

# 多级反射镜阵列 Monte Carlo 法误差合成与统计分析\*

吕金光<sup>1)2)</sup> 梁静秋<sup>1)†</sup> 梁中燾<sup>1)</sup>

1) (中国科学院长春光学精密机械与物理研究所应用光学国家重点实验室, 长春 130033)

2) (中国科学院研究生院, 北京 100049)

(2012年5月4日收到; 2012年6月6日收到修改稿)

本文研究的傅里叶变换红外光谱仪利用两面多级反射镜阵列替代时间调制型傅里叶变换光谱仪中的平面反射镜, 以多级反射镜阵列对干涉图数据进行二维采样, 从而减小系统的体积并增加系统的稳定性. 由于多级反射镜阵列在其制作过程中加工精度的限制, 各子反射镜之间会存在厚度偏差  $\varepsilon$  与角度偏差  $\theta$ , 这将影响到采样干涉图的光强分布与复原光谱的质量. 本文将各子反射镜的  $\varepsilon$  与  $\theta$  作为随机变量, 利用 Monte Carlo 方法对傅里叶变换光谱仪中所有子反射镜的误差项进行合成, 并通过对误差合成后光谱误差因子  $Q$  的统计分析来评价子反射镜的各误差项对复原光谱的影响. 统计结果表明,  $Q$  的统计均值随着  $\sigma_\varepsilon$  与  $\sigma_\theta$  的增加表现为一单调递增的曲面, 且与两个偏差之间具有准线性关系. 依据对  $Q$  的统计分析, 可以确定多级反射镜阵列各子反射镜  $\varepsilon$  与  $\theta$  的容限.

**关键词:** 傅里叶变换光谱仪, 多级反射镜, 误差合成, Monte Carlo 法

**PACS:** 07.57.Ty, 06.20.Dk, 02.50.-r

## 1 引言

傅里叶变换光谱仪由于其多通道、高通量、高精度和低杂光等优点在光谱测量与光谱分析领域有着十分广泛的应用<sup>[1,2]</sup>. 目前普遍应用的傅里叶变换光谱仪光程差的调制方式多为时间调制, 其对干涉图数据的采样均是通过利用程控系统驱动平面反射镜扫描光程差来实现的. 时间调制型的傅里叶变换光谱仪动镜扫描的采样系统, 限制了光程差采样点的精度与系统的稳定性, 并且增加了仪器整机的尺寸和重量<sup>[3]</sup>. 为了克服时间调制傅里叶变换光谱仪的这些弊端, 国内外的许多大学与研究机构陆续开展了静态傅里叶变换光谱仪的研究. 2002年, 瑞士 Neuchâtel's 微技术研究所提出了一种使用倾斜平面镜代替传统 Michelson 干涉仪中动镜以获得不同光程差干涉图样的静态傅里叶变换光谱仪

模型<sup>[4]</sup>, 该模型成功去除了动镜及其驱动结构, 但由于倾斜镜的倾斜角度有限, 光谱分辨率较低; 2006年, 瑞典 Mid-Sweden 大学提出了一种基于楔状 F-P 标准具阵列的傅里叶变换光谱仪<sup>[5]</sup>, 其波长选择能力很强, 适合于窄带光谱的测量; 2009年, 电子测试技术国家重点实验室设计了一种基于等效斜楔干涉具的小型静态傅里叶变换光谱仪<sup>[6]</sup>, 其光谱范围窄, 适合进行单波长脉冲的探测.

为适应宽光谱范围的测量, 并提高光谱的分辨率, 我们设计了一种以多级反射镜阵列为核心元件的静态傅里叶变换光谱仪<sup>[7-11]</sup>. 由于多级反射镜阵列加工方法与加工精度的限制, 其各个子反射镜之间会存在一定的厚度偏差与角度偏差. 在对复原光谱进行评价时, 需要对所有子反射镜的误差项进行合成. 由于傅里叶变换光谱是一个积分方程的形式, 因此采用传统的全微分方法进行误差合成将是十分复杂的. 本文利用 Monte Carlo 方法对多级反

\* 国家自然科学基金 (批准号:61027010, 60977062)、国家高技术研究发展计划 (批准号:2009AA04Z315)、吉林省科技发展计划 (批准号:201205025) 和应用光学国家重点实验室自主基金资助的课题.

† E-mail: liangjq@ciomp.ac.cn

射镜阵列所有子反射镜的误差项进行合成, 然后通过光谱误差因子的统计分析来评价厚度偏差与角度偏差对复原光谱的影响.

## 2 仪器原理

基于多级反射镜阵列的傅里叶变换光谱仪的原理如图 1 所示. 仪器利用两面具有相同级数的多级反射镜阵列代替传统 Michelson 干涉仪的平面反射镜, 多级反射镜的阶梯间隔  $d$  遵循 Nyquist-Shannon 采样定理, 并且两面多级反射镜遵循光程差互补原则. 将两面多级反射镜正交放置, 可以将空间光场分割成许多个定域. 由于多级反射镜阵列的阶梯结构, 导致入射到不同台阶上的光具有不同的光程, 从而使出射光场中在不同区域内发生相干的两束光具有不同的光程差. 光程差的分布由多级反射镜的级数和阶梯间隔所决定, 即

$$\delta(l, m) = (Mm - l) \times 2d, \quad (1)$$

式中  $l, m$  分别为两面多级反射镜阵列中子反射镜的序数,  $M$  为多级反射镜阵列的级数,  $d$  为多级反射镜阵列的阶梯间隔.

通过二维探测器阵列对由多级微反射镜形成的各个定域的干涉光强信息进行记录, 并根据空域中光程差的排列方式, 将采集到的二维干涉图像展开成与光程差排列方式相一致的等间隔采样的一维干涉图序列  $I[\delta(n)]$ ; 然后对其进行离散傅里叶变换运算, 即可反演出入射光信号的光谱信息.

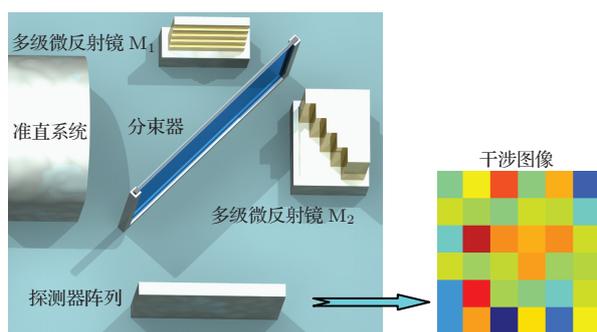


图 1 基于多级反射镜阵列的傅里叶变换光谱仪原理图

图 2 是利用倾角叠片法制作多级反射镜阵列的示意图. 通过调节基板与基底之间的夹角, 可以使基板上的各个基片之间形成特定的相对平移量. 将每一个基片的下表面作为一个子反射面, 则每一

个基片相当于一个子反射镜. 设每一片基片的厚度为  $a$ , 各片基片之间要求的相对平移量为  $b$ , 则基板与基底之间夹角  $\Phi$  为

$$\Phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \quad (2)$$

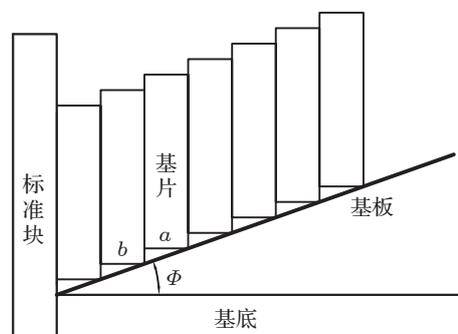


图 2 多级反射镜阵列制作方法示意图

## 3 理论计算模型

多级反射镜阵列在制作的过程中, 由于单个基片加工精度及基片定位精度的限制, 各个子反射镜之间会存在厚度偏差与角度偏差, 如图 3 所示. 这时多级反射镜阵列各个子反射镜的厚度相对于理想厚度值会有不同程度的偏差, 同时各个子反射镜的反射平面相对于理想的反射平面也会存在不同的倾角.

先以一个子反射镜为例, 分析其误差的存在对于采样光程差的影响. 设某一子反射镜  $m$  的厚度相对于理想厚度的偏差为  $\varepsilon(m)$ , 其反射平面相对于理想反射平面的角度偏差为  $\theta(m)$ , 如图 3 所示.

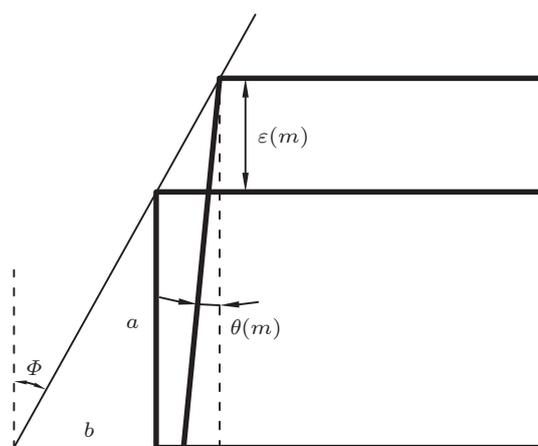


图 3 第  $m$  个子反射镜的厚度偏差与角度偏差

根据图 3 可以得到,  $\varepsilon(m)$  与  $\theta(m)$  导致第  $m$  个子反射镜所对应的附加光程差为

$$\Delta\delta(m) = 2\{\varepsilon(m) \tan \Phi - [a + \varepsilon(m)] \tan \theta(m)\}. \quad (3)$$

由此, 接收平面上实际探测到的干涉图像的光强分布为

$$I(l, m) = \int_0^\infty B(v) \times \exp\{j2\pi\nu[2(Mm - l)d + 2\varepsilon(m) \tan \Phi - 2[a + \varepsilon(m)] \tan \theta(m)]\} dv. \quad (4)$$

将二维的干涉图像还原为一维的干涉图序列  $I[\delta(n)]$ , 再对其进行离散傅里叶变换复原出入射光信号的光谱信息

$$B[\nu(k)] = \text{DFT}\{I[\delta(n)]\}. \quad (5)$$

在光谱复原的过程中, 共有  $2M$  个误差项, 其中有  $M$  个厚度误差项  $\varepsilon(1) \sim \varepsilon(M)$ ,  $M$  个角度误差项  $\theta(1) \sim \theta(M)$ . 为了表征  $2M$  个误差项对于复原光谱的影响, 采用如下误差因子作为光谱评价函数:

$$Q = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} |B'[\nu(k)] - B[\nu(k)]|}{\sum_{k=0}^{N-1} B[\nu(k)]}, \quad (6)$$

其中  $B[\nu(k)]$  为没有误差时的理想光谱,  $B'[\nu(k)]$  为含有误差时还原得到的实际光谱.

## 4 Monte Carlo 法误差合成

光谱反演公式是一个傅里叶变换积分方程, 应用传统的全微分方法对含有  $M$  个厚度误差项和  $M$  个角度误差项的  $2M$  项误差进行合成, 并由以此来评价  $\varepsilon$  与  $\theta$  对复原光谱的影响将是十分繁琐的<sup>[12]</sup>. 为了简化误差合成的过程, 这里我们将  $M$  个厚度误差项和  $M$  个角度误差项作为随机变量, 采用 Monte Carlo 方法, 即统计实验的方法来进行误差的合成. 设  $M$  个厚度随机变量具有相同的厚度标准偏差, 每一个厚度随机变量的标准偏差为  $\sigma_\varepsilon$ ;  $M$  个角度随机变量具有相同的角度标准偏差, 每一个角度随机变量的标准偏差为  $\sigma_\theta$ .

假设  $M$  个厚度随机变量和  $M$  个角度随机变量各自统计独立, 且均服从正态分布<sup>[13]</sup>, 则其联合概率密度函数可以表示为

$$f[\varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(M), \theta(1), \theta(2), \dots, \theta(M)]$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon\sigma_\theta}\right)^M \exp\left[-\frac{\sum_{m=1}^M \varepsilon^2(m)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right] \times \exp\left[-\frac{\sum_{m=1}^M \theta^2(m)}{2\sigma_\theta^2}\right]. \quad (7)$$

对应  $M$  个厚度随机变量, 产生  $M$  个标准正态分布随机数序列  $S(i, m)$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, I, I$  为计算采样数,  $m = 1, 2, \dots, M$ . 同理, 对应  $M$  个角度随机变量, 产生  $M$  个标准正态分布随机数序列  $T(i, m)$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, I, m = 1, 2, \dots, M$ . 因此, 第  $i$  个计算采样点处的第  $m$  个厚度随机误差与第  $m$  个角度随机误差分别为

$$\varepsilon(i, m) = \pm S(i, m) \cdot \sigma_\varepsilon(m) = \pm S(i, m) \cdot \sigma_\varepsilon, \quad (8)$$

$$\theta(i, m) = \pm T(i, m) \cdot \sigma_\theta(m) = \pm T(i, m) \cdot \sigma_\theta. \quad (9)$$

根据 (8) 式和 (9) 式, 则对应第  $m$  个子反射镜的第  $i$  个计算采样点处的附加光程差为

$$\Delta\delta_i(m) = 2\varepsilon(i, m) \tan \Phi - 2[a + \varepsilon(i, m)] \tan \theta(i, m). \quad (10)$$

当多级反射镜阵列各子反射镜之间不存在各项偏差时, 即  $\Delta\delta(m) = 0$ , 根据 (4) 与 (5) 式, 通过计算可以得到理想的采样干涉图序列  $I[\delta(n)]$  与理想的反演光谱  $B[\nu(k)]$ , 如图 4 与图 5 所示.

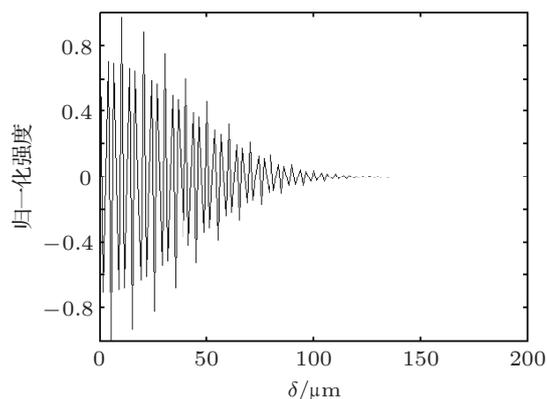


图 4 理想情况下的干涉图函数

同理, 当多级反射镜阵列各子反射镜之间存在误差项时, 根据 (4), (5) 和 (10) 式, 对应每一个计算采样点, 可以得到  $\varepsilon$  与  $\theta$  作用下的采样干涉图序列  $I_i(n)$  与反演光谱序列  $B_i(k)$ <sup>[14-19]</sup>. 本文中采样点数取  $I = 1000$ , 图 6 与图 7 是  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $b = 20 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $\sigma_\theta = 2 \times 10^{-5} \text{ rad}$  时

第  $i = 500$  个计算采样点处的采样干涉图序列与反演光谱曲线. 将其与图 4 和图 5 相比较可以看出, 干涉图中出现了细微的波纹, 并且复原光谱中谱线出现了明显的畸变.

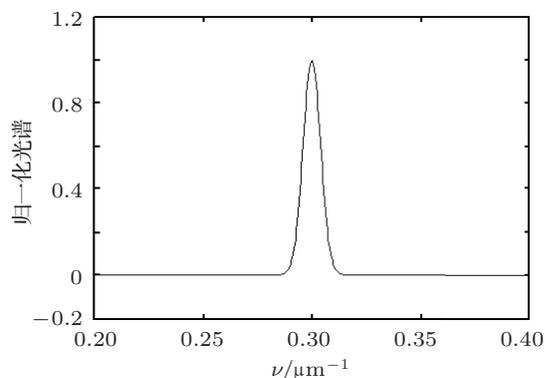


图 5 理想干涉图函数反演的光谱曲线

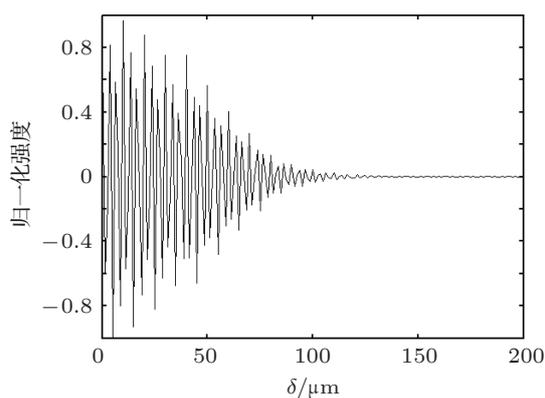


图 6 第  $i = 500$  个计算采样点处的干涉图

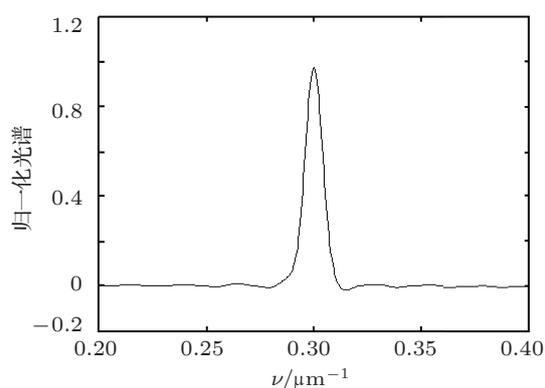


图 7 第  $i = 500$  个计算采样干涉图反演的光谱

根据 (6) 式, 对每一个计算采样点所得到的反演光谱序列  $B_i(k)$ , 计算其光谱误差因子  $Q(i)$ , 因此我们可以获得一个长度为  $I$  的光谱误差因子序列. 通过对光谱误差因子序列进行统计分析, 就可以获

得多级反射镜阵列所有子反射镜的  $\varepsilon$  与  $\theta$  的合成误差对于复原光谱影响的统计特性, 如图 8 所示.

图 8 为  $\sigma_\varepsilon = 1 \mu\text{m}$ ,  $\sigma_\theta = 2 \times 10^{-5} \text{ rad}$  时的各子反射镜的  $\varepsilon$  与  $\theta$  随机波动产生的光谱误差因子的区间概率分布情况, 即  $Q$  的统计直方图. 由统计分布直方图可以得到光谱误差因子的最小值为 0.003, 最大值为 0.320, 统计均值为 0.084.

针对不同的厚度标准偏差  $\sigma_\varepsilon$  与角度标准偏差  $\sigma_\theta$ , 我们根据光谱误差因子的统计直方图, 可以得到其统计均值随不同  $\sigma_\varepsilon$  与  $\sigma_\theta$  的变化情况, 如图 9 所示.

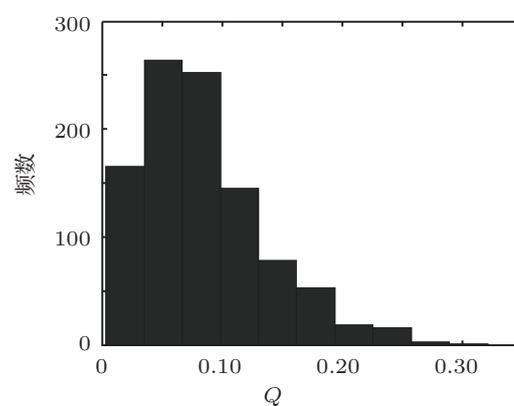


图 8 光谱误差因子的统计直方图

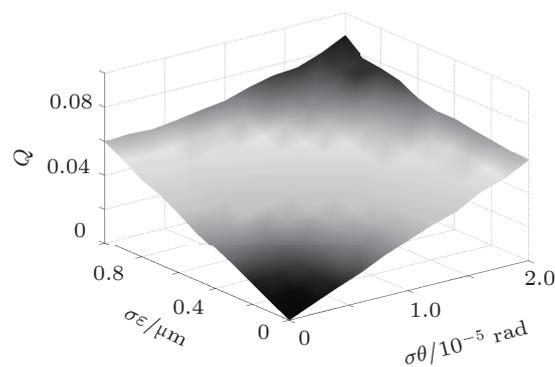


图 9 光谱误差因子随厚度偏差与角度偏差的变化曲面

由图 9 可以看出, 光谱误差因子的统计均值随着  $\sigma_\varepsilon$  与  $\sigma_\theta$  的增加表现为一个单调递增的曲面. 由图中还可以看出, 当  $\sigma_\theta = 0 \text{ rad}$  时,  $Q$  随  $\sigma_\varepsilon$  的递增速率约为  $0.06 \mu\text{m}^{-1}$ ; 当  $\sigma_\varepsilon = 0 \mu\text{m}$  时,  $Q$  随  $\sigma_\theta$  的递增速率约为  $3 \text{ mrad}^{-1}$ . 因此, 光谱误差因子与厚度标准偏差和角度标准偏差的关系可以看做是一种准线性关系. 所以, 在对多级反射镜阵列进行制作的过程中, 依照光谱误差因子与  $\sigma_\varepsilon$  和  $\sigma_\theta$  之间的关系, 就可以根据仪器需要的  $Q$  值得到多级反射

镜阵列各子反射镜  $\varepsilon$  与  $\theta$  的容限. 对于本系统, 若要求光谱误差因子  $Q < 0.1$ , 则子反射镜的厚度标准偏差应该满足  $\sigma_\varepsilon \leq 1 \mu\text{m}$ , 角度标准偏差应该满足  $\sigma_\theta \leq 2 \times 10^{-5} \text{ rad}$ .

## 5 结论

由于基于多级反射镜的傅里叶变换光谱仪中多级反射镜阵列制作方法与制作精度的限制, 多级反射镜阵列的各个子反射镜之间会存在一定的厚度偏差  $\varepsilon$  与角度偏差  $\theta$ , 而这些误差会导致各个干涉区域带有一定的附加光程差, 从而影响干涉图的光强分布与复原光谱的质量. 为了分析多级反射镜阵列各误差项对于复原光谱的影响, 需要对反射镜阵列所有子反射镜的  $\varepsilon$  与  $\theta$  进行误差的综合. 本文将多级反射镜阵列中各子反射镜的  $\varepsilon$  与  $\theta$  作为

随机变量, 并假设各子反射镜具有相同的厚度标准偏差  $\sigma_\varepsilon$  与角度标准偏差  $\sigma_\theta$ , 然后应用 Monte Carlo 法对傅里叶变换光谱函数中所有子反射镜的误差项进行合成, 并将光谱误差因子  $Q$  作为光谱评价函数, 通过对误差合成后光谱误差因子的统计分析来评价多级反射镜阵列中子反射镜的各误差项对复原光谱的影响. 通过对不同厚度偏差与不同角度偏差下光谱误差因子的统计分析, 发现光谱误差因子的统计均值随着  $\sigma_\varepsilon$  与  $\sigma_\theta$  的增加表现为一单调递增的曲面, 并且与厚度偏差和角度偏差之间具有准线性关系. 根据光谱误差因子与  $\varepsilon$  和  $\theta$  之间的关系, 在对多级反射镜阵列进行制作的过程中, 就可以确定多级反射镜阵列各子反射镜厚度偏差与角度偏差的容限. 当要求  $Q < 0.1$  时,  $\varepsilon$  与  $\theta$  应满足  $\sigma_\varepsilon \leq 1 \mu\text{m}$  和  $\sigma_\theta \leq 2 \times 10^{-5} \text{ rad}$ .

- [1] Weng S F 2005 *Fourier Transform Infrared Spectrometer* (Beijing: Chemical Industry Press) p34 (in Chinese) [翁诗甫 2005 傅里叶变换红外光谱仪 (北京: 化学工业出版社) 第 34 页]
- [2] Zhu L, Chen M X, Fang J, Liu Y, Wang A 2010 *Optics and Precision Engineering* **18** 2537 (in Chinese) [朱灵, 陈明星, 方杰, 刘勇, 王安 2010 光学精密工程 **18** 2537]
- [3] Zeng L B, Yin B S, He B, Gong D 2006 *Optics and Precision Engineering* **14** 191 (in Chinese) [曾立波, 尹邦胜, 何冰, 龚丹 2006 光学精密工程 **14** 191]
- [4] Manzardo O 2002 *M.S. Dissertation* (Switzerland: Neuchatel University)
- [5] Anatoliy M, Henrik A, Goran T, Hans-Erik N 2006 *Proc. of SPIE* **6395** 639504
- [6] Tian E M, Zhang J L, Li X, Zhang Y, Wang Z B 2009 *Spectrosc. Spect. Anal.* **29** 853 (in Chinese) [田二明, 张记龙, 李晓, 张悦, 王志斌 2009 光谱学与光谱分析 **29** 853]
- [7] Fu J G, Liang Z Z, Liang J Q 2010 *Spectrosc. Spect. Anal.* **30** 3203 (in Chinese) [付建国, 梁中燾, 梁静秋 2010 光谱学与光谱分析 **30** 3203]
- [8] Lv J G, Liang Z Z, Fu J G, Liang J Q 2011 *Spectrosc. Spect. Anal.* **31** 2865 (in Chinese) [吕金光, 梁中燾, 付建国, 梁静秋 2011 光谱学与光谱分析 **31** 2865]
- [9] Lv J G, Liang J Q, Liang Z Z, Fu J G 2012 *Spectrosc. Spect. Anal.* **32** 259 (in Chinese) [吕金光, 梁静秋, 梁中燾, 付建国 2012 光谱学与光谱分析 **32** 259]
- [10] Feng C, Liang J Q, Liang Z Z 2011 *Appl. Opt.* **50** 6377
- [11] Feng C, Wang B, Liang Z Z, Liang J Q 2011 *J. Opt. Soc. Am. B* **28** 1
- [12] Fei Y T 2004 *Error Theory And Data Processing* (Beijing: China Machine Press) p55 (in Chinese) [费业泰 2004 误差理论与数据处理 (北京: 机械工业出版社) 第 55 页]
- [13] Gao W S, Pan W 2004 *Random Mathematics* (Beijing: Higher Education Press) p53 (in Chinese) [高文森, 潘伟 2004 随机数学 (北京: 高等教育出版社) 第 53 页]
- [14] Xiang L B, Yuan Y, Lv Q B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5399 (in Chinese) [相里斌, 袁艳, 吕群波 2009 物理学报 **58** 5399]
- [15] Lv Q B, Yao T, Xiang L B, H M 2010 *Spectrosc. Spect. Anal.* **30** 114 (in Chinese) [吕群波, 姚涛, 相里斌, 黄旻 2010 光谱学与光谱分析 **30** 114]
- [16] Jian X H, Zhang C M, Zhang L, Zhao B C 2010 *Opt. Express* **18** 5674
- [17] Jian X H, Zhang C M, Zhu B H, Ren W Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6131 (in Chinese) [简小华, 张淳民, 祝宝辉, 任文艺 2010 物理学报 **59** 6131]
- [18] Zhang C M, Jian X H 2010 *Opt. Lett.* **35** 366
- [19] Zhang C M, Huang W J, Zhao B C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5479 (in Chinese) [张淳民, 黄伟健, 赵葆常 2010 物理学报 **59** 5479]

# Error synthesis and statistical analysis on stepped mirror array by Monte Carlo method\*

Lü Jin-Guang<sup>1)2)</sup> Liang Jing-Qiu<sup>1)†</sup> Liang Zhong-Zhu<sup>1)</sup>

1) (*State Key Laboratory of Applied Optics, Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China*)

2) (*Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

( Received 4 May 2012; revised manuscript received 6 June 2012 )

## Abstract

To achieve the miniaturization and the static state of the Fourier transform spectrometer, two stepped mirror arrays are introduced into the time-modulation Fourier transform spectrometer to replace of the plane mirrors. The two stepped mirrors can sample the interferogram data in two-dimensional space, which can reduce the size of the instrument and increase the stability of the system. Due to the precision restriction on the stepped mirrors in the fabrication process, the various sub-mirrors of the stepped mirrors may contain various thickness errors and angle errors, which can affect the distribution of the interferogram and the quality of the spectrum. We regard the thickness error and the angle error of all the sub-mirrors as random variables, and synthesize all the error terms into a Fourier transform integration function using Monte Carlo method. By means of statistic analysis on the spectrum error factor, we can appraise the recovered spectrum affected by the thickness error and the angle error of the sub-mirror. The statistical result indicates that the statistical mean of the spectrum error factor increases with thickness standard deviation and angle standard deviation increasing. According to the statistical analysis on spectrum error factor, the tolerances of the thickness standard deviation and the angle standard deviation of the sub-mirror can be determined in the fabrication process of the stepped mirrors.

**Keywords:** Fourier transform spectrometer, stepped mirrors, error synthesis, Monte Carlo method

**PACS:** 07.57.Ty, 06.20.Dk, 02.50.-r

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61027010, 60977062), the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2009AA04Z315), the Jilin Province Science and Technology Development Plan (Grant No. 201205025), and the State Key Lab. of Applied Optics.

† E-mail: liangjq@ciomp.ac.cn