

结构与参量不确定的网络与网络之间的混沌同步*

张檬 吕翎[†] 吕娜 范鑫

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2012年4月18日收到; 2012年5月28日收到修改稿)

进行了结构与参量不确定的网络与网络之间的混沌同步研究. 通过设计适当的控制输入, 不但实现了两个复杂网络之间的混沌同步, 而且网络节点状态方程中的未知参量和网络内部节点之间的耦合强度也被同时确定. 通过采用具有调制损耗的 CO₂ 激光器的状态方程进行仿真实验, 发现网络与网络之间的同步性能非常稳定.

关键词: 外同步, 复杂网络, 混沌, Lyapunov 定理

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

1 引言

混沌系统在复杂网络上的同步性能是网络动力学研究的主要内容, 近年来得到了国内外众多学者的普遍关注, 许多有价值的研究成果已被报道^[1-9]. 由于复杂网络的同步性能有着广泛的应用价值, 因此, 它逐步成为复杂网络理论研究的一个重要分支. 迄今为止, 关于网络同步的报道主要集中在网络内部各个节点之间的混沌同步研究, 其节点的状态方程可以是时间混沌系统^[10-15], 也可以是时空混沌系统^[16-18], 这种同步亦被称之为内同步 (inner synchronization). 然而, 在真实世界中, 存在着各种拓扑结构等价或拓扑结构不等价的复杂网络, 这些网络和网络之间往往也需要进行同步控制. 例如, 利用激光系统进行远程通讯时, 若干个激光系统作为中继系统构成的拓扑结构等价或拓扑结构不等价的网络和网络之间信号的同步转换在理论上就相当于网络和网络之间的同步问题. 由此看来, 网络与网络之间的混沌同步研究有着重要的实际意义. 这种网络与网络之间的同步又被称之为外同步 (outer synchronization). 目前, 这种研究的相关报道还相对较少. 另外, 一般情况下, 实际连接的网络结构往往是多种多样的, 并且复杂网络本身含有大量的具有相互作用的节点, 在网络实际连接过

程中导致某些节点状态方程中的参量和表征节点之间耦合强弱的耦合强度不稳定甚至不确定也是非常容易出现的状况. 因此, 进行结构和参量不确定的网络与网络之间的混沌同步研究对实际应用领域更具有借鉴性.

本文进行了结构与参量不确定的网络与网络之间的混沌同步研究. 通过设计适当的控制输入, 不但实现了两个复杂网络之间的混沌同步, 而且网络节点状态方程中的未知参量和网络内部节点之间的耦合强度也被同时确定. 通过采用具有调制损耗的 CO₂ 激光器的状态方程进行仿真实验, 发现网络与网络之间的同步性能非常稳定.

2 网络与网络之间同步的机理分析

考虑由 N 个节点构成的任意结构的复杂网络, 节点的状态方程是参量未知的 n 维混沌系统. 网络中第 i 个节点混沌系统的状态变量是 $x_i(t)$, $x_i(t) \in R^n$. 在不考虑网络耦合作用时, 单个节点所满足的状态方程为

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)). \quad (1)$$

这里 $f: R^n \rightarrow R^n$.

将状态方程 (1) 分离成下列形式:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) = F(x_i(t)) + G(x_i(t))\alpha_i,$$

* 辽宁省自然科学基金 (批准号: 20082147) 和辽宁省教育厅创新团队计划 (批准号: 2008T108) 资助的课题.

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

$$(i = 1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

其中 α_i 是网络第 i 个节点混沌系统中的未知参量.

考虑网络耦合作用时, 由 N 个参量未知的混沌系统 (2) 作为节点构成的复杂网络具有下列形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & F(x_i(t)) + G(x_i(t))\alpha_i + \sigma_i \sum_{j=1}^N c_{ij}x_j(t), \\ (i = & 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 σ_i 是网络内部节点之间的耦合强度, c_{ij} 是表示网络拓扑结构的耦合矩阵 C 的矩阵元.

将 (3) 式所描述的复杂网络作为目标网络, 受控的响应网络取下列形式:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) = & F(y_i(t)) + G(y_i(t))\alpha_i \\ & + \beta_i \sum_{j=1}^N c_{ij}y_j(t) + u_i(t), \\ (i = & 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 β_i 是响应网络内部节点之间的待定的耦合强度, u_i 是控制输入.

为了使响应网络同步于目标网络, 定义两个网络节点状态变量之间的误差

$$e_i(t) = y_i(t) - x_i(t), \quad (5)$$

则误差随时间的演化关系为

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) = & \dot{y}_i(t) - \dot{x}_i(t) \\ = & \Delta F(y_i, x_i) + \Delta G(y_i, x_i)\alpha_i + \beta_i \sum_{j=1}^N c_{ij}y_j(t) \\ & - \sigma_i \sum_{j=1}^N c_{ij}x_j(t) + u_i(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta F(y_i, x_i) = & F(y_i(t)) - F(x_i(t)), \\ \Delta G(y_i, x_i) = & G(y_i(t)) - G(x_i(t)). \end{aligned}$$

构造网络的 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i(t)^T e_i(t) + \frac{1}{2\eta} \sum_{i=1}^N (\hat{\alpha}_i - \alpha_i)^T (\hat{\alpha}_i - \alpha_i) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\beta_i - \hat{\beta}_i - \sigma_i)^T (\beta_i - \hat{\beta}_i - \sigma_i), \end{aligned} \quad (7)$$

上式中 $\hat{\alpha}_i$ 代表目标网络和响应网络节点混沌系统中未知参量 α_i 的辨识量, $\hat{\beta}_i$ 表示响应网络中待定的耦合强度 β_i 的辨识量, η 是大于零的常量.

则 V 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \left[\Delta F(y_i, x_i) + \Delta G(y_i, x_i)\alpha_i \right. \\ & \left. + \beta_i \sum_{j=1}^N c_{ij}y_j(t) - \sigma_i \sum_{j=1}^N c_{ij}x_j(t) + u_i(t) \right] \\ & + \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^N \dot{\hat{\alpha}}_i^T (\hat{\alpha}_i - \alpha_i) \\ & - \sum_{i=1}^N \dot{\hat{\beta}}_i^T (\beta_i - \hat{\beta}_i - \sigma_i). \end{aligned} \quad (8)$$

定义目标网络和响应网络节点混沌系统中未知参量 α_i 和响应网络中待定的耦合强度 β_i 的自适应律

$$\dot{\hat{\alpha}}_i = \eta [\Delta G(y_i, x_i)]^T e_i(t). \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\beta}}_i = & \left[(\beta_i - \hat{\beta}_i - \sigma_i) \sum_{j=1}^N c_{ij}y_j(t) \right. \\ & \left. \times (\beta_i - \hat{\beta}_i - \sigma_i)^{-1} \right]^T e_i(t), \end{aligned} \quad (10)$$

将上述自适应律代入 (8) 式中, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \left[\Delta F(y_i, x_i) + \Delta G(y_i, x_i)\hat{\alpha}_i \right. \\ & \left. + \hat{\beta}_i \sum_{j=1}^N c_{ij}y_j(t) + \sigma_i \sum_{j=1}^N c_{ij}e_j(t) + u_i(t) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

设计控制输入的结构为

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -\Delta G(y_i, x_i)\hat{\alpha}_i \\ & - \hat{\beta}_i \sum_{j=1}^N c_{ij}y_j(t) - \varepsilon_i e_i(t), \end{aligned} \quad (12)$$

ε_i 为调控参量, 并利用 Lipschitz 条件, 即对于实数 $\xi_i > 0$, 下列关系成立:

$$|F(y_i(t)) - F(x_i(t))| \leq \xi_i |y_i(t) - x_i(t)|. \quad (13)$$

(11) 式可以简化为

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^N e_i(t)^T \left[(\xi_i - \varepsilon_i)e_i(t) + \sigma_i \sum_{j=1}^N c_{ij}e_j(t) \right] \\ = & e(t)^T Q e(t), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $e(t) = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_N(t))^T$.

当调控参量 ε_i 选择适当值使 (14) 式中的系数矩阵 Q 负定, 则存在

$$\dot{V} < 0. \quad (15)$$

根据 Lyapunov 定理 [19], 两个不确定复杂网络节点之间实现了完全同步.

3 仿真实验与讨论

采用物理中具有调制损耗的 CO₂ 激光器的状态方程进行仿真实验, 检验网络与网络之间的混沌同步性能.

具有调制损耗的 CO₂ 激光器的状态方程具有下列形式^[20]:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau} &= 2\gamma'_c I(\delta D - 1), \\ \frac{dD}{d\tau} &= -\gamma'_\Sigma(ID + D - 1), \\ \frac{d\gamma'_c}{d\tau} &= -\gamma'_0 m\omega \sin \omega\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 I 是与光强成正比的量; D 表示反转粒子数密度; γ'_c 是调制损耗的 CO₂ 激光器腔内光场的损耗系数. γ'_Σ 是原子能级上粒子数衰减速率. γ'_0 是稳态时调制损耗的 CO₂ 激光器腔内光场的损耗系数; δ 是增益参量; m 为调制深度; ω 为 CO₂ 激光器的弛豫振荡频率.

为计算方便, 作标度变换 $\gamma_c = \frac{\gamma'_c}{\omega}$, $\gamma_\Sigma = \frac{\gamma'_\Sigma}{\omega}$, $\gamma_0 = \frac{\gamma'_0}{\omega}$, $t = \omega\tau$, (16) 式可以变换为

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= 2\gamma_c I(\delta D - 1), \\ \frac{dD}{dt} &= -\gamma_\Sigma(ID + D - 1), \\ \frac{d\gamma_c}{dt} &= -\gamma_0 m \sin t. \end{aligned} \quad (17)$$

具有调制损耗的 CO₂ 激光器参量 $\delta = 2$, $f = 2\pi/\omega = 78.8 \text{ kHz}$, $\gamma'_\Sigma = 10^3 \text{ s}^{-1}$, $\gamma'_0 = 7 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ 时, 作出 CO₂ 激光器的状态方程的最大 Lyapunov 指数随参量 m 的演化关系如图 1 所示. 图 1 显示的最大 Lyapunov 指数存在大于零的区域, 表明参量在该区域时系统处于混沌态. 我们在 Lyapunov 指数大于零的区域取参量值为 $m = 0.03$, 作出此时系统状态变量构成的相图如图 2 所示.

仿真实验时, 取 CO₂ 激光器的状态方程 (17) 作为目标网络和响应网络的节点, 两个网络分别取四个节点, 即 $N = 4$. 将四个 CO₂ 激光器的状态方程 (17) 分别按照 (3) 式和 (4) 式的连接构成目标网络和响应网络. 其耦合矩阵采用实际物理过程中常

用的单向星型结构, 网络内部的耦合矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

假设网络节点 CO₂ 激光器的状态方程中增益参量 δ 未知, 响应网络控制输入的形式满足 (12) 式, 两个网络节点状态方程中的未知参量 δ 由相应的自适应律 (9) 式所替代, 响应网络连接中待定的耦合强度由相应的自适应律 (10) 式确定, 选取参量 $\sigma_i = 1$, $\eta = 1$, $\varepsilon_i = 5$. 进行网络的耦合连接并对响应网络实施控制输入, 仿真模拟目标网络和响应网络节点状态变量之间的误差随时间的演化规律如图 3—6 所示.

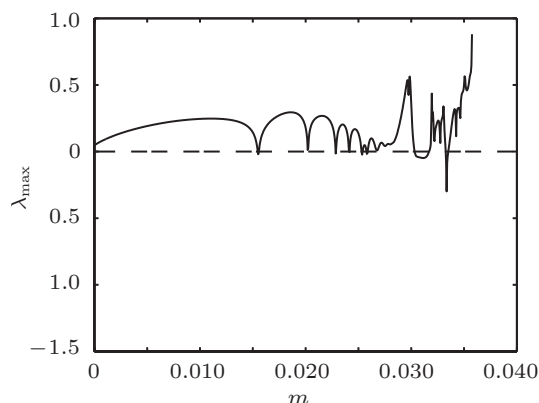


图 1 最大 Lyapunov 指数随参量 m 的演化

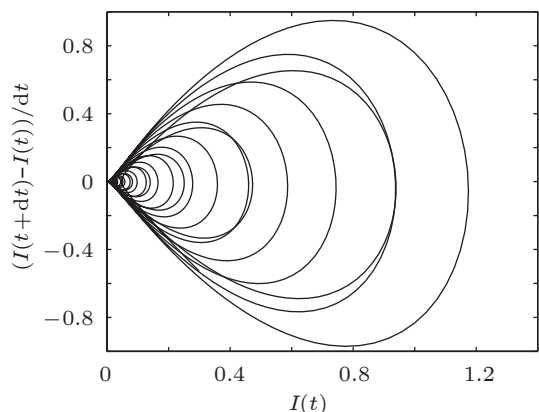


图 2 系统状态变量构成的相图

从图 3—6 中可以看出, 网络在耦合连接初期, 由于目标网络和响应网络各节点状态变量所取的初始值不同, 因此, 其误差 $e_1 = (e_{11}, e_{12}, e_{13})^T$,

$e_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23})^T$, $e_3 = (e_{31}, e_{32}, e_{33})^T$, $e_4 = (e_{41}, e_{42}, e_{43})^T$ 随时间演化的差异十分明显. 但经过一个暂态过程后, 两个网络中相对应的四个节点误差变量随时间的演化均趋于零, 两个网络之间的混沌同步得以实现.

4 结论

我们研究了两个结构与参量不确定的网络与网络之间的混沌同步规律. 首先基于 Lyapunov 定

理, 确定了网络节点状态方程中的未知参量和响应网络待定的耦合强度, 并实现了两个结构与参量不确定的网络与网络之间的混沌同步. 进一步采用具有调制损耗的 CO_2 激光器的状态方程作为单向星形结构网络的节点进行了仿真实验. 仿真结果显示, 对目标网络和响应网络实施耦合并对响应网络实施控制输入后, 经过一个短暂的过渡过程, 两个结构与参量不确定的复杂网络节点之间达到了完全同步.

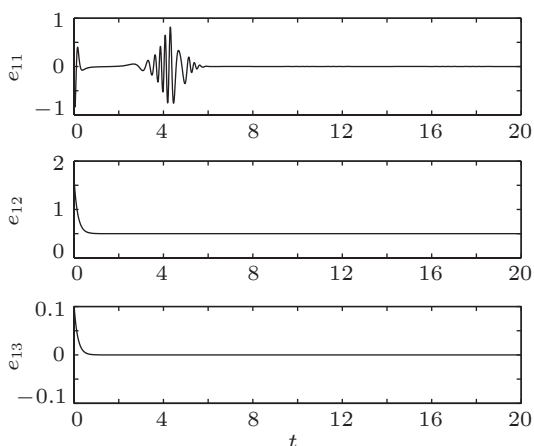


图3 两个网络第1个节点之间的误差

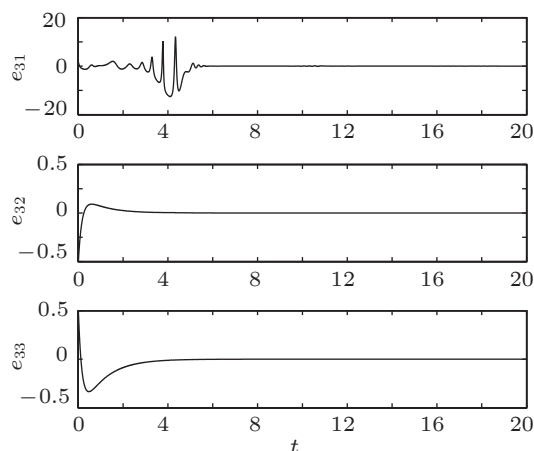


图5 两个网络第3个节点之间的误差

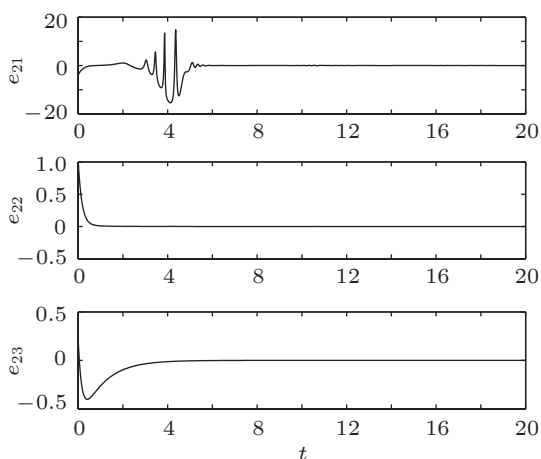


图4 两个网络第2个节点之间的误差

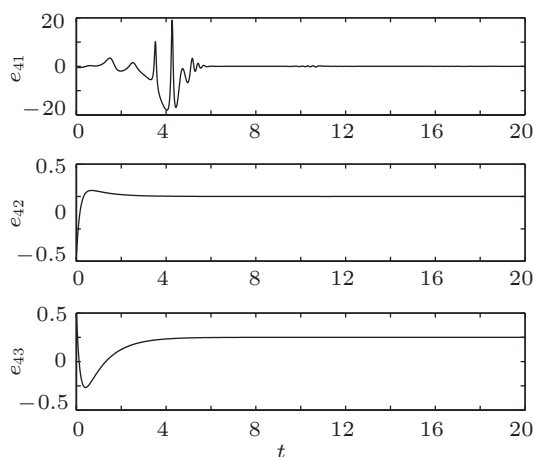


图6 两个网络第4个节点之间的误差

- [1] Ji D H, Park J H, Yoo W J, Won S C, Lee S M 2010 *Phys. Lett. A* **374** 1218
- [2] Kouvaris N, Provata A, Kugiumtzis D 2010 *Phys. Lett. A* **374** 507
- [3] Agnes E J, Erichsen Jr R, Brunnet L G 2010 *Physica A* **389** 651
- [4] Li K, Lai C H 2008 *Phys. Lett. A* **372** 1601
- [5] Hung Y C, Huang Y T, Ho M C, Hu C K 2008 *Phys. Rev. E* **77** 16202
- [6] He G M, Yang J Y 2008 *Chaos, Solitons and Fractal* **38** 1254
- [7] Checco P, Biey M, Kocarev L 2008 *Chaos, Solitons and Fractals* **35** 562
- [8] Pisarchik A N, Jaimés-Reátegui R, Sevilla-Escoboza R, Boccaletti S 2009 *Phys. Rev. E* **79** 55202
- [9] Chen L, Qiu C, Huang H B 2009 *Phys. Rev. E* **79** 45101
- [10] Li D, Leyva I, Almendral J A, Sendiña-Nadal I, Buldú J M, Havlin S, Boccaletti S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 168701
- [11] Posadas-Castillo C, Cruz-Hernández C, López-Gutiérrez R M 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **40** 1963
- [12] Yu W W, Chen G R, Lü J H 2009 *Automatica* **45** 429
- [13] Solís-Perales G, Ruiz-Velázquez E, Valle-Rodríguez D 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **14** 2528
- [14] La Rocca C E, Braunstein L A, Macri P A 2009 *Phys. Rev. E* **80** 26111
- [15] Shang Y, Chen M Y, Kurths J 2009 *Phys. Rev. E* **80** 27201
- [16] Emura T 2006 *Phys. Lett. A* **349** 306
- [17] Li Y, Lü L, Luan L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4463 (in Chinese) [李岩, 吕翎, 栾玲 2009 物理学报 **58** 4463]
- [18] Selivanov A A, Lehnert J, Dahms T, Hövel P, Fradkov A L, Schöll E 2012 *Phys. Rev. E* **85** 016201
- [19] Lü L 2000 *Nonlinear dynamics and chaos* (Dalian: Dalian Publishing House) (in Chinese) [吕翎 2000 非线性动力学与混沌 (大连: 大连出版社)]
- [20] Lü L, Cao H J 2003 *Opt. Tech.* **29** 89 (in Chinese) [吕翎, 曹海静 2003 光学技术 **29** 89]

Chaos synchronization between complex networks with uncertain structures and unknown parameters*

Zhang Meng Lü Ling[†] Lü Na Fan Xin

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 18 April 2012; revised manuscript received 28 May 2012)

Abstract

Chaos synchronization between complex networks with uncertain structures and unknown parameters is investigated. By designing appropriate control inputs, we achieve the synchronization between two complex networks. The unknown parameters of nodes at two networks and the coupling strength between the nodes are identified simultaneously in the process of synchronization. The CO₂ laser equation with modulation loss is taken for example to simulate experiment. It is found that the synchronization performance between two networks is very stable.

Keywords: outer synchronization, complex network, chaos, Lyapunov theorem

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq

* Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147), and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

[†] E-mail: luling1960@yahoo.com.cn