

## 基于四能级原子系统模型增益媒质激光原理研究\*

孙兵兵<sup>1)</sup> 吴博<sup>1)</sup> 王辉<sup>1)</sup> 黄志祥<sup>1)†</sup> 吴先良<sup>1)2)‡</sup>

1) (安徽大学电子信息工程学院智能计算与信号处理重点实验室, 合肥 230039)

2) (合肥师范学院物理电子系, 合肥 230061)

(2012年3月30日收到; 2012年6月17日收到修改稿)

作为超材料研究中的重点, 增益媒质因其放大特性而表现出良好的应用前景. 本文基于四能级原子结构系统模型, 引入一种全新的抽运机理: 高斯抽运. 用时域有限差分方法对增益媒质激光产生原理进行模拟计算. 数值模拟结果表明, 该模型和新抽运机理的频谱特性、阈值特性以及动态演化过程和理论分析一致. 研究结果可为计算更复杂超材料系统提供参考.

**关键词:** 四能级原子系统, 时域有限差分, 增益媒质, 激光

**PACS:** 02.60.Cb, 42.55.-f, 42.70.-a

## 1 引言

对于激光物理的研究, 早在 1960 年就已经开始<sup>[1-3]</sup>. 随着理论和应用的不断发展, 现如今已成为一门独立的学科. 在 1917 年, 爱因斯坦<sup>[4]</sup> 假定了受激辐射的过程, 奠定了激光物理学发展的基石. 1964 年, Lamb<sup>[5]</sup> 基于电磁场理论和增益媒质的量子力学理论描述了一种多模激光谐振器, Lamb 的理论有助于理解诸如模式竞争和动态过程等激光系统的细节行为, 因此作为一种半经典理论沿用至今. 半经典理论将电磁场视为与量子化原子系统相互作用的经典辐射<sup>[6]</sup>. 电磁场在物质中作用推导出偶极子矩, 也即是极化矢量  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}$  由提供增益机理的原子系统获得, 再作用于经典的 Maxwell 方程获得增益媒质的响应. 半经典理论对于描述媒质的增益机理已完全足够.

新兴的超材料领域在近些年来有极其可观的实验进展, 然而大量级的损耗是横亘在可以想见的应用面前的一个难题. 一般采用两种方法能将损耗降至一定程度, 一种方法是通过超材料系统几何

形状的裁剪, 使结构呈现出来的电特性逐渐由电感性增加至电容性, 同时避免在超材料中出现边角形状. 另一种降低损耗的原理是通过强耦合其他材料使得负折射率的实部远离虚部最大值, 换言之也就是靠近共振频率, 方法是将增益媒质融合进超材料设计中. 通过后期优化几何形状来降低损耗显然不是我们的研究范围. 因此增益媒质的融合问题就变得自然而然. 实验方面的成果已展示了将增益媒质融合进超材料高局域场区域生成一种极低损耗和活性光负指数超材料<sup>[7]</sup>. 理论方面的研究也颇为丰硕, 现有的几种模型如包含增益媒质的渔网超材料结构和以增益层为基底的 SRR 阵列在时域和频域均已被全面分析<sup>[8-13]</sup>. 通过光响应分析, 我们可以发现完全的损耗补偿效应甚至放大作用.

为了将增益引入到媒质中, 有关学者曾经采用引入负电导率的方法<sup>[14,15]</sup>, 但这种方法不可做自洽模拟. 对大信号下的光学特性和细节问题不能准确反映. 因此具有四能级原子结构的增益媒质模型不仅细致而且精确<sup>[16]</sup>.

本文在上述理论模型的基础上, 运用时域有限差分 (FDTD) 数值算法求解相互耦合的 Maxwell 方

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60931002, 61101064, 51277001)、安徽省杰出自然科学基金 (批准号: 1108085J01)、安徽省高校自然科学基金 (批准号: KJ2011A002, KJ2011A242) 和安徽大学 211 工程资助的课题.

† E-mail: zxhuang@ahu.edu.cn

‡ E-mail: xlwu@ahu.edu.cn

程、极化方程和增益媒质粒子数速率方程,同时引入一种全新的抽运机理:高斯抽运,与之前的光抽运和均匀抽运相比结果一致,证明了新的抽运机理的有效性.

## 2 理论及数值计算模型

### 2.1 理论模型

如图 1 所示是一个简化的四能级原子系统模型.模型中有四个能级:抽运高能级  $E_3$ ,激光上能级  $E_2$ ,激光下能级  $E_1$ ,基态能级  $E_0$ (抽运过程的低能级).各能级上单位体积的粒子数分别为  $N_3, N_2, N_1, N_0$ .场和粒子数各分量分布在增益媒质内的每一点,整个模型将包括增益媒质粒子数和场、外加抽运和非辐射衰减所引起的能量转换也全部考虑在内.

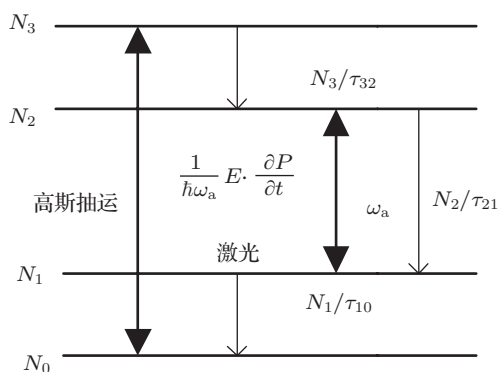


图 1 四能级原子系统模型

基态粒子数  $N_0$  相较于其他高能级上的粒子数而言很大,通常设定为一个恒定的足够大的常数.此处设定能级间隔足够大,因此热受激跃迁忽略不计.只有自发辐射和受激辐射两种情况考虑在内.粒子首先会被某种外加的抽运机理从基态能级输运到高能级.经过一个短时周期  $\tau_{32}$ ,粒子以无辐射的跃迁方式转移到激光上能级.从激光上能级至激光下能级粒子可以通过自发和受激辐射两种方式进行跃迁,该跃迁过程持续的时间为  $\tau_{21}$ .最后再经历  $\tau_{10}$  的时间粒子以非辐射方式快速回归至基态能级.

光抽运机理和均匀抽运机理的有效性已经得到了证实<sup>[17]</sup>.本文将要讨论一种新的抽运机理:高斯抽运.在这种抽运机理中,粒子被一种速率呈高斯分布的外加抽运从基态抽运至高能级.高斯抽运

函数的时域形式为

$$P_r(t) = P_{r0} e^{\left(\frac{-(t-t_{\text{pump}})^2}{\tau_{\text{pump}}^2}\right)}, \quad (1)$$

其中  $\tau_{\text{pump}}$  为常数,决定了高斯抽运速率的宽度.抽运速率峰值出现在  $t = t_{\text{pump}}$  时刻.  $P_{r0}$  为控制参数.

基于以上所述的近似,粒子数变化可以用下列的速率方程来构造:

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = P_{r0} \cdot e^{\left(\frac{-(t-t_{\text{pump}})^2}{\tau_{\text{pump}}^2}\right)} \cdot N_0 - \frac{N_3(t)}{\tau_{32}}, \quad (2a)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{N_3(t)}{\tau_{32}} + \frac{1}{\hbar\omega_a} E(t) \cdot \frac{dP(t)}{dt} - \frac{N_2(t)}{\tau_{21}}, \quad (2b)$$

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = \frac{N_2(t)}{\tau_{21}} - \frac{1}{\hbar\omega_a} E(t) \cdot \frac{dP(t)}{dt} - \frac{N_1(t)}{\tau_{10}}, \quad (2c)$$

$$\frac{dN_0(t)}{dt} = \frac{N_1(t)}{\tau_{10}} - P_{r0} \cdot e^{\left(\frac{-(t-t_{\text{pump}})^2}{\tau_{\text{pump}}^2}\right)} \cdot N_0. \quad (2d)$$

外加电磁波和介质的作用是通过包括介质的极化反应项在内的一套统一理论来完整考虑.也即是半经典理论中的 Maxwell-Bloch 方程<sup>[18]</sup>.此时, Maxwell 方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}(t)}{\partial t}, \quad (4)$$

(3), (4) 两式中各物理量意义与普通 Maxwell 方程中相同.仅引入附加极化强度项  $\mathbf{P}$ , 该附加项由激光上能级和激光下能级因原子跃迁而产生.极化强度项表现出谐振特性,同时与 Maxwell 方程中的电场  $\mathbf{E}$  项相耦合.增益和放大作用便由此项获得.电极化强度在描述真实的原子跃迁过程时用如下极化方程来表述:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \mathbf{P}(t)}{dt^2} + \Delta\omega_0 \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{P}(t) \\ & = -\frac{\gamma_r}{\gamma_c} \frac{e^2}{m} \Delta N(t) \mathbf{E}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\omega_0$  代表辐射激光的中心频率,  $\Delta\omega_0$  为原子跃迁全高半宽,  $\Delta N = N_2 - N_1$  为驱动极化强度振荡的激光上能级和激光下能级的粒子数差值.  $\gamma_r = \frac{1}{\tau_{21}}$  为激光上能级真实的衰减速率.  $\gamma_c = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi m \varepsilon_0 c^3}$  为经典速率.从 (5) 式可知增益原子的原子响应具有洛伦兹型.若  $\Delta N$  为一常数或者随时间缓慢变化的函数,通过傅里叶变换得到的

频域磁化系数已足够描述介质中的波传播, 电场强度对磁化系数无影响. 但在我们提出的模型中,  $\Delta N$  已变成因入射信号而随时间变化的量, 因此此处必须采用非线性方程进行描述. (1)—(4) 方程很难直接求解, 为此借助于时域数值方法做自洽模拟.

## 2.2 FDTD 算法构造

使用中心差分和时间空间交替迭代的 FDTD 算法对上述的 Maxwell 方程、极化方程和粒子数速率方程进行离散处理<sup>[19]</sup>. 以二维 TM 波为例, 一维情况可类推. 得如下的 Maxwell 离散方程:

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) = H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y} [E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)], \quad (6)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) = H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j)], \quad (7)$$

$$E_z^{n+1}(i+1, j) = E_z^n(i+1, j) + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left[ H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j\right) \right] - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left[ H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j - \frac{1}{2}\right) \right] - \frac{P_z^{n+1}(i, j) - P_z^n(i, j)}{\varepsilon}, \quad (8)$$

极化方程离散为

$$P_z^{n+1}(i+1, j) = \frac{2 - \omega_0^2 \Delta t^2}{1 + \Delta \omega_0 \Delta t / 2} P_z^n(i, j) - \frac{1 - \Delta \omega_0 \Delta t / 2}{1 + \Delta \omega_0 \Delta t / 2} P_z^{n-1}(i, j) + \frac{\gamma_r e^2}{\gamma_c m} \frac{\Delta t^2}{1 + \Delta \omega_0 \Delta t / 2} [N_1^n(i, j) - N_2^n(i, j)] E_z^n(i, j), \quad (9)$$

速率方程离散为

$$N_3^{n+1}(i, j) = \frac{2\tau_{32} - \Delta t}{2\tau_{32} + \Delta t} N_3^n(i, j) + P_{r0} \cdot e^{\left(\frac{-(t-t_{\text{pump}})^2}{\tau_{\text{pump}}^2}\right)} \frac{2\tau_{32}}{2\tau_{32} + \Delta t} N_0^n(i, j), \quad (10)$$

$$N_2^{n+1}(i, j) = \frac{2\tau_{21} - \Delta t}{2\tau_{21} + \Delta t} N_2^n(i, j) + \frac{\tau_{21} \Delta t}{\tau_{32}(2\tau_{21} - \Delta t)} [N_3^{n+1}(i, j) + N_3^n(i, j)] + \frac{\tau_{21}}{\hbar \omega_0 (2\tau_{21} + \Delta t)} [E_z^{n+1}(i, j) + E_z^n(i, j)] [P_z^{n+1}(i, j) - P_z^n(i, j)], \quad (11)$$

$$N_1^{n+1}(i, j) = \frac{2\tau_{10} - \Delta t}{2\tau_{10} + \Delta t} N_1^n(i, j) - \frac{\tau_{10} \Delta t}{\tau_{21}(2\tau_{10} + \Delta t)} [N_2^{n+1}(i, j) + N_2^n(i, j)] + \frac{\tau_{10}}{\hbar \omega_0 (2\tau_{10} + \Delta t)} [E_z^{n+1}(i, j) + E_z^n(i, j)] [P_z^{n+1}(i, j) - P_z^n(i, j)], \quad (12)$$

$$N_0^{n+1}(i, j) = \left( 1 - \Delta t P_{r0} e^{\left(\frac{-(t-t_{\text{pump}})^2}{\tau_{\text{pump}}^2}\right)} \right) N_0^n(i, j) + \frac{\Delta t}{2\tau_{10}} [N_1^{n+1}(i, j) + N_1^n(i, j)]. \quad (13)$$

## 3 实验分析

图 2 所示为验证激光产生机理以及高斯抽运机理是否正确的实验模型. 计算区域内有一增益媒质薄层, 四周为真空. 在该实验中我们用一高频探测正弦波持续照射增益媒质薄层, 薄层厚度为 200 nm, 设定正弦波频率为 250 THz, 记录下入射波和反射波场值, 通过傅里叶变换能检验出在中

心频率处是否有激光产生. 在计算区域的左边和右边, 采用完全匹配层 (PML) 作为吸收边界, 上下采用周期边界.

选择辐射中心频率  $\omega_0$  为  $2\pi \times 1.5 \times 10^{14}$  Hz, 原子跃迁线宽  $\Delta \omega_0$  为 4 THz, 参数  $\tau_{32}$ ,  $\tau_{21}$ ,  $\tau_{10}$  分别为  $5.5 \times 10^{-14}$  s,  $5.0 \times 10^{-10}$  s,  $5.5 \times 10^{-14}$  s. 最初时刻粒子总数  $N_0$  为  $6.0 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$ . 空间步长  $\Delta x = 1.0 \times 10^{-8}$  m, 时间步长  $\Delta t = 1.6667 \times 10^{-17}$  s. 总的仿真时间步数为  $1.2 \times 10^7$ , 选取  $t_{\text{pump}}$  为 100 ps,

宽度  $\tau_{\text{pump}}$  为 67 ps. 整个系统最初的状态为所有的粒子均处于基态能级, 电场分量、磁场分量和极化强度分量全部为零. 粒子被以高斯抽运的方式从基态能级抽运至高能级, 然后整个系统按照上述离散方程迭代. 首先根据 (9) 式, 能够得到  $n + 1$  时刻的极化强度, 然后根据 Maxwell 方程得到  $n + 1$  电场和磁场, 最后求解速率方程得到  $n + 1$  时刻各能级的电子数.

高频正弦波的入射功率不变, 首先将  $P_{r0}$  设定为一个较低值, 从图 3 第一行所示观察到无激光产生, 然后加大抽运速率强度, 系统开始产生激光, 在辐射频率 150 THz 附近出现了一个小的峰值. 继续加大抽运速率, 可以看到辐射频率处峰值变大. 图 3 第一列所示为激光上能级  $E_2$ , 激光下能级  $E_1$  之间粒子数差值随时间的变化函数. 我们对该函数进行

了归一化处理. 无激光产生时,  $N_2 - N_1$  整体增长, 减少趋势不明显, 这说明激光上能级  $E_2$ , 激光下能级  $E_1$  之间并无粒子跃迁. 而随着抽运速率的加大, 粒子数变化出现了强烈的振荡, 因而产生的激光幅值也随之增强. 图 3 第二列和第三列分别为在空气中某点记录的透射场值和相应的傅里叶变换.

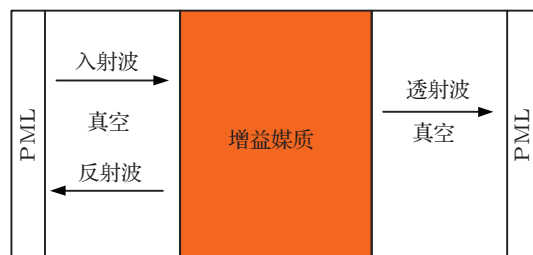


图 2 实验模型

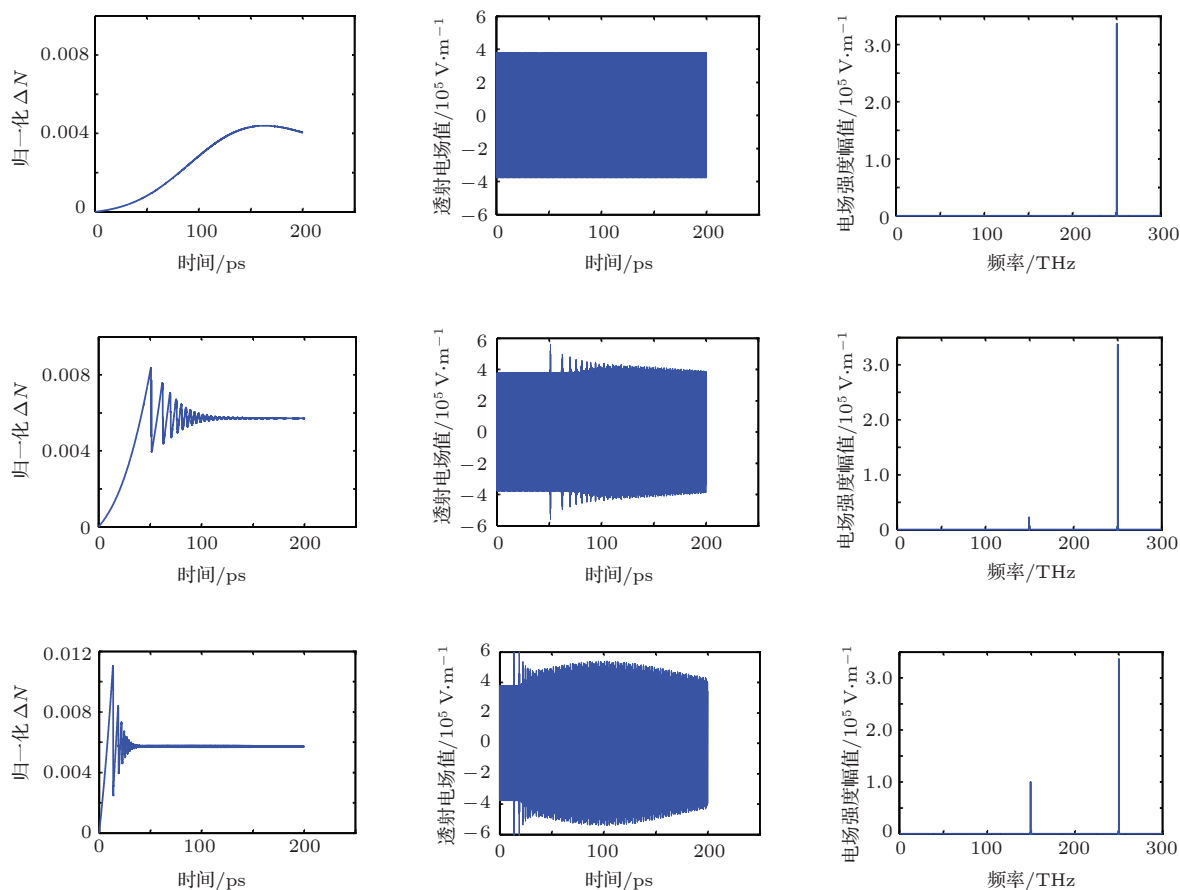


图 3 不同抽运速率时归一化  $\Delta N$  值、透射场值和对应的傅里叶变换

为了更加细致地展示本文所提出的高斯抽运方案的有效性, 我们将同样的模型在均匀抽运和光抽运情况下也做了多次试验, 最终得出的结果如图 4 所示.

图 4(a) 为均匀抽运和高斯抽运速率值与辐射激光强度关系图, 图 4(b) 为光抽运入射光功率与辐射激光强度关系图. 在光抽运实验中, 控制参数为入射功率; 均匀抽运和高斯抽运中的控制参数均为

抽运速率. 从所得关系图可以观察到, 光抽运、均匀抽运和高斯抽运所得结果基本一致. 因此有效性得以证明. 容易观察到同样实验条件下, 均匀抽运辐射出的激光幅值远远大于高斯抽运. 对于普通实验和理论分析而言这是一个优势. 然而对于后续研究中的抽运 - 探测实验, 高斯抽运的意义已远非均匀和光抽运可比拟. 高斯抽运机理的引入使得抽运 - 探测实验在理论分析方面变得可行且易于操作. 因为这种抽运方案可以将抽运脉冲和探测脉冲完全分离开来, 使得数据结果更加精确. 均匀抽运是完全不能应用于抽运 - 探测实验仿真中的, 光抽运由于其信号特性, 探测脉冲引入时会有噪声存在, 此种情况将使得自发辐射和受激辐射同时进行. 在进行理论分析时会导致所得结果不准确. 如果考虑噪声信号减弱之后再引入探测脉冲, 势必造成总的迭代时间过长, 对算法而言是得不偿失的.

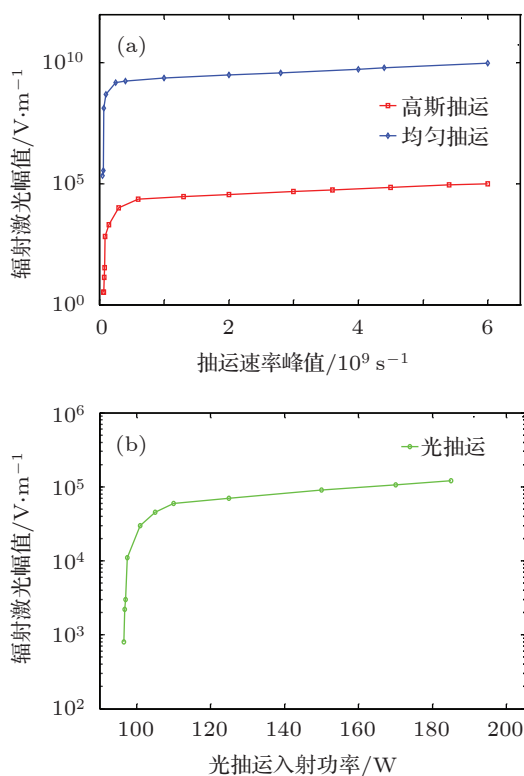


图 4 不同抽运方案时激光辐射强度 (a) 高斯抽运与均匀抽运; (b) 光抽运

由上图也可观察到高斯抽运方案下抽运速率峰值存在一个阈值 (本例约为  $8.0 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ ), 低于阈值的时候由于不能形成粒子数反转, 因而无激光现象产生. 在阈值附近, 激光幅值很小. 超过阈值是激光产生的必要条件.

针对不同的抽运速率, 我们对增益薄层中各点

激光上下能级粒子数差值  $N_2 - N_1$  在不同时刻做了记录.

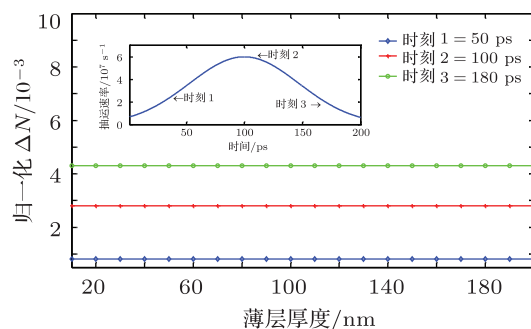


图 5 抽运速率低于阈值时增益薄层中各点归一化  $\Delta N$  值

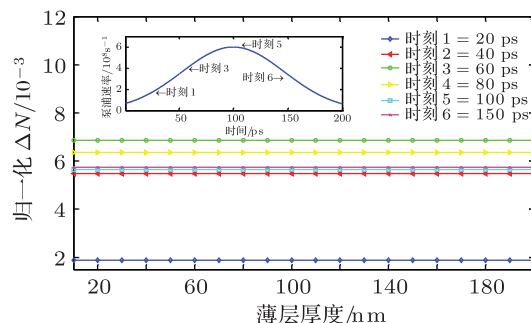


图 6 抽运速率处于阈值附近时增益薄层中各点归一化  $\Delta N$  值

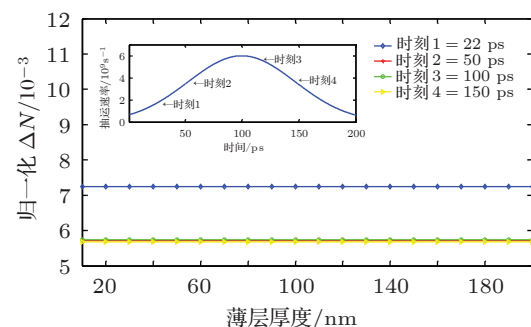


图 7 抽运速率高于阈值时增益薄层中各点归一化  $\Delta N$  值

图 5 所示为抽运速率在阈值之下的情况, 三个记录时刻分别为 50 ps, 100 ps 和 180 ps. 由图可见  $\Delta N$  一直处于增长状态, 粒子在激光上下能级并没有跃迁, 因而无激光现象出现. 该处与图 3 的频域结果完全一致. 图 6 所示为阈值附近的情况, 此处相较于图 5 多记录了三个时刻, 通过观察发现  $\Delta N$  处于振荡变化中, 粒子数的振荡变化意味着粒子在激光上下能级的跃迁, 因而出现了激光. 对于图 7,  $\Delta N$  的振荡情况与图 6 相似, 不同之处在于

振荡幅度更强且振荡变化时间更短. 由图还可以观察到增益薄层每点的粒子数变化基本上无差别, 整个增益媒质薄层变化是一致的. 对于后期记录时刻, 变化曲线重合在一起, 表明该模型处于稳态输出.

## 4 结论

将 FDTD 算法应用于增益媒质数值模型并引入一种全新的抽运机理仿真激光行为, 我们得到了

与理论分析完美契合的仿真结果. 能级之间粒子数跃迁受速率方程支配. 一旦抽运值超过阈值, 增益媒质能辐射出激光, 同时粒子数的动态变化在该模型下也得到成功展现. 与以往模型相比, 该模型将经典电动力学和量子力学体系融合在一起恰当解释了电磁波和粒子数之间的相互作用. 同时 FDTD 算法强大的通用性使得今后对复杂各向异性激光体甚至是随机系统的研究变得简单可行. 而对于瞬态非线性问题, 也可由本模型出发做进一步讨论.

- 
- [1] Siegman A E 1986 *Laser* (California: Mill Valley)
  - [2] Sargent III M, Scully M O, Lamb W E 1974 *Laser Physics* (Mass: Addison-Wesley Reading)
  - [3] Yariv A 1997 *Optical Electronics in Modern Communications* (New York: Oxford Univ Press)
  - [4] Einstein A 1917 *Phys. Z.* **18** 121
  - [5] Lamb W E 1964 *Phys. Rev. A* **134** 1429
  - [6] Marcuse D 1980 *Principles of Quantum Electronics* (New York: Academic Press)
  - [7] Xiao S M, Drachev V P, Kildishev A V, Ni X J, Chettiar U K, Yuan H K, Shalaev V M 2010 *Nature* **466** 735
  - [8] Fang A, Koschny T, Wegener M, Soukoulis C M 2009 *Phys. Rev. B* **78** 241104
  - [9] Sivan Y, Xiao S M, Chettiar U K, Kildishev A V, Shalaev V M 2010 *Optics Express* **17** 24060
  - [10] Fang A, Koschny T, Soukoulis C M 2010 *Phys. Rev. B* **82** 121102
  - [11] Wuestner S, Pusch A, Tsakmakidis K L, Hamm J M, Hess O 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 127401
  - [12] Fang A, Huang Z X, Koschny T, Soukoulis C M 2012 *Photonics and Nanostructures-Fundamentals and Applications* **10** 276
  - [13] Fang A, Huang Z X, Koschny T, Soukoulis C M 2012 *Optics Express* **19** 12688
  - [14] Hawkins R J, Kallman J S 1994 *Opt Quantum Electron* **26** 207
  - [15] Hagness S C, Joseph R M, Taflove A 1996 *Radio Sci* **31** 931
  - [16] Nagra A S, York R A 1998 *IEEE Transaction on Antennas and propagation* **46** 334
  - [17] Fang A, Koschny T, Soukoulis C M 2010 *Journal of Optics* **12** 024013
  - [18] Florescu L, Busch K, John S 2002 *Optical B* **19** 2215
  - [19] Taflove A 1995 *Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method* (Norwood, MA: Artech House)

# Analysis of lasing in gain medium based on four-energy level atomic model\*

Sun Bing-Bing<sup>1)</sup> Wu Bo<sup>1)</sup> Wang Hui<sup>1)</sup> Huang Zhi-Xiang<sup>1)†</sup> Wu Xian-Liang<sup>1)2)‡</sup>

1) (Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Anhui University, Hefei 230039, China)

2) (Department of Physics and Electronic Engineering Hefei Normal University, Hefei 230061, China)

(Received 30 March 2012; revised manuscript received 17 June 2012)

## Abstract

With the present interest in metamaterial, gain medium shows promise for complex system due to their amplification effect and wide potential application area. In this paper we present a model that simulates lasing in gain medium by using a model of four-energy level atomic system based on the finite-difference time-domain method. Meanwhile we propose a new pump mechanism, i.e., Gaussian Pump. It is found that results of the spectra, lasing threshold and population dynamics of the new pump mechanism are in good agreement with theoretical results. The results can also provide reference for calculating more complex metamaterial system.

**Keywords:** four-energy level, finite-difference time-domain, gain media, laser

**PACS:** 02.60.Cb, 42.55.-f, 42.70.-a

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60931002, 61101064, 51277001), the Distinguished Natural Science Foundation (Grant No. 1108085J01), the Universities Natural Science Foundation of Anhui Province (Grant Nos. KJ2011A002, KJ2011A242), and Financed by the 211 Project of Anhui University.

† E-mail: zxhuang@ahu.edu.cn

‡ E-mail: xlwu@ahu.edu.cn