

扩展 HK 网络结构与同步能力的研究*

王丹^{1)†} 井元伟²⁾ 郝彬彬²⁾

1) (沈阳大学科学技术研究中心, 装备制造综合自动化重点实验室, 沈阳 110044)

2) (东北大学信息科学与工程学院, 控制理论与导航制导研究所, 沈阳 110004)

(2011 年 12 月 2 日收到; 2012 年 6 月 5 日收到修改稿)

研究两种高聚类系数无标度网络演化机理对网络同步能力的影响. 首先, 以 Holme 和 Kim(HK) 模型为基础, 提出了度分布和聚类系数均可调的扩展 HK 模型 (EHK 模型). 扩展 HK 模型将 HK 模型中的三角结构扩展到了旧节点之间, 解决了 HK 模型边的演化只存在新旧节点之间以及每个时间步加入网络节点的边数固定的不足. 其次, 研究了三角结构演化机理对网络同步能力的影响. 最后, 仿真研究发现三角结构的演化机理降低了两类无权网络的同步能力.

关键词: 无标度网络, 聚类系数, 同步能力

PACS: 05.90.+m, 02.50.-r

1 引言

复杂网络研究的主要目的之一就是理解网络的结构和动态特性之间的关系. 目前大部分关于同步问题的研究都是针对小世界网络或者是无标度网络^[1,2]. WS 小世界网络具有大的聚类系数和小的平均路径长度^[3], BA 无标度网络中节点的度具有幂律分布的特性^[4]. 但是, 现实生活中的网络几乎同时具备这两种网络的特性, 最近一些网络模型描述了这种小世界无标度特性的网络^[5].

最初针对复杂网络结构特性与同步能力的关系研究主要是针对无标度网络进行研究的^[6-11]. 研究工作集中在平均最短路径, 异质性和介数等对网络同步能力的影响. 既然无标度网络本身具有小的平均最短路径, 那么小世界无标度网络可以看作是具有高聚类系数的无标度网络. 最早的高聚类系数无标度网络模型是 Holme-Kim(HK) 模型^[12], 也是最具代表性的高聚类系数的无标度小世界模型. HK 模型以 BA 模型为基础, 认为 BA 模型中新增节点的所有边全部遵循全局择优的原则与现实不符,

提出了一种被称为 TF (triad formation) 的改进步骤, 同时保留了全局的择优 PA (preferential attachment) 步骤. HK 模型是一种全局范围内聚类系数可调的网络模型, 使得人们可以研究聚类系数和网络同步能力之间的关系. 目前有很多文献对 HK 模型进行改进, 其中文献 [13] 在 HK 模型的基础上, 按照概率调节了每个时间步三角结构的数量. 文献 [14] 则是考虑了网络的局部效应, 在优先连接机理选择时, 不是在全局范围内选择的, 而是在一个局部范围内选择. 文献 [15] 将 HK 模型扩展为加权的网络模型, 文献 [16] 在加权 HK 模型的基础上研究了加权网络聚类系数和同步能力的关系.

但是, HK 模型和这些改进的 HK 演化模型, 在网络演化过程中, 仅新加入的节点和旧节点之间存在边的连接, 没有旧节点之间网络结构的演化, 我们认为这种 TF 机理更容易在网络中的旧节点之间产生. HK 模型新节点加入到网络中时, 每个节点都具有相同的连接数, 我们把 HK 模型中的 TF 机理放到网络中的旧节点之间进行演化. 新节点加入到网络中时, 与网络中已存在的节点相连的边数不再是固定的, 而是概率可调的. 基于此本文提

* 国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 61203152, 61104029) 和辽宁省博士科研启动基金 (批准号: 20121040) 资助的课题.

† E-mail: wangdan0307@126.com

出了两种扩展的 HK 模型, 对扩展 HK 模型 (EHKI 和 EHKII) 进行了数值计算, 给出了网络的度分布公式, 对网络的结构特性进行仿真分析. 数值计算和仿真分析所提出的网络模型是具有高聚类系数的无标度网络模型. 分析网络演化过程中, TF 机理在旧节点之间产生和在新旧节点之间产生对网络结构特性带来的区别. 在 EHKI 和 EHKII 模型的基础上, 研究了网络的演化规则与网络同步能力的关系.

值得一提的是, 本文所提出的两种改进的 HK 模型, 主要是通过旧边中产生三角形来改变网络的局部结构. 但早在 2007 年, 周涛等就提出了集团度 (clique degree) 的概念 [17,18], 集团度可以用来刻画包括三角形分布在内的局部结构在网络中的分布情况. 后来 Yang 等 [19] 基于随机行走机理, Cui 等 [20] 基于共同邻居驱动机理, 分别建立了理论模型并再现了 Xiao 等 [18] 的实证发现. 本文的研究将只讨论聚类系数对网络同步的影响, 而不涉及高阶集团度分布对网络性能的影响, 但在以后的研究中会对这部分内容做进一步的探讨.

2 EHKI 高聚类系数网络模型

2.1 EHKI 模型

HK 模型是一种比较典型的高聚类系数网络模型, HK 网络演化规则如下: 1) 每一时间步骤, 在网络中增加一个节点和 m 条边; 2) 以 PA 步骤增加其中的一条边; 3) 以概率 p 进行 TF 步骤或者以概率 $(1-p)$ 进行 PA 步骤, 增加其余的 $(m-1)$ 条边. 这种改进可以同时实现网络的高聚类系数和无标度特征, 成功地解决了复杂网络中小世界特征与无标度特征的统一. 但是, 在 HK 模型的演化过程中, 每个时间步加入的新节点 n 都具有相同的边数 m 与网络中的节点相连, 并且网络边的产生只有新节点和旧节点之间. 事实上, 这种边的演化机理更可能存在于旧节点之间, 并且每个时间步加入的节点 n 与网络中节点相连的边数可能是不确定的. 本文将 TF 机理移到了旧节点之间进行演化, 成功的解决了 HK 模型的这两处不足. 所提出的 EHKI 模型演化如下.

1) 初始状态: 网络初始状态含有 m_0 个完全连接的节点.

2) 网络演化: 每一个时间步增加一个节点和 m 条边, 第一条边以 PA 规则选取节点. 其余的 $(m-1)$ 条边以概率 p 进行 TF 连接, 以概率 $(1-p)$ 进行 PA 连接. 给定概率 $p \in [0, 1]$.

3) 终止条件: 网络的规模 N 达到所希望的值, 生成了一个网络节点数 N , 边的数量近似为 Nm 的网络模型.

其中, PA 规则是 BA 无标度网络中采用的节点度优先的连接机理, 新节点 n 加入到网络中时, 选取节点 i 进行连接的概率 Π_i 与节点 i 的度成正比, 如下式所示:

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (1)$$

TF 规则是指在网络中选取一个节点, 该节点的选取依据 (1) 式, 然后给它的一对没有连接的邻节点之间增加连接. 根据聚类系数的定义, TF 连接增加了节点的聚类系数.

在 EHKI 模型中, 新节点加入到网络中时, 有 $1 + (1-p)(m-1)$ 条边与网络中的节点相连. 当概率 $p = 0$ 时, 网络退化为 BA 无标度网络模型; 当 $p = 1$ 时, 网络中每个时间步加入的节点都只有一条边与网络中的节点相连. 当给定一个概率 $0 < p < 1$ 时, 新增加的节点具有的边数不确定, 同时, 网络中两个不存在连接的节点, 由于中间节点的影响而互相建立新的连接. 在社会网络中对应的现象是与朋友的朋友互相结识. 因此, 本文所提出的 EHKI 模型具有一定的实际意义.

2.2 EHKI 模型的度分布

Holme 和 Kim 给出 HK 模型中 [12], 节点的度是近似服从 $\gamma = 3$ 的幂律分布. 这与 BA 无标度网络的度分布是一致的. 在 EHKI 模型中, 节点 i 度的增加有两种方式: 1) 节点 i 按照 PA 规则被选取; 2) 节点 i 的邻节点 j 被 TF 规则选取, 且节点 i 被做为增加连接的两个目标节点之一选取.

$$\begin{aligned} \frac{dk_i}{dt} &= \frac{k_i}{\sum_l k_l} + (m-1)(1-p) \frac{k_i}{\sum_l k_l} \\ &\quad + (m-1)p \sum_{j \in \Gamma(i)} \frac{k_j}{\sum_l k_l} \frac{2}{k_j} \\ &= \frac{k_i}{\sum_l k_l} + (m-1)(1-p) \frac{k_i}{\sum_l k_l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (m-1)p \frac{2(k_i - \alpha_i)}{\sum_l k_l} \\
 & = \frac{k_i}{\sum_l k_l} [1 + (m-1)(1-p) + 2(m-1)p] \\
 & \quad - 2(m-1)p \frac{\alpha_i}{\sum_l k_l} \\
 & \approx \frac{k_i}{2mt} [m + (m-1)p] - \frac{(m-1)p\alpha_i}{mt} \\
 & = \frac{k_i}{t} \left(\frac{m + (m-1)p}{2m} \right) \\
 & \quad - \frac{1}{t} \cdot \frac{(m-1)p\alpha_i}{m}, \tag{2}
 \end{aligned}$$

其中, α_i 表示节点 i 度数为 1 的邻节点的个数.

$$\alpha_i = \sum_{j \in \Gamma(i), k_j=1} k_j. \tag{3}$$

$$\text{令 } a = \frac{m + (m-1)p}{2m}, b = \frac{(m-1)p\alpha_i}{m}.$$

$$\frac{dk_i}{dt} = a \frac{k_i}{t} - \frac{b}{t}. \tag{4}$$

当 $p = 0$ 时, $a = 1/2, b = 0$, 网络退化为 BA 无标度网络. 度分布为幂率分布, 其分布指数为 $\gamma = 3$. 当 $0 < p \leq 1$ 时, 如果假定 $\alpha_i = 0$, 求解微分方程 (4), 得到

$$k_i = \left(\frac{t}{i} \right)^\alpha (1 + (m-1)(1-p)). \tag{5}$$

如果 $k_i \propto (t/i)^a$, 那么 k 服从幂率分布^[21], $P(k) \propto k^{-\gamma}$, 因此得到的网络度分布为幂率分布, 其幂率指数 γ 为

$$\gamma = 1 + \frac{2m}{m + (m-1)p}. \tag{6}$$

当 p 分别取最大值 1 和最小值 0 的时候, 对应的网络幂率指数分别为 $\gamma = (2+1)/(2m-1)$ 和 $\gamma = 3$. 因此, 调节 TF 的概率 p , 可以调节网络的幂率指数. 得到的网络是介于 $\gamma = (2+1)/(2m-1)$ 和 $\gamma = 3$ 之间的可调网络模型. 当网络 TF 选取概率相同, $p > 0$ 时, 网络的度分布和网络每一个时间步加入到网络中的边数 m 有关. 极限情况下, $\gamma_{\min} \rightarrow 2$. 因此, 此方法得到的网络模型为幂率指数可调的无标度网络. 幂率分布指数介于 2—3 之间, γ 由每一个时间步加入到网络中的节点数 m 和网络 TF 概率 p 共同决定. 当网络的概率 p 较小时, 网络中度数为 1 的节点数量很小, 可以假设 $\alpha_i = 0$, 进行近似计算.

$\alpha_i \neq 0$ 时, 由于每一个节点具有度数为 1 的邻节点的数目是不确定的, 因此不能用数值方法

分析网络的度分布. 只能对网络模型直接仿真分析, 观察网络的度是否符合幂律分布. 事实上, 对于 EHKI 模型, 每个时间步加入网络中的节点边数是介于 1— m 之间的, 因此 α_i 不可能都等于 0.

2.3 仿真分析

HK 模型中, 网络的度分布是服从幂律分布的, 幂律指数 $\gamma \approx 3$, 在上一节的分析中, EHKI 网络如果对所有的节点都有 $\alpha_i = 0$, 那么网络的度服从幂律指数 2—3 之间的幂律分布. 但实际上当网络的 p 取较小的值时, 网络中度数为 1 的节点概率比较小, 可以采取这种近似计算网络的幂律指数. 但是, 当网络的 p 取值较大, 网络中度数为 1 的邻节点数量明显增多, 则不能用这种近似的推导进行计算. 下面通过计算机模拟, 研究网络的结构特征.

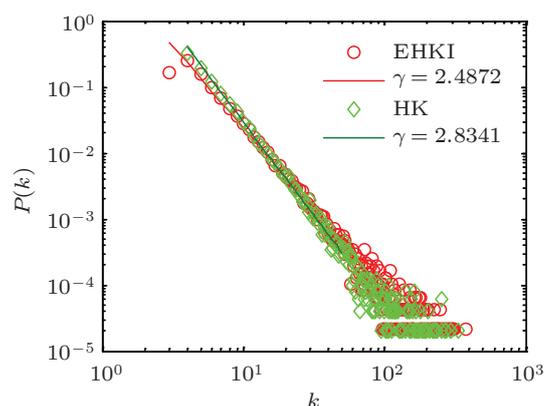


图 1 $m = 4, p = 0.2$ 时 EHKI 与 HK 模型的度分布比较

图 1 给出了网络节点为 5000, $m = 4, p = 0.2$ 时, EHKI 与 HK 模型的度分布比较, 其中 HK 模型的幂律指数 $\gamma = 2.83$, 而 EHKI 的度同样服从幂律分布, 幂律指数 $\gamma = 2.49$. 在很多的真实网络中, 都可以观察到网络的聚类系数是服从幂律分布的, 平均聚类系数 $C(k)$ 按下式定义:

$$C(k) = \frac{1}{NP(k)} \sum_{i/k_i=k} c_i. \tag{7}$$

$C(k)$ 描述了度数为 k 的节点平均聚类系数, $C(k)$ 服从幂率分布, 则网络中度数大的节点具有的聚类系数小, 度数小的节点具有的聚类系数大, 表明网络中度数小的节点之间互相连接比较密切. 图 2 给出了 EHKI 网络与 HK 网络聚类系数的比较. 由图 2 可以看出, 网络 EHKI 与 HK 网络的聚类系数 $C(k)$ 随着网络节点度 k 的增加成幂律衰减.

EHKI 模型与 HK 模型相比, 度数 k 小的节点的聚类系数更小一些, 而度数大的节点的聚类系数更大一些.

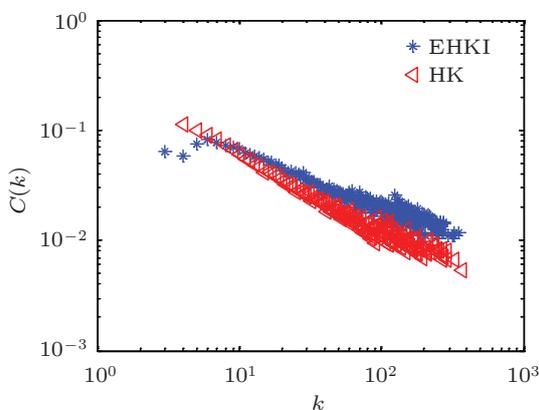


图2 $m = 4, p = 0.2$ 时 EHKI 与 HK 模型的平均聚类系数比较

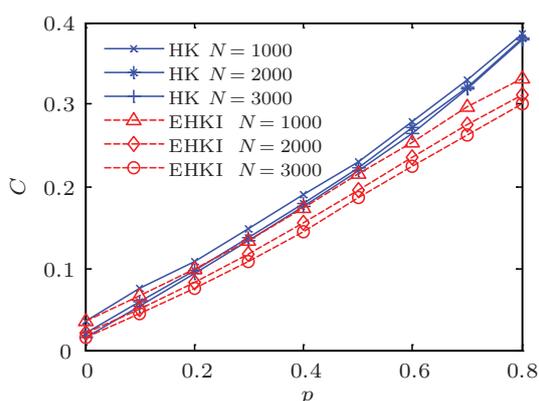


图3 EHKI 与 HK 模型全局聚类系数 C 与可调参数 p 关系的比较

图 3 给出了网络节点为 5000, $m = 4$, EHKI 与 HK 模型平均聚类系数 C 与调节参数 p 的函数关系. 由图 3 可以看出网络规模对 EHKI 的平均聚类系数有一定的影响, 网络规模越大, 相同条件下网络的平均聚类系数越小. 无论网络的规模如何, 平均聚类系数与概率 p 成线性关系. EHKI 与 HK 模型相比, 在相同的网络规模和其他参数下, 网络的平均聚类系数更小. 小世界网络是指具有大的聚类系数和小的平均最短路径的网络, 无标度网络是指度分布服从幂律分布. 而小世界无标度网络需要同时具有以上三个特性. 图 1 显示了 EHKI 模型度分布是服从幂律分布的无标度网络, 图 3 显示了网络的平均聚类系数与概率 p 成线性关系, 可以通过调节参数 p 来调节网络的聚类系数, 使得网络具有大的平均聚类系数.

3 EHKII 高聚类系数网络模型

3.1 EHKII 模型

EHKI 模型中, 新节点加入到网络中时, 有 $1 + (1 - p)(m - 1)$ 条边与网络中的节点相连, 新节点 n 具有的边数在 $1 - m$ 之间波动, 网络中节点的最小度为 1, (2) 式中 α_i 不能确定, 得不到网络节点度的确切分布公式. 如果每个时间步至少有两个 PA 规则, 后面的 $m - 2$ 个才是 TF 规则, 那么在网络的演化过程中, 所有节点的度都大于等于 2. 则可以对网络的度进行公式化描述. 这种情况我们称为 EHKII 模型, 具体描述如下.

1) 初始状态: 网络初始状态含有 m_0 个完全连接的节点.

2) 网络演化: 每一个时间步增加一个节点和 m 条边, 前两条边以 PA 规则选取节点. 其余的 $(m - 2)$ 条边以概率 p 进行 TF 连接, 以概率 $(1 - p)$ 进行 PA 连接. 给定概率 $p \in [0, 1]$.

3) 终止条件: 网络的规模 N 达到所希望的值, 生成了一个网络节点数 N , 边的数量近似为 Nm 的网络模型.

其中, PA 规则和 TF 规则与 EHKI 模型中采用的规则相同. 在网络的演化过程中, 每一个时间步, 网络新加入的节点具有的边数为 $2 + (m - 2)(1 - p)$ 介于 $2 - m$ 之间, 保证了网络的最小度大于等于 2.

3.2 EHKII 的度分布

EHKII 模型中节点 i 的度 k_i 有两种方式增加:

1) 节点 i 按照 PA 规则被选取; 2) 节点 i 的邻节点 j 被 TF 规则选取, 且点 i 被做为增加连接的两个目标节点之一选取.

节点 i 的度按照下式进行演化:

$$\begin{aligned} \frac{dk_i}{dt} &= \frac{2k_i}{\sum_l k_l} + (m - 2)(1 - p) \frac{k_i}{\sum_l k_l} \\ &\quad + (m - 2)p \sum_{j \in \Gamma(i)} \frac{k_j}{\sum_l k_l} \frac{2}{k_j} \\ &= \frac{2k_i}{\sum_l k_l} + (m - 2)(1 - p) \frac{k_i}{\sum_l k_l} \\ &\quad + (m - 2)p \frac{2k_i}{\sum_l k_l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k_i}{\sum_l k_l} [2 + (m-2)(1-p) + 2(m-2)p] \\
 &\approx \frac{k_i}{2mt} [2 + (m-2)(1+p)] \\
 &= \frac{k_i}{t} \left(\frac{2 + (m-2)(1+p)}{2m} \right), \quad (8)
 \end{aligned}$$

网络初始条件为 $t = i$ 时, 节点 i 的度为 $2 + (m - 2)(1 - p)$.

令

$$a_1 = \frac{2 + (m-2)(1+p)}{2m} = \frac{m + (m-2)p}{2m},$$

解微分方程, 得到

$$k_i = (2 + (m-2)(1-p)) \left(\frac{t}{i}\right)^{a_1}. \quad (9)$$

如果 $k_i \propto \left(\frac{t}{i}\right)^{a_1}$, 那么 k 服从幂率分布, $P(k) \propto k^{-\gamma}$, 有 $\gamma = 1 + 1/a_1$. EHKII 模型服从幂律分布, 指数为

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 1 + \frac{2m}{2 + (m-2)(1+p)} \\
 &= \frac{3m + p(m-2)}{m + (m-2)p}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

当 $p = 0$ 时, 网络的度分布为指数 $\gamma = 3$ 的幂率分布, 退化为 BA 无标度网络模型. 当 $p = 1$ 时, 得到网络的幂率指数最小值 $\gamma = 2 + \frac{1}{m-1}$ ($m > 2$), 因此, 所得到的网络模型是度分布可调的网络模型, 幂率指数 $2 + \frac{1}{m-1} \leq \gamma \leq 3$, 由每个时间步加入到网络中的边的数目与网络的 TF 选取概率共同决定.

3.3 仿真分析

对 EHKII 模型的数值分析显示了 EHKII 网络是度分布可调的无标度网络, 度分布的幂律指数 γ 由网络的调节参数 p 和 m 共同决定. 图 4 给出了网络规模为 5000, 参数 $p = 0.2, m = 4$ 的 EHKII 和 HK 网络度分布. 仿真分析验证了 EHKII 网络是度分布异质性可调的网络模型. 图 5 给出了两种模型下平均聚类系数 $C(k)$ 与 k 的关系曲线. 当度很大时, EHKII 网络的平均聚类系数 $C(k)$ 与 k 成幂律分布. 与 HK 网络相比, 度数大的节点具有的聚类系数更大一些. 图 6 给出了两种网络聚类系数与可调参数 p 之间的函数关系. 从图 6 可以看出网络的聚类系数随可调参数的增加而增加, 两者近似成线性关系. 从图 6 可以看出 EHKII 网络在相同参数和网络规模下, 聚类系数的调节能力比 HK 网络弱

一些. 随着网络生长过程中 m 取值的增加, 两个网络的调节能力越接近.

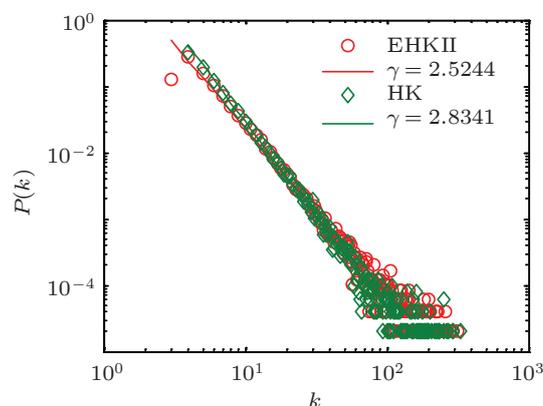


图 4 $m = 4, p = 0.2$ 时 EHKII 与 HK 模型的度分布

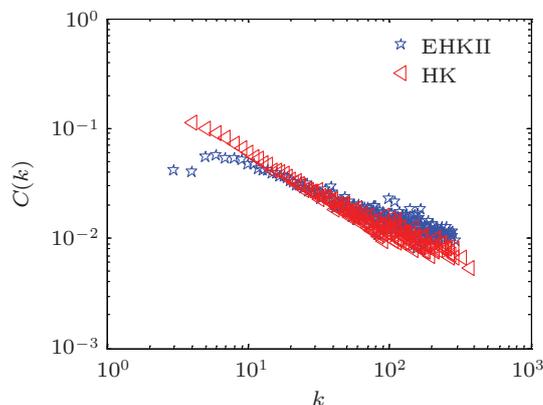


图 5 $m = 4, p = 0.2$ 时 EHKII 与 HK 模型的平均聚类系数

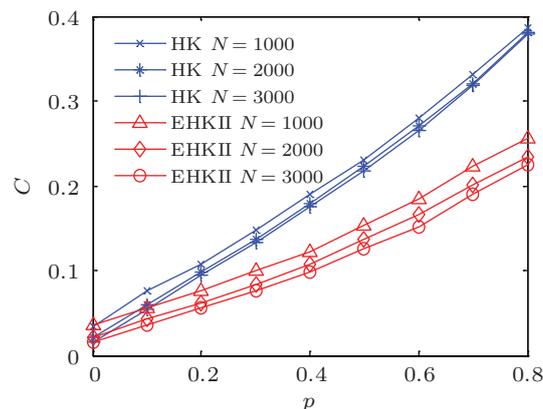


图 6 EHKII 与 HK 模型聚类系数 C 与可调参数 p 关系

综上所述, 本文研究了 HK 模型中 TF 演化机理位置不同时对网络的度分布和聚类系数等结构特性的影响. EHKI 和 EHKII 网络在 HK 模

型的基础上, 将 TF 规则由新节点和旧节点之间扩展到了旧节点之间, 虽然聚类系数的调节能力有所降低, 仍然可以通过调节参数 p 来调节聚类系数, 得到高聚类系数的无标度网络. 并且两种扩展 HK 网络中, 度大的节点具有的聚类系数更大一些. HK 模型是度分布保持不变的无标度网络模型, 将 TF 机理的位置调整后, 扩展 HK 模型的度分布是可以通过参数 p 进行调节的. 通过数值分析, 我们给出了 EHKII 网络的幂律指数的计算公式, $\gamma = 3m + p \cdot (m - 2) / m + (m - 2) \cdot p$. 扩展网络模型的度分布是可调的, 尤其是 EHKII 网络的幂律指数介于 2—3 之间, 比 HK 模型具有固定的幂律指数分布形式更符合实际的网络特征.

4 演化机理与网络同步能力的关系

HK 模型是比较经典的高聚类系数无标度网络模型, 同时具有小世界特性和无标度特性, 比单纯的 WS 小世界网络和 BA 无标度网络更符合实际的网络特征. 我们考虑到三角结构 (TF 规则) 在网络的演化过程中很可能不是限定在新节点和旧节点之间. 因此, 提出了两种扩展的 HK 模型, 研究了这种三角结构位置的变化对网络结构特性带来的影响. 而网络的结构特性变化也会影响着网络的动态特性. 这种演化机理的改变不仅仅是改变了网络的某一个特征参数, 而是几个特征参数同时发生了变化. 这里我们不是单纯的研究网络的某一个结构特性与网络同步能力之间的关系, 而是考虑演化机理对网络同步能力造成的综合性的影响, 希望得到的结论对人造网络的构造有一定的指导意义.

考虑由 1000 个耦合振子组成的网络, 如下式所示:

$$\dot{x}_i = F(x_i) + c \sum_{j=1}^{1000} A_{ij} H(x_j), \quad (11)$$

其中, $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)}) \in R^n$ 为节点 i 的状态变量; 常数 $c > 0$ 为网络的耦合强度; $H(\cdot) : R^n \rightarrow R^n$ 为各节点的输出函数, 这里假设每个节点的输出函数是完全相同的; 耦合矩阵

$$A_{ij} = \begin{cases} -k_i, & i = j, \\ 1, & j \in \Gamma(i), \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (12)$$

$\Gamma(i)$ 表示节点 i 的邻节点. 因为矩阵 A 是半负定且行零和的, A 特征值满足 $0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{1000}$, 因此, 可以用特征值来描述网络同步能力的大小. 对于类型 I 网络特征值 λ_2 越小网络同步能力越强, 类型 II 网络的特征值比值 $R = \lambda_{1000} / \lambda_2$ 越小网络同步能力越强.

首先, 我们研究三角结构演化机理对网络同步能力的影响. 调节参数 p , $p = 0$ 网络没有三角结构连接, 当 p 逐渐增加, 三角结构机理在演化过程中占的比重逐渐增加.

图 7 和图 8 分别给出了网络的耦合结构分别为 HK 网络, EHKI 网络和 EHKII 网络时, 类型 I 网络和类型 II 网络的同步能力与参数 p 的关系, 其中 $m = 4$. 图 7 中, 用 \circ 符号标记的曲线为 HK 耦合网络, 用三角 Δ 标记的是 EHKI 网络, 用 * 标记的是 EHKII 网络. 从图 7 可以看出, 对于类型 I 网络而言, 随着 p 的增加, 三种网络的同步能力变弱. EHKII 网络与其余两种网络相比, 同步能力受参数 p 的影响比较小. 当参数 $p = 1$ 时, 网络中三角结构机理所占的比重达到最大时, EHKII 网络比 HK 和 EHKI 这两种网络的同步能力更强一些. 当 p 较小时, HK 网络比两种扩展的 HK 网络同步能力强. $p < 0.8$, 即 p 较小时, 将三角结构从新旧节点之间扩展到了旧节点之间降低了类型 I 网络的同步能力.

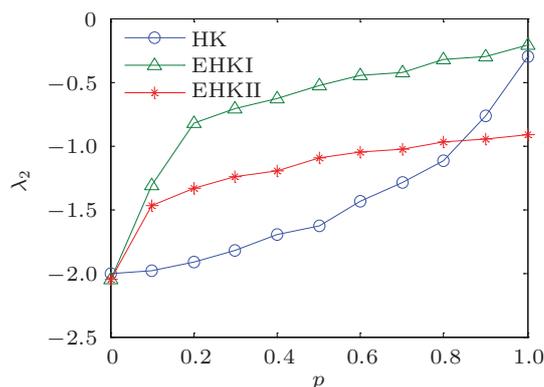


图 7 三种不同网络第二大特征值 λ_2 与概率 p 的关系

从图 8 可以看出, 类型 II 网络同步能力随着三角结构所占比重的增加而降低, 得到和类型 I 网络同样的结论. p 较小时, 将三角结构从新旧节点之间扩展到了旧节点之间降低了类型 II 网络的同步能力. Kim 研究小组在 2007 年发表的研究成果认为聚类系数越大, 网络同步能力越弱 [22]. 但是我们的

研究发现, 本文所提的扩展 HK 网络比原始 HK 网络的平均聚类系数小, 而扩展 HK 网络同步能力却比原始 HK 网络弱, 这主要是因为扩展 HK 网络度分布异质性增加造成的. 因此我们的成果可以认为是文献 [22] 研究成果的一个特例和补充.

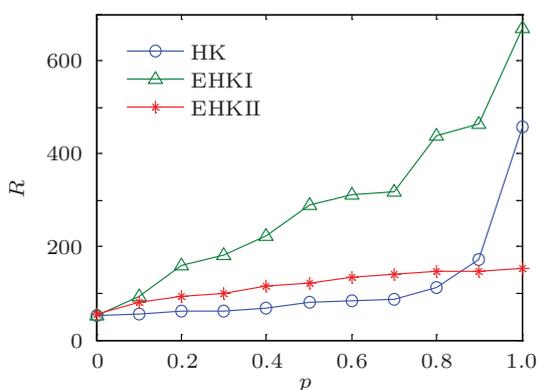


图 8 三种不同网络特征值 R 与概率 p 的关系

接的比例不变, 但是两种连接的边数都增加. 图 9 给出了类型 I 网络同步能力与参数 m 的变化关系, 图 10 给出了类型 II 网络同步能力与参数 m 的变化关系. 无论是扩展 HK 网络还是 HK 网络, 两种同步类型网络的同步能力随着 m 的增加而增强.

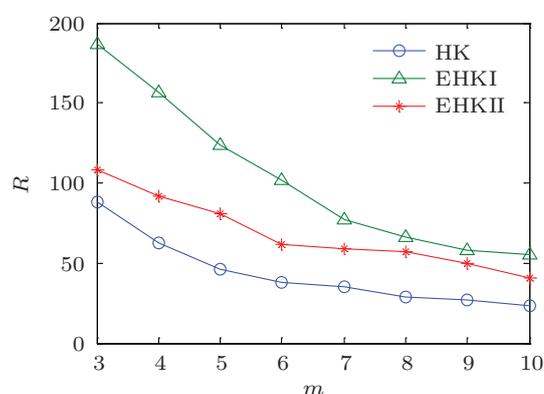


图 10 三种不同网络特征值 R 与参数 m 的关系

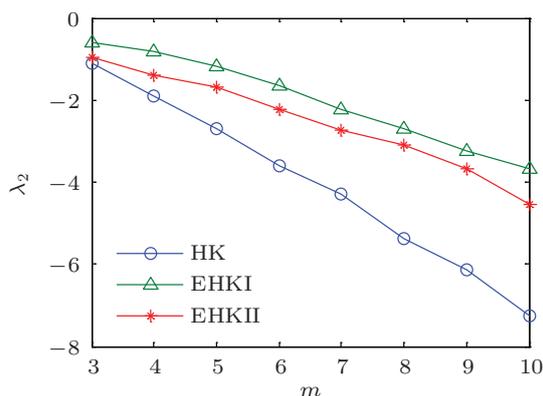


图 9 三种不同网络第二大特征值 λ_2 与参数 m 的关系

除了参数 p 外, 参数 m 对网络同步能力也存在着影响. m 表示每个时间步加入到网络中的边的数目. 当 p 固定, m 增加时, 网络中三角连接和优先连

5 结论

本文基于高聚类系数的经典无标度网络模型 HK 模型, 提出了两种扩展的 HK 网络模型 EHKI 和 EHKII. 所提出的扩展 HK 网络, 将三角结构机理扩展到了旧节点之间, 网络旧节点之间的结构特性同样参与了网络的演化过程, 网络新节点加入时所具有的边也是概率性的选择不同的边数连接到网络中来. 对扩展 HK 网络的理论和数值仿真分析表明, 所提出的两种扩展 HK 网络模型的度分布和聚类系数都是参数可调的, 是高聚类系数的无标度网络模型, 比较符合实际的网络特征. 在三角结构所占比重较小时, 扩展 HK 网络与 HK 网络相比, 网络的度分布异质性增强, 网络的平均聚类系数减小, 但是网络的同步能力变弱.

- [1] Lü L, Li G, Cai Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7517(in Chinese) [吕翎, 李钢, 柴元 2008 物理学报 **57** 7517]
- [2] Yang X K, Cai L, Zhao X H, Feng Z W 2008 *Acta Phys. Sin.* **59** 3740 (in Chinese) [杨晓阔, 蔡理, 赵晓辉, 冯朝文 2010 物理学报 **59** 3740]
- [3] Li J, Wang B H, Jiang P Q, Zhou T, Wang W X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4051 (in Chinese) [李季, 汪秉宏, 蒋品群, 周涛, 王文旭 2006 物理学报 **55** 4051]
- [4] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature (London)* **393** 440
- [5] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [6] Gao J X, Havlin S, Xu X M, Stanley E H 2011 *Phys. Rev. E* **84** 046115
- [7] Yuan W J, Zhou C S 2011 *Phys. Rev. E* **84** 016116
- [8] Zeng A, Son S W, Yeung C H, Fan Y, Di Z 2011 *Phys. Rev. E* **83** 045101
- [9] Watanabe T, Masuda N 2010 *Phys. Rev. E* **82** 046102
- [10] Gorochowski T E, Bernardo M D, Grierson C S 2010 *Phys. Rev. E* **81** 056212
- [11] Zhu J F, Zhao M, Yu W W, Zhou C S, Wang B H 2010 *Phys. Rev. E* **81** 026201

- [12] Holme P, Kim B J 2002 *Phys. Rev. E* **65** 026107
- [13] Li W G, Wang L H, Chen M F 2009 *Comp. Eng.* **35** 121 (in Chinese) [李稳国, 王力虎, 陈明芳 2009 计算机工程**35** 121]
- [14] Zhang Z Z, Rong L L, Wang B, Zhou S G, Guan J H 2007 *Physica A* **380** 639
- [15] Pan X F, Wang X F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4058 (in Chinese) [潘灶烽, 汪小帆 2006 物理学报 **55** 4058]
- [16] Wu X, Wang B H, Zhou T, Wang W X, Zhao M, Yang H J 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 1046
- [17] Zhou T, Xiao W K, Ren J, Wang B H 2007 *Complex Syst. Complex Sci.* **4** 10 (in Chinese) [周涛, 肖伟科, 任捷, 汪秉宏 2007 复杂系统与复杂性科学 **4** 10]
- [18] Xiao W K, Ren J, Feng Q, Song Z W, Zhu M X, Yang H F, Jin H Y, Wang B H, Zhou T 2007 *Phys. Rev. E* **76** 037102
- [19] Yang H X, Wang B H, Liu J G, Han X P, Zhou T 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 2718
- [20] Cui A X, Fu Y, Shang M S, Chen R B, Zhou T 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 038901 (in Chinese) [崔爱香, 傅彦, 尚明生, 陈端兵, 周涛 2011 物理学报 **60** 038901]
- [21] Barrat A, Barthelemy M, Vespignani A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 228701
- [22] Wang B, Zhou T, Xiu Z L, Kim B J 2007 *Eur. Phys. J. B* **60** 89

Extended Holme-Kim network model and synchronizability*

Wang Dan^{1)†} Jing Yuan-Wei²⁾ Hao Bin-Bin²⁾

1) (Key Laboratory of Manufacturing Industrial Integrated Automation, Shenyang University, Shenyang 110044, China)

2) (College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

(Received 2 December 2011; revised manuscript received 5 June 2012)

Abstract

The relations between two highly clustered scale-free network evolution mechanisms and synchronizability are studied in this paper. Firstly, we propose an extended Holme and Kim (EHK) model with adjustive clustering coefficients and power-law exponent based on the Holme and Kim (HK) model. Triad formation mechanism is extended among old nodes compared with the HK model. And the following shortages of HK model are settled: there is no link evolution in old nodes and the numbers of links of a new node adding to network is fixed. Secondly, the effect of triad formation on synchronizability in an unweighted network is investigated. Finally, simulation results show that the triad formation mechanism can weaken the synchronizability of both types of networks.

Keywords: scale-free network, clustering coefficient, synchronizability

PACS: 05.90.+m, 02.50.-r

* Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61203152, 61104029), and the Science Research Foundation for Doctor of Liaoning Province of China (Grant No. 2021040).

† E-mail: wangdan0307@126.com