(2+1) 维 sine-Gordon 方程的三种函数混合解*

高美茹[1)2)3)†] 陈怀堂[1)3)‡]

1) (临沂大学理学院, 临沂 276005)

2) (中国农业银行忻州分行忻府支行, 忻州 034000)

3) (山东师范大学数学科学院, 济南 250014)

(2012 年 5 月 28 日收到; 2012 年 6 月 6 日收到修改稿)

基于一构造的 Wronskian 形式展开法, 获得了 (2+1) 维 sine-Gordon 方程的一系列新形式的混合解. 这些解是三角函数、双曲函数及 Jacobi 椭圆函数等三种函数的组合形式.

关键词: Wronskian 技巧, 混合解, sine-Gordon 方程

PACS: 05.45.Yv, 02.30.Ik, 02.30.Jr

1 引 言

众所周知, sine-Gordon 型方程在非线性光学、等离子物理、生物工程和超导物理的 Josephson 结构等自然科学领域中都有着广泛的应用. 因此, 寻求 sine-Gordon 型方程的精确解是非线性科学研究中的一个重要课题. 近年来, 随着吴消元法 [1] 的提出, 一些复杂冗长的代数运算能够在计算机上加以处理, 使得人们获得了 sine-Gordon 型方程的很多新的精确解 [2−6]. 然而, 获得高维的 sine-Gordon 型方程的混合解, 特别是由 Jacobi 椭圆函数、双曲函数及三角函数等组成的混合解是非常困难的. 通过对 Wronskian 技巧 [7−9] 的研究, 受文献 [10] 的启发, 本文重新构造了 Wronskian 行列式中的函数, 并求解了如下 (2+1) 维 sine-Gordon 方程:

$$u_{xx}+u_{yy}-u_{tt}=\sin u, \tag{1}$$

获得了一系列新的精确解. 这些解是三角函数、双曲函数和 Jacobi 椭圆函数等三种函数的组合.

2 Wronskian 形式展开法和新形式的混合解

考虑方程 (1), 作变换 $u=2\mathrm{i}\ln\dfrac{f^*}{f}$, 可得 (2+1) 维 sine-Gordon 方程的双线性形式:

$$(D_x^2+D_y^2-D_t^2)(f\cdot f)-\frac{1}{2}(f^2-f^{*2})=0, \tag{2}$$

其中 f^* 是 f 的共轭函数, D 是双线性算子:

$$D_x^m\, D_t^n(a\cdot b)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^n \times a(x,t)b(x',t')|_{x=x',t=t'}.$$

则, 求解步骤如下.

1) 寻求具有如下形式的波解:

$$u=2\mathrm{i}\ln\frac{f^*}{f}=4\arctan\frac{q}{p}, \tag{3}$$

其中

$$f=\widehat{(N-1)}=W(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N) =\begin{vmatrix}\phi_1 & \phi_1^{(1)} & \cdots & \phi_1^{(N-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \phi_N & \phi_N^{(1)} & \cdots & \phi_N^{(N-1)}\end{vmatrix},$$

$\phi_i^{(j)}=\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\phi_i, 1\leqslant j, 1\leqslant i\leqslant N$, 且 $\phi_i(1\leqslant i\leqslant N)$ 满足一些线性偏微分方程组. 为计算简便, 取 $N=2$, $f=p+\mathrm{i}q$.

---

* 山东省自然科学基金 (批准号: ZR2010AM014, Y2007A26) 资助的课题.

† E-mail: gmremail@163.com

‡ E-mail: chenhuaitang@163.com

2) 选取函数 ϕ_1, ϕ_2 为

$$\phi_1 = \mathrm{sn}\xi_1 + \sin\xi_1, \quad \phi_2 = \cosh(\xi_2 + \theta\mathrm{i}), \quad \xi_j = k_j x + c_j t + l_j y, \quad (j = 1, 2), \tag{4}$$

其中 $\mathrm{sn}\xi_1 \equiv \mathrm{sn}(\xi_1, m)$ 是模数为 m 的 Jacobi 椭圆函数, θ 是一任意实常量. 则

$$\begin{aligned} u' =& 2i\ln\frac{f^*}{f} = 4\arctan\frac{q}{p} = 4\arctan\frac{\sin\theta(k_2(\mathrm{sn}\xi_1 + \sin\xi_1)\cosh\xi_2 - k_1(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \cos\xi_1)\sinh\xi_2)}{\cos\theta(k_2(\mathrm{sn}\xi_1 + \sin\xi_1)\sinh\xi_2 - k_1(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \cos\xi_1)\cosh\xi_2)}, \\ \xi_j =& k_j x + c_j t + l_j y, \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \tag{5}$$

u' 并不是 (2+1) 维 sine-Gordon 方程 (1) 的一个解. 原因是 Jacobi 椭圆函数 $\mathrm{sn}\xi_1$ 并不满足与 (2+1) 维 sine-Gordon 方程相关的任意的线性偏微分方程组, 或者是任意的其他线性组合. 但是, 可以利用 u' 的结构和形式去求解方程 (1).

3) 假设 (2+1) 维 sine-Gordon 方程 (1) 具有与 $u^{'}$ 相对应的 Wronskian 形式解

$$\begin{aligned} u =& 4\arctan\frac{a_1(\mathrm{sn}\xi_1 + \sin\xi_1)\cosh\xi_2 + a_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \cos\xi_1)\sinh\xi_2}{b_1(\mathrm{sn}\xi_1 + \sin\xi_1)\sinh\xi_2 + b_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \cos\xi_1)\cosh\xi_2}, \\ \xi_j =& k_j x + c_j t + l_j y, \ \ (j = 1, 2), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 a_j, b_j, k_j, c_j, l_j $(j = 1, 2)$ 为待定参数.

4) 将 (6) 式代入方程 (1), 化简方程, 并令所有约化后的方程的同次幂系数为零, 可得到含有未知数 a_j, b_j, k_j, c_j, l_j $(j = 1, 2)$ 的一个代数方程组.

5) 利用 Maple, 解这些超定代数方程组, 可确定未知数 a_j, b_j, k_j, c_j, l_j $(j = 1, 2)$.

6) 将 a_j, b_j, k_j, c_j, l_j $(j = 1, 2)$ 的值代入 (6) 式, 可得 (2+1) 维 sine-Gordon 方程的下列新形式的混合解:

$$\begin{aligned} u_1 =& 4\arctan\frac{b_1(\mathrm{sn}\xi_1 + \sin\xi_1)\cosh\xi_2 + b_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \cos\xi_1)\sinh\xi_2}{b_1(\mathrm{sn}\xi_1 + \sin\xi_1)\sinh\xi_2 + b_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \cos\xi_1)\cosh\xi_2}, \\ \xi_1 =& \mathrm{i}l_1 x + l_1 y, \quad \xi_2 = k_2 x + \frac{1}{2}t - \mathrm{i}k_2 y, \end{aligned}$$

其中 b_1, b_2, l_1, k_2 是任意实常量, 且 b_1, b_2 不能同时为零.

当 $m \to 1$, Jacobi 椭圆函数退化为孤立波, 则有

$$u_{11} = 4\arctan\frac{b_1(\tanh\xi_1 + \sin\xi_1)\cosh\xi_2 + b_2(\mathrm{sech}^2\xi_1 + \cos\xi_1)\sinh\xi_2}{b_1(\tanh\xi_1 + \sin\xi_1)\sinh\xi_2 + b_2(\mathrm{sech}^2\xi_1 + \cos\xi_1)\cosh\xi_2}.$$

当 $m \to 0$, Jacobi 椭圆函数退化为三角函数, 则有

$$u_{12} = 4\arctan\frac{b_1\sin\xi_1\cosh\xi_2 + b_2\cos\xi_1\sinh\xi_2}{b_1\sin\xi_1\sinh\xi_2 + b_2\cos\xi_1\cosh\xi_2}.$$

相似地, 令 ϕ_1, ϕ_2 的形式为

$$\phi_1 = \mathrm{sn}\xi_1 + \sin\xi_1, \ \ \phi_2 = \sinh(\xi_2 + \theta\mathrm{i}), \ \ \xi_j = k_j x + c_j t + l_j y, \ (j = 1, 2).$$

并利用上述步骤, 可得

$$u_2 = 4\arctan\frac{b_1\sinh\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1 + \sin\xi_1) + b_2\cosh\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \cos\xi_1)}{b_1\cosh\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1 + \sin\xi_1) + b_2\sinh\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \cos\xi_1)},$$

$$\xi_1 = \mathrm{i}l_1 x + l_1 y, \quad \xi_2 = k_2 x + \frac{1}{2}t - \mathrm{i}k_2 y,$$

其中 b_1, b_2, l_1, k_2 是任意实常量, 且 b_1, b_2 不能同时为零.

如果在 Wronskian 形式展开法中, 取 $\phi_1 = \mathrm{sn}\xi_1 + \cos\xi_1, \phi_2 = \sinh(\xi_2 + \theta\mathrm{i}), \xi_j = k_j x + c_j t + l_j y, (j = 1, 2)$, 则

$$u_3 = 4\arctan\frac{b_1\sinh\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1 + \cos\xi_1) + b_2\cosh\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 - \sin\xi_1)}{b_1\cosh\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1 + \cos\xi_1) + b_2\sinh\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 - \sin\xi_1)},$$

$$\xi_1 = \mathrm{i}l_1 x + l_1 y, \quad \xi_2 = k_2 x + \frac{1}{2}t - \mathrm{i}k_2 y,$$

其中 b_1, b_2, l_1, k_2 是任意实常量, 且 b_1, b_2 不能同时为零.

若选取的函数 ϕ_1, ϕ_2 为如下形式: $\phi_1 = \mathrm{sn}\xi_1 + \cos\xi_1, \phi_2 = \cosh(\xi_2 + \theta\mathrm{i}), \xi_j = k_j x + c_j t + l_j y, (j = 1, 2)$, 可得

$$u_4 = 4\arctan\frac{b_1\cosh\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1 + \cos\xi_1) + b_2\sinh\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 - \sin\xi_1)}{b_1\sinh\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1 + \cos\xi_1) + b_2\cosh\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 - \sin\xi_1)},$$

$$\xi_1 = \mathrm{i}l_1 x + l_1 y, \quad \xi_2 = k_2 x + \frac{1}{2}t - \mathrm{i}k_2 y,$$

其中 b_1, b_2, l_1, k_2 是任意实常量, 且 b_1, b_2 不能同时为零.

若函数 ϕ_1, ϕ_2 为 $\phi_1 = \mathrm{cn}\xi_1 + \sin\xi_1, \phi_2 = \cosh(\xi_2 + \theta\mathrm{i}), \xi_j = k_j x + c_j t + l_j y\ (j = 1, 2)$, 计算得

$$u_5 = 4\arctan\frac{b_1\cosh\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1 + \sin\xi_1) + b_2\sinh\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 - \cos\xi_1)}{b_1\sinh\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1 + \sin\xi_1) + b_2\cosh\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 - \cos\xi_1)},$$

$$\xi_1 = \mathrm{i}l_1 x + l_1 y, \quad \xi_2 = k_2 x + \frac{1}{2}t - \mathrm{i}k_2 y,$$

其中 b_1, b_2, l_1, k_2 是任意实常量, 且 b_1, b_2 不能同时为零.

假设 $\phi_1 = \mathrm{cn}\xi_1 + \cos\xi_1, \phi_2 = \sinh(\xi_2 + \theta\mathrm{i}), \xi_j = k_j x + c_j t + l_j y, (j = 1, 2)$, 得

$$u_6 = 4\arctan\frac{b_1\sinh\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1 + \cos\xi_1) + b_2\cosh\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \sin\xi_1)}{b_1\cosh\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1 + \cos\xi_1) + b_2\sinh\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \sin\xi_1)},$$

$$\xi_1 = \mathrm{i}l_1 x + l_1 y, \qquad \xi_2 = k_2 x + \frac{1}{2}t - \mathrm{i}k_2 y,$$

其中 b_1, b_2, l_1, k_2 是任意实常量, 且 b_1, b_2 不能同时为零.

令 $\phi_1 = \mathrm{dn}\xi_1 + \sin\xi_1, \phi_2 = \sinh(\xi_2 + \theta\mathrm{i}), \xi_j = k_j x + c_j t + l_j y, (j = 1, 2)$, 则有

$$u_7 = 4\arctan\frac{b_1\sinh\xi_2(\mathrm{dn}\xi_1 + \sin\xi_1) + b_2\cosh\xi_2(m^2\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{cn}\xi_1 - \cos\xi_1)}{b_1\cosh\xi_2(\mathrm{dn}\xi_1 + \sin\xi_1) + b_2\sinh\xi_2(m^2\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{cn}\xi_1 - \cos\xi_1)},$$

$$\xi_1 = \mathrm{i}l_1 x + l_1 y, \quad \xi_2 = k_2 x + \frac{1}{2}t - \mathrm{i}k_2 y,$$

其中 b_1, b_2, l_1, k_2 是任意实常量, 且 b_1, b_2 不能同时为零.

若取 $\phi_1 = \mathrm{dn}\xi_1 + \cos\xi_1, \phi_2 = \cosh(\xi_2 + \theta\mathrm{i}), \xi_j = k_j x + c_j t + l_j y, (j = 1, 2)$, 可得

$$u_8 = 4\arctan\frac{b_1\cosh\xi_2(\mathrm{dn}\xi_1 + \cos\xi_1) + b_2\sinh\xi_2(m^2\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{cn}\xi_1 + \sin\xi_1)}{b_1\sinh\xi_2(\mathrm{dn}\xi_1 + \cos\xi_1) + b_2\cosh\xi_2(m^2\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{cn}\xi_1 + \sin\xi_1)},$$

$$\xi_1 = \mathrm{i}l_1 x + l_1 y, \qquad \xi_2 = k_2 x + \frac{1}{2}t - \mathrm{i}k_2 y,$$

其中 b_1, b_2, l_1, k_2 是任意实常量, 且 b_1, b_2 不能同时为零.

如果 $\phi_1 = \mathrm{cn}\xi_1 + \sinh\xi_1, \phi_2 = \cos(\xi_2 + \theta\mathrm{i}), \xi_j = k_j x + c_j t + l_j y, (j = 1, 2)$, 有

$$u_9 = 4\arctan\frac{ib_1\cos\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1 + \sinh\xi_1) - \mathrm{i}b_2\sin\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 - \cosh\xi_1)}{b_1\sin\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1 + \sinh\xi_1) + b_2\cos\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 - \cosh\xi_1)},$$

$$\xi_1 = \mathrm{i}l_1 x + l_1 y, \quad \xi_2 = k_2 x + \frac{1}{2}\mathrm{i}t - \mathrm{i}k_2 y,$$

其中 b_1, b_2, l_1, k_2 是任意实常量, 且 b_1, b_2 不能同时为零.

假设函数 ϕ_1, ϕ_2 为 $\phi_1 = \mathrm{sn}\xi_1 + \cosh\xi_1, \phi_2 = \sin(\xi_2 + \theta\mathrm{i}), \xi_j = k_j x + c_j t + l_j y, (j = 1, 2)$, 经计算得

$$u_{10} = 4\arctan\frac{ib_1\sin\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1 + \cosh\xi_1) - \mathrm{i}b_2\cos\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \sinh\xi_1)}{b_1\cos\xi_2(\mathrm{sn}\xi_1 + \cosh\xi_1) + b_2\sin\xi_2(\mathrm{cn}\xi_1\mathrm{dn}\xi_1 + \sinh\xi_1)},$$

$$\xi_1 = \mathrm{i}l_1 x + l_1 y, \quad \xi_2 = k_2 x + \frac{1}{2}\mathrm{i}t - \mathrm{i}k_2 y,$$

其中 b_1, b_2, l_1, k_2 是任意实常量, 且 b_1, b_2 不能同时为零.

3 结 论

本文运用 Wronskian 形式展开法构造了一些 (2+1) 维 sine-Gordon 方程的新形式的混合解. 这些解并非是同类函数之间的组合, 而是更为一般的 Jacobi 椭圆函数、双曲函数及三角函数等三种函数的组合. 与前人所做工作相比, 文中所得的混合解所描述的相关物理过程更为复杂, 也更值得探讨.

附 录

在 Wronskian 形式展开法中, 也可选取更为一般的函数, 如取

$$\phi_1 = d_1 \mathrm{sn}\xi_1 + d_2 \cosh \xi_1,$$

$$\phi_2 = d_3 \sin(\xi_2 + \theta \mathrm{i}).$$

从而获得 (2+1) 维 sine-Gordon 方程 (1) 的更为一般的混合解.

[1] Wu W J 1992 *Progress in Natural Science* **2** 1 (in Chinese) [吴文俊 1984 几何定理机械化证明的基本原理 (北京: 科学出版社)]

[2] Taogetusang, Sirendaoerji 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5194 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2010 物理学报 **59** 5194]

[3] Zhang D J, Deng S F, Chen D Y 2004 *Acta Mathematica Scientia* **24** 257 (in Chinese) [张大军, 邓淑芳, 陈登远 2004 数学物理学报 **24** 257]

[4] Yoshimasa Matsuno 2010 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **43** 105204

[5] Taogetusang 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 070203 (in Chinese) [套格图桑 2011 物理学报 **60** 070203]

[6] Chen H T, Yin H C 2008 *Journal of Physics: Conference Series* **96** 012020

[7] Freeman N C, Nimmo J J C 1983 *Phys. Lett.* A **95** 1

[8] Nimmo J J C 1983 *Phys. Lett.* A **99** 279

[9] Liu Q M 1989 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **22** 255

[10] Lü D Z, Cui Y Y, Wang X J 2009 *Phys. Lett.* A **374** 218

Hybrid solutions of three functions to the (2+1)-dimensional sine-Gordon equation*

Gao Mei-Ru[1)2)3)†] Chen Huai-Tang[1)3)‡]

1) (*School of Science, Linyi University, Linyi* 276005*, China*)

2) (*Xinzhou Branch, Agricultural Bank of China, Xinzhou* 034000*, China*)

3) (*School of Mathematical Science, Shandong Normal University, Jinan* 250014*, China*)

(Received 28 May 2012; revised manuscript received 6 June 2012)

Abstract

Based on a constructed Wronskian form expansion method, a few new types of hybrid solutions to the (2+1)-dimensional sine-Gordon equation are obtained. These solutions are some various combinations of trigonometric functions, hyperbolic functions and Jacobi elliptic functions.

Keywords: Wronskian technique, Hybrid Solution, sine-Gordon equation

PACS: 05.45.Yv, 02.30.Ik, 02.30.Jr

* Project supported by the Natural Science Foundations of Shandong Province(Grant Nos. ZR2010AM014, Y2007A26).

† E-mail: gmremail@163.com

‡ E-mail: chenhuaitang@163.com