渐近稳定的, 初值为 $(0.1, 0.1)$

5 结论

本文研究了一类厄尔尼诺 - 南方涛动时滞海气振子耦合模型的 Hopf 分岔特性. 通过选择时滞为分岔参数, 得到了系统产生 Hopf 分岔的时滞临界值的表达式. 当时滞超过某一临界值时, 系统失稳且在平衡点附近产生一簇周期解. 运用中心流形和规范型理论得到了确定 Hopf 分岔方向和 Hopf 分岔周期解的稳定性的具体计算公式. 最后, 运

用 MATLAB 软件进行数值模拟验证了所得理论分析结果的正确性. 结果表明: 西太平洋转到东太平洋信风传播波的时间对系统的动力学行为有重要影响, 可以导致系统产生周期震荡. 我们可以通过调节西太平洋转到东太平洋信风传播波的时间来对系统进行控制. 另外, 当西太平洋转到东太平洋信风传播波的时间继续增大是系统可能表现出更复杂的动力学行为, 如混沌的出现, 其相应的现象和机理将有待今后继续研究.

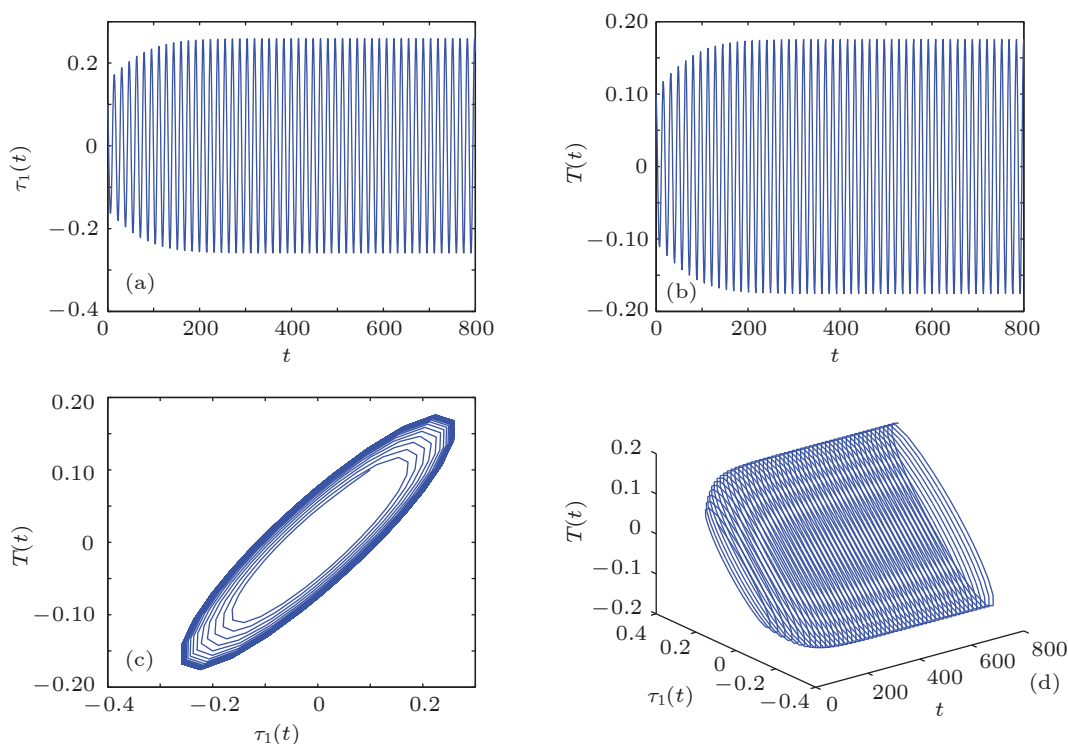


图2 当 $\eta = 1.65 > \eta_0 \approx 1.55$ 时, 系统 (31) 的波形图和相图, 平衡点处 Hopf 分岔产生, 初值为 (0.1, 0.1)

- [1] Wang C Z 2001 *J. Climate* **14** 98
- [2] Hassard B, Kazarinoff N, Wan Y H 1981 *Theory and Application of Hopf Bifurcation* (Cambridge University Press)
- [3] Lin W T, Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875
- [4] Biondi F, Gershunov A, Cayan D R 2001 *J. Climate* **14** 5
- [5] Kushnir Y, Robinson W A 2002 *J. Climate* **15** 2233
- [6] Chao J P 1993 *ENSO Dynamics* (Beijing: China Meteorological Press) pp300–309 (in Chinese) [巢纪平 1993 厄尔尼诺和南方涛动动力学 (北京: 气象出版社) 第 300—309 页]
- [7] Graham N E and White W B 1990 *J. Phys. Res.* **96** 3125
- [8] Lin W T, Mo J Q 2004 *Chinese Science Bulletin* **48** 115
- [9] Zhu M, Liu W T, Lin Y H, Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 339 (in Chinese) [朱敏, 林万涛, 林一华, 莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 339]
- [10] Feng G L, Dong W J, Jia X J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林, 董文杰, 贾小静 2002 物理学报 **51** 1181]
- [11] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛 2004 物理学报 **53** 996]
- [12] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3229 (in Chinese) [莫嘉琪, 王辉, 林万涛 2006 物理学报 **55** 3229]
- [13] Neelin J D, Battisti D S, Hirst A C 1998 *J. Geophys. Res.* **103** 262
- [14] Wang C Z 2011 *J. Climate* **60** 0205 (in Chinese) [王雯, 徐燕, 鲁世平 2011 物理学报 **14** 989]
- [15] Cooke K, Grossman Z 1982 *J. Math. Anal. Appl.* **86** 592
- [16] Hale J, Lunel S V 1993 *Introduction to Functional Differential Equations* (New York: Springer-Verlag)

Bifurcation analysis for a delayed sea-air oscillator coupling model for the ENSO*

Xu Chang-Jin[†]

(Guizhou Key Laboratory of Economics System Simulation, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550004, China)

(Received 19 May 2012; revised manuscript received 2 June 2012)

Abstract

In this paper, a delayed sea-air oscillator coupling model for the ENSO is investigated. We obtain the sufficient condition of stability in equilibrium. By choosing delay η as a bifurcation parameter, we show that Hopf bifurcation can occur when delay η passes through a sequence of critical values. Meanwhile, based on the center manifold theory and the normal form approach, we derive the formula for determining the properties of Hopf bifurcating periodic orbit, such as the direction of Hopf bifurcation, the stability of Hopf bifurcating periodic solution and the period of Hopf bifurcating periodic solution. Finally, numerical simulations are carried out to illustrate the analytical results.

Keywords: delay, sea-air oscillator coupling model, Hopf bifurcation, stability

PACS: 02.30.Sa

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11261010), the Soft Science and Technology Program of Guizhou Province (Grant No. 2011LKC2030), the Natural Science and Technology Foundation of Guizhou Province (Grant No. J[2012]2100), the Governor Foundation of Guizhou Province (2012), and the Doctoral Foundation of Guizhou University of Finance and Economics (2010).

[†] E-mail: xcj403@126.com