

混沌系统模型误差平均绝对误差增长过程研究

杨锦辉[†] 宋君强

(国防科学技术大学计算机学院, 长沙 410073)

(2012年4月18日收到; 2012年6月10日收到修改稿)

混沌系统的平均绝对误差增长最初是用来刻画初始值误差增长的, 本文依照平均绝对误差增长的定义来研究模型误差的增长过程, 获得了一些很有意义的结论. 研究发现, 在初期模型误差的平均绝对误差增长呈指数级增长, 增长指数同模型的扰动相关, 与真实系统最大 Lyapunov 指数没有直接关系. 其后模型误差进入非线性增长过程, 误差增长放缓, 最终达到饱和. 误差饱和值恒定, 当真实系统和模型系统吸引子差别较小时, 模型误差饱和值基本上同真实系统的初始值误差饱和值相等. 利用上述研究结论可以求出模型的可预报期限, 这在数值天气预报中具有重要的意义. 进而利用模型的可预报期限可以对同一真实系统的不同模型进行评价, 相对真实系统越精确的模型拥有更高的可预报期限. 这对新模型的开发具有很强的指导作用.

关键词: 模型误差, 平均绝对误差增长, 混沌系统, 可预报期限

PACS: 05.50.-a

1 引言

地球物理系统中大气和海洋状态量的预报, 最大的障碍来自两个方面: 第一是混沌系统不稳定性对于初始场误差的放大作用; 第二是模型不精确, 难以完全地描述真实的物理过程. 因此形成预报误差的两个来源, 前者称为初始值误差, 后者称为模型误差. 文献 [1-5] 对混沌系统的初始值误差在系统演化中的放大过程作了研究, 提出了非线性误差增长理论. 文献 [6-7] 提出采用资料同化和集合预报来提高观测数据的精度, 减小初始值误差的方案. 自 Lorenz^[8] 提出混沌系统对初始值的敏感性以来, 初始值误差一直是研究的焦点. 然而随着观测仪器和资料同化技术的进步, 模型初始场同真实数据间的误差越来越小, 对模型误差的研究也就得到越来越多的关注. 一般认为初始值误差在中短期的预报中占有较大影响, 而模型误差则影响的是其长期行为. Orrell 等指出模型误差对预报的影响可能被低估了, 在文献 [9] 中作者提出了一个描述模型误差的方案, 利用阴影和漂移等量来描述系统的模型误差, 并且能对不同模型进行比较. 其后, Orrell 发

展了该方案^[10], 引入了集合预报来处理同时包含初始误差和模型误差的情形, 这样更加接近现实应用. 但是该方法只是描述了模型的短期发展, 而且理论复杂实现困难. Nicolis^[11,12] 建立了模型误差动力学, 用解析的方法建立了模型误差发展方程. 该模型误差发展方程比较好的符合模型误差的短期发展趋势, 但是该方法的缺点是模型方程和真实系统之间的差异要足够小, 而且模型方程的解相空间和真实系统相空间要一致. 这样就极大的限制了该模型误差发展方程的应用范围.

本文主要利用统计手段来研究模型误差增长的长期过程. 借鉴非线性误差增长理论^[5,13,14] 中对初始误差平均绝对误差增长的定义来定义模型误差. 研究发现当初始值误差为零时, 模型误差的平均绝对误差初期呈指数级增长, 且随系统演化最终达到饱和. 对系统同一参数扰动形成的模型误差, 增长指数相同, 改变扰动参数, 增长指数不同. 增长指数同系统的最大 Lyapunov 指数没有直接的关系. 如果模型是对真实系统较好的模拟则误差饱和值趋于固定值, 否则误差饱和值将在一个区间内波动. 研究还发现, 模型误差增长的饱和值趋于固定值时, 该固定值同真实系统和模型的吸引子相关, 并不随

[†] E-mail: yangjinhui@nudt.edu.cn

初始误差变化而变化. 如果将模型误差达到误差饱和值 99% 时所对应的时间定义为可预报期限^[13], 则可以计算得到模型的可预报期限. 因此在比较同一真实系统下的不同模型时, 可以利用模型的可预报期限作为一个衡量模型优劣的标准. 这对新模型的开发具有很强的指导作用.

2 模型误差的平均绝对误差定义

为了更好的探索混沌系统的模型误差, 首先需要对其有一个精确数学描述. 假定模型的状态空间向量 $\mathbf{x}(t) \in R^n$, 真实系统的状态空间向量为 $\bar{\mathbf{X}}(t) \in R^m$, 一般有 $m \geq n$. 假定存在一个一阶连续的投影 \mathbf{P} , 把真实系统状态空间向量映射到模型的状态空间, 在模型状态空间形成的轨道称之为目标轨道

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}(\bar{\mathbf{X}}(t)), \quad (1)$$

目标轨道 $\bar{\mathbf{x}}(t) \in R^n$ 存在于模型空间中, 代表模型空间中所理解的真实系统的轨迹. 现在假设模型通过如下方程给出:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)), \quad (2)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^n$, 模型的轨道 $\mathbf{x}(t)$ 用来近似目标轨道 $\bar{\mathbf{x}}(t)$, 因此得到 t 时刻的模型误差为

$$\delta(t) = \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t). \quad (3)$$

混沌系统的平均绝对误差增长过程最初是用来刻画初始值误差增长的, 本文依照平均绝对误差增长的定义来研究模型误差的增长过程. 混沌系统平均绝对误差增长的定义由文献^[14]给出

$$\bar{E}_{\text{abs}}(t) = \left(\prod_{i=1}^N \delta_i(t_0 + t) \right)^{1/N}, \quad (4)$$

其中 $\delta_i(t_0 + t)$ 为 $|\delta(t_0 + t)|$ 的简化表示, 即在 $t_0 + t$ 时刻的模型误差的范数, t_0 表示开始时间, 一般为 0, t 表示持续时间. N 表示实验的次数.

3 模型误差的平均绝对误差增长过程

首先, 以 Lorenz63^[15] 系统为例研究真实系统和模型系统拥有接近吸引子时模型误差的平均绝

对误差增长过程. Lorenz63 系统由如下方程给出:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= X(r - Z) - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ, \end{aligned} \quad (5)$$

设参数为 (σ, r, b) 时为真实系统, 对三个参数中的一个加入一个小的扰动而得到的系统为模型系统, 当扰动较小时可以认为这时系统和模型的吸引子相似. 根据 (4) 式计算得到模型误差增长如图 (1) 所示. 从图可知, 模型误差增长同初始值误差增长^[15] 相似, 在初期会呈较稳定的指数级增长, 一定时间后进入非线性增长阶段, 增速放缓, 最终误差不再增长达到饱和, 误差饱和值同吸引子相关. 事实上当 $t \rightarrow \infty$ 时误差会趋于恒定饱和值, 这一结论可以由 (4) 式及一些合理的假设推导得出^[5], 详细推导过程见附录.

在误差增长的指数级增长阶段, 对同一个参数的不同扰动, 模型误差的增长指数不变, 对不同参数的扰动, 模型误差的增长指数改变. 从文献^[13]可知, 混沌系统初始值误差在指数级增长阶段的增长指数等于系统最大 Lyapunov 指数. 图 1(a) 的增长指数为 2.015, 图 1(b) 的增长指数为 2.180. 而图中真实系统最大 Lyapunov 指数为 0.905. 可以看出模型误差指数级增长阶段的增长指数同最大 Lyapunov 指数没有直接的关系.

当真实系统和模型系统拥有相似吸引子时, 模型误差平均绝对误差增长饱和值基本上同初始值误差饱和值相等. 如图 1 所示的 Lorenz63 系统, 从文献^[15]可知系统在参数取 $(10, 28, 8/3)$ 时初始值误差绝对误差增长饱和值为 2.771, 图 1 中模型误差绝对误差增长饱和值为 2.753, 可以认为二者是基本相等的, 结论成立.

为验证上述结论对其他混沌系统有效, 图 2 测试了 Lorenz96^[16] 系统. 对参数 F 施加扰动, 可以看出模型误差增长完全符合上述结论. 模型误差增长饱和值为 3.300, 依照文献^[14]可知, Lorenz96 系统维数等于 20, $F = 10$ 时, 初始值误差增长饱和值为 3.302, 二者基本相等. 可知上述结论成立.

其次, 研究了当真实和模型系统吸引子差别较大时模型误差的增长过程. 以 Lorenz96 模型为研究对象. Lorenz96 模型是研究大气可预报性方面广泛应用的一个模型, 其方程为

$$\frac{d}{dt}y_i = -y_i - y_{i-1}(y_{i-2} - y_{i+1}) + F, \quad (6)$$

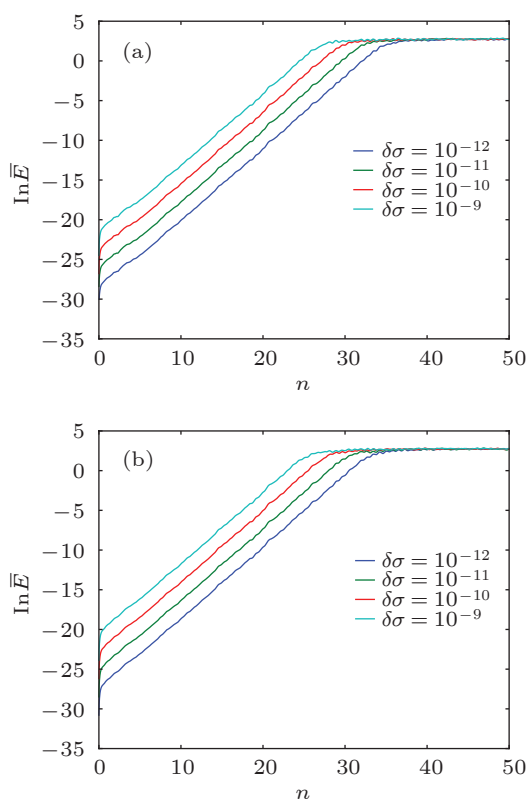


图1 Lorenz63 系统模型误差平均绝对误差增长过程 (真实系统模型参数为 (σ, r, b) , 其中 $\sigma = 10, r = 28, b = 8.0/3$. 曲线从上到下对应扰动值为 $\{10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-11}, 10^{-12}\}$, 共对 $N = 200$ 次试验求平均) (a) 对参数 σ 施加扰动, 模型参数为 $(\sigma + \delta\sigma, r, b)$; (b) 对参数 r 施加扰动, 模型参数为 $(\sigma, r + \delta r, b)$.

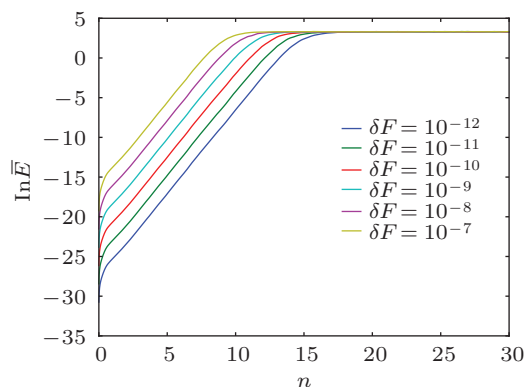


图2 Lorenz96 系统模型误差平均绝对误差增长过程 (维数为 20, 参数 $F = 10$ 时作为真实系统, 维数不变, 对 F 施加扰动作为模型系统, 曲线从上到下对应扰动分别为 $\{10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, 10^{-10}, 10^{-11}, 10^{-12}\}$. 共对 $N = 200$ 次试验求平均)

y_i 呈环形分布, $y_{i+N} = y_i$. N 为其维数. 假定 $N_0 = 20, F = 10$ 的 Lorenz96 系统为真实系统. 模型系统的维数 $N < 20, F$ 不变. 把真实系统的前 N 维看作在模型空间的目标轨迹, 与模型轨

迹对比形成模型误差. 模型误差平均绝对误差增长如图 3(a) 所示. 由图可知, 误差增长过程符合前文描述. 由于模型和真实系统之间的吸引子差别较大, 所以误差饱和值存在一定的波动, 而且当模型的维数取不同值时, 模型误差增长饱和值也不同. 图 3(b) 给出了初始值误差饱和值和模型误差饱和值之间的关系, 可以看出, 模型误差饱和值介于真实系统和模型系统初始值误差饱和值之间, 一般同模型的初始值误差饱和值一致.

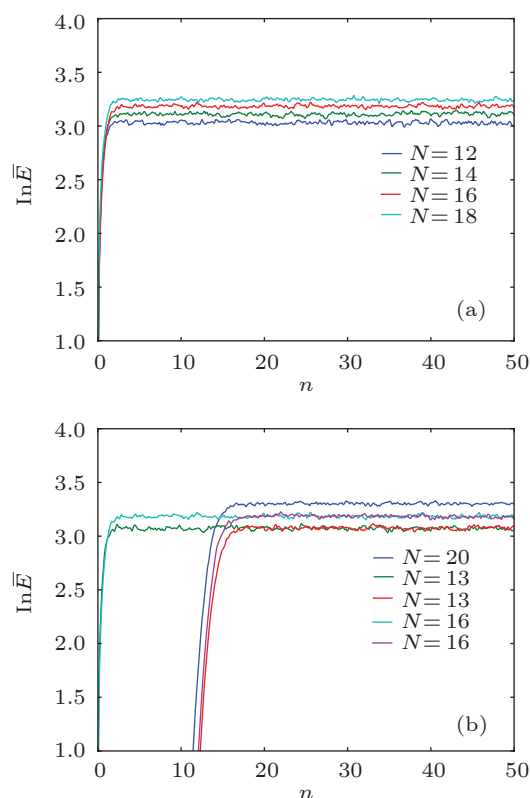


图3 Lorenz96 系统模型误差平均绝对误差增长过程 (真实系统维数为 20 维, $F = 10$. 模型系统改变维数, F 不变) (a) 给出了模型误差增长过程 (曲线从上到下模型维数 N 取值分别为 12, 14, 16, 18); (b) 给出了模型误差增长, 以及对对应模型的初始值误差增长过程 (初始误差取值为 10^{-10} . 从上到下分别为真实系统的初始值误差增长曲线、模型维数 N 等于 16 的模型误差及初始值误差曲线、模型维数为 13 的模型误差及初始值误差增长曲线)

4 模型可预报时间及模型的比较

自然界的混沌现象, 其真实当前状态和运行规则是不可能精确得出的, 只能通过建立数学模型来近似. 数学模型的建立基于不同的标准可以得出不同的形式. 对于同一个真实系统, 如何比较其各个模型间的差异, 如何确定哪个模型更加接近真实, 是一个值得研究的问题. 文献 [9] 中, 作者就利用模

型误差方法比较了不同气象预报软件的精确性. 本文从模型误差的可预报时间方面给出了一个模型评价标准.

从上节的结论可知, 模型误差最终都会达到饱和, 依照文献 [13] 的定义, 把误差达到饱和值的 99% 时的时刻值作为模型的可预报期限. 因此可以依据模型的可预报时间作为模型精确度的一个衡量标准. 它们之间一个简单的关系就是可预测时间越长, 模型越接近真实, 模型也就越精确. 如图 1 中所示的 Lorenz63 模型, 可预报时间最长的就是参数扰动最小的模型, 因为此时模型最接近真实系统. 下面以 Orrell 在 2003 年的文献 [17] 中提出的两个 Lorenz96 II 型系统的简化模型作为例子加以验证.

Lorenz96 II 型系统公式如下

$$\begin{aligned} dX_k/dt = & -X_{k-1}(X_{k-2} - X_{k+1}) \\ & -X_k + F - \left(\sum_{j=1}^J Y_{j,k} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} dY_{j,k}/dt = & -cb(Y_{j+1,k} - Y_{j-1,k}) \\ & -cY_{j,k} + (hc/b)X_k, \end{aligned}$$

其中, $k = 1$ 到 n , $j = 1, \dots, m$. 同 (6) 式类似, X, Y 循环分布有 $X_{k+n} = X_k, Y_{j+m,k} = Y_{j,k+1}$. 真实系统演化比较复杂, 分为两层, 文献 [17] 提出有两种简化方式分别为

线性模型:

$$\begin{aligned} dX_k/dt = & -X_{k-1}(X_{k-2} - X_{k+1}) \\ & -X_k + \alpha_0 + \alpha_1 X; \end{aligned} \quad (8)$$

固定模型:

$$\begin{aligned} dX_k/dt = & -X_{k-1}(X_{k-2} - X_{k+1}) \\ & -X_k + P_c. \end{aligned} \quad (9)$$

以 (7) 式作为真实系统, 其中参数 $n = 8, m = 4, F = 10$. 线性模型 (8) 式作为其简化模型之一, 其中参数 $a_0 = 9.95, a_1 = -0.122$. 固定模型 (9) 式, 作为其简化模型之二, 其中参数 $P_c = 9.62$. 结果如图 4 所示. 图中左边曲线为固定模型, 右边曲线为线性模型. 可以看出固定模型的模型误差增长速率要比线性模型的要快, 且其可预报时间要小于线性模型. 所以线性模型是真实系统更加精确地模拟, 这与文献 [17] 中的结论完全相同.

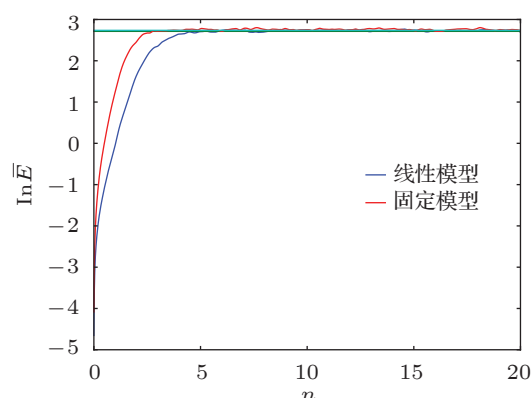


图 4 模型可预报时间 (左边曲线为固定模型, 右边曲线为线性模型. 水平线为饱和值的 99%, 其与曲线的交点为模型的可预报时间)

5 结论

本文以统计手段研究了模型误差增长的长期过程. 借鉴初始误差增长理论中平均绝对误差增长的定义来定义模型误差的增长. 研究发现模型误差的平均绝对误差增长同初始值误差的平均绝对误差增长有一定的相似之处. 在初期都是呈指数级增长, 然后经历一段非线性增长过程, 误差增长放缓, 最终达到饱和. 初始值误差的增长指数等于系统最大 Lyapunov 指数, 但模型误差增长指数同最大 Lyapunov 指数没有直接关系. 模型误差饱和值同模型和真实系统吸引子相关. 当模型和真实系统吸引子接近时, 模型误差饱和值就基本上等于真实系统的初始值误差饱和值. 当模型和真实系统差异较大时, 模型误差饱和值介于真实系统和模型的初始值误差饱和值之间, 一般更靠近模型的初始值误差饱和值. 本文最后还给出了求模型可预报时间的方法, 即把达到模型误差饱和值 99% 的时刻作为模型的可预报时间. 通过模型可预报时间可以对一个真实系统的不同模型进行评价, 文中通过一个例子验证了本方案的可行性.

模型误差在混沌系统误差分析中一直是一个难点, 本文从平均绝对误差增长的角度分析了模型误差增长. 但是大多结论都是通过实验统计获得, 下一步可以通过建立模型误差的解析模型, 来给出更加严格的数学推导. 另外在实际应用中模型误差和初始值误差都是同时存在的, 下一步研究可以针对模型误差和初始值误差的相互影响来展开.

附录: 混沌系统误差收敛于固定值证明

引理 给定独立随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n , 拥有如下的分布函数:

$$f(x) = \begin{cases} p(x), & \varepsilon \leq x \leq \alpha, \\ 0, & \varepsilon < x \text{ 或 } x > \alpha, \end{cases} \quad (\text{A1})$$

其中 ε 表示任意小的正数, α 为正的常数, 且 $p(x)$ 为闭区间 $[\varepsilon, \alpha]$ 上的连续函数. 使 $Z_n = (\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n}$, 则有

$$Z_n \xrightarrow{P} c, \quad (n \rightarrow \infty), \quad (\text{A2})$$

其中, \xrightarrow{P} 表示依概率意义收敛, c 是同 $p(x)$ 相关的常数.

证明 首先对 Z_n 取对数有

$$\ln Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i. \quad (\text{A3})$$

由于 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是独立同分布随机变量, 则 $\ln X_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ 也是独立同分布随机变量. 则数学期望

$$E(\ln X_i) = \int_{\varepsilon}^{\alpha} \ln x \cdot p(x) dx = b, \quad (\text{A4})$$

其中 b 为同 $p(x)$ 相关的常数. 由辛钦大数定理, 当 $n \rightarrow \infty$ 有

$$\ln Z_n \xrightarrow{P} b, \quad (\text{A5})$$

因此有 $Z_n \xrightarrow{P} e^b = c$, 命题得证.

由 (4) 式知模型误差平均绝对误差形式为 $\bar{E}_{\text{abs}}(t) = \left(\prod_{i=1}^N \delta_i(t_0 + t) \right)^{1/N}$, 对于混沌系统当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\delta_1(t), \delta(t)_2, \dots, \delta(t)_n$ 可以看作独立同分布的随机变量, 且其分布函数同 (A1) 式相似. 于是有

$$\bar{E}_{\text{abs}}(t) \xrightarrow{P} c, \quad (t \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty). \quad (\text{A6})$$

命题得证. 上述证明基本上引用文献 [5] 中对初始值误差饱和值的证明过程. 其中一个关键的假设为当 $t \rightarrow \infty$ 时, 混沌系统误差 $\delta_1(t), \delta(t)_2, \dots, \delta(t)_n$ 可以看作独立同分布的随机变量, 当模型和真实系统吸引子差异较小时上述假设可以认为是成立的.

[1] Eckmann J P, Ruelle D 1985 *Rev. Mod. Phys.* **57** 617
 [2] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285
 [3] Sano M, Sawada Y 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 1082
 [4] Kantz H, Schreiber T 2004 *Nonlinear Time Series Analysis, Cambridge University Press, Cambridge*
 [5] Ding R Q, Li J P 2007 *Phys. Lett. A* **364** 396
 [6] Anderson J 2001 *Mon. Wea. Rev.* **129** 2884
 [7] Whitaker J, T. Hamill 2002 *Mon. Wea. Rev.* **130** 1913
 [8] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
 [9] Orrell D, Smith L, Barkmeijer J 2001 *Nonlinear Processes in Geo-*

physics **8** 357
 [10] Orrell D 2005 *J. Atmos. Sci.* **62** 1652
 [11] Nicolis C 2003 *J. Atmos. Sci.* **60** 2208
 [12] Nicolis C 2004 *J. Atmos. Sci.* **61** 1740
 [13] Ding R Q, Li J P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7494 (in Chinese) [丁瑞强, 李建平 2008 物理学报 **57** 7494]
 [14] 杨锦辉, 宋君强 2012 物理学报 **17** 61
 [15] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
 [16] Lorenz E N 1995 *Proceedings of a Seminar Held at ECMWF on Predictability* (Reading: ECMWF) p1
 [17] Orrell D 2003 *J. Atmos. Sci.* **60** 2219

Study on the mean absolute growth of model error for chaos system

Yang Jin-Hui[†] Song Jun-Qiang

(School of computer, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 18 April 2012; revised manuscript received 10 June 2012)

Abstract

Mean absolute growth of model error which is used to describe the initial error growth for chaos system, is employed in this paper to investigate the model error growth, and some meaningful conclusions are drew from it. It is found that the mean absolute growth of model error is initially exponential with a growth rate which has no direct relationship with the largest Lyapunov exponent. Afterwards model error growth enters into a nonlinear phase with a decreasing growth rate, and finally reaches a saturation value. If the difference between the attractor of real system and that of the model system is very small, the model error saturation level is consistent with the initial error saturation level of real system. With these conclusions one can obtain the predictability limit of a model easily, which is meaningful for weather prediction models. Also the predictability limit of model can be used for model comparison. The exacter model has a higher predictability limit which is useful for new model development.

Keywords: model error, mean absolute growth of model error, chaos system, predictability limit

PACS: 05.50.-a

[†] E-mail: yangjinhui@nudt.edu.cn