

光滑粒子动力学 SPH 方法应力不稳定性的 一种改进方案

杨秀峰 刘谋斌[†]

(中国科学院力学研究所, 水动力学与海洋工程重点实验室, 北京 100190)

(2012 年 3 月 16 日收到; 2012 年 6 月 12 日收到修改稿)

光滑粒子动力学方法是一种拉格朗日型无网格粒子方法, 在模拟大变形和自由表面流方面具有特殊的优势, 已经在工程和科学领域得到了广泛的应用. 然而, 长期以来, 传统光滑粒子动力学方法一直受到应力不稳定性的困扰, 从而限制了它的进一步发展和应用. 应力不稳定性的根本原因在于应力状态与核函数的不匹配: 负压状态下粒子间产生吸引力, 吸引力随着粒子间距的减小而增大, 导致拉伸不稳定性; 正压状态下粒子间产生排斥力, 排斥力随着粒子间距的减小而先增大后减小, 导致压缩不稳定性. 本文通过改进光滑粒子动力学方法的核函数和离散格式, 使得无论在正压还是负压状态下粒子间的作用力恒为排斥力, 且排斥力随着粒子间距的减小而增大, 从而防止粒子聚集等现象, 解决应力不稳定问题. 分别使用改进前后的光滑粒子动力学方法模拟两个典型的应力不稳定算例, 结果表明本文的改进方法能够有效地消除应力不稳定性.

关键词: 光滑粒子动力学, 稳定性, 核函数, 离散格式

PACS: 47.11.-j, 02.70.-c, 46.15.-x

1 引言

光滑粒子动力学 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 方法是一种纯粹的无网格拉格朗日粒子方法, 也是最早的无网格方法之一, 由 Lucy^[1]、Gingold 和 Monaghan^[2] 在 1977 年提出. 经过几十年的发展, SPH 方法已经在天体物理、气体动力学、不可压缩流、多相流、爆炸、水下爆炸、高速碰撞、弹性体和固体力学等方面得到了广泛应用^[3-6]. 但是, 传统的 SPH 方法存在一个严重的内在缺陷: 应力不稳定性^[7,8]. 因为应力不稳定现象最早是在拉伸状态下发现的, 所以也称为张力不稳定性或拉伸不稳定性 (tensile instability). 由于压缩状态下也存在类似的不稳定性, 故可以统称为应力不稳定性. 应力不稳定性会导致粒子聚集、飞散、或形成局部线性结构, 甚至导致计算崩溃. 根据 Swegle 等^[7] 的稳定性分析, SPH 方法

的应力不稳定性取决于应力状态和核函数二阶导数乘积的正负. 张嘉钟和郑俊等^[9,10] 利用小量摄动和线性化研究了矩阵形式的 SPH 方法的应力不稳定性, 得到了与 Swegle 等相同的应力不稳定条件, 并进一步探讨了算法稳定的物理意义, 以及满足应力稳定必要条件的人工声速、光滑长度和密度压缩率. Morris^[11] 研究了 SPH 方法不同离散格式的稳定性, 指出各种离散格式的应力不稳定性并不相同.

为了解决 SPH 方法的应力不稳定问题, 文献中提出了一些改进的方法. 例如, Dyka 等^[8,12] 提出了应力点法, 通过添加额外应力点来计算应力和其他状态量, 而位移、速度和加速度仍然通过粒子来计算. Randles 和 Libersky^[13] 将应力点方法扩展到了多维空间. 但是应力点法不能完全消除拉伸不稳定, 而且会导致压缩不稳定. Morris^[14] 使用特殊的核函数来消除 SPH 方法的应力不稳定性. 然而该方法降低了计算精度, 可行性不足. Johnson 等^[15]

[†] E-mail: liumoubin@imech.ac.cn

在模拟高速碰撞时采用了二次型核函数来避免压缩失稳现象,但二次型核函数的光滑性不好(二阶导数不连续). Johnson 和 Beissel^[16] 采用了正则核函数和二次核函数相结合的方法来降低拉伸不稳定性. Hicks 和 Liebrock^[17] 通过改变核函数的外形从而改变核函数二阶导数的正负来消除应力不稳定性. Belytschko 等^[18] 认为拉伸不稳定性来自欧拉核函数,并提出了拉格朗日核函数法,不过当变形过大时,拉格朗日核函数不再适用. 张刚明等^[19] 提出了一种幂次形式的核函数,用来消除压缩失稳现象. Hicks 等^[20] 和 Wen 等^[21] 提出了守恒光滑的方法,通过过滤掉误差中的短波来控制应力不稳定性,但是它的缺点是可能光滑掉过多的短波. Chen 等^[22] 将核近似的方法应用到泰勒展开中,提出了修正光滑粒子法 (corrective smoothed particle method, CSPM),提高了光滑粒子法近似的一致性,从而改善了应力不稳定性. Monaghan 等^[23,24] 提出了人工应力方法来抑制应力不稳定性. 贾斌等^[25] 根据消除压缩不稳定性的人工黏性力和消除拉伸不稳定性的人工应力,提出了统一形式的人工力. 有些研究者则提出了改进的粒子方法,如再生核粒子法 (reproducing kernel particle method, RKPM)^[26] 和移动最小二乘粒子法 (moving least square particle hydrodynamics, MLSPH)^[27]. 傅学金和强洪夫等^[28] 总结了 SPH 方法应力不稳定性的研究进展,指出虽然文献中已经提出了多种解决应力不稳定性的方法,但是每一种方法都有其局限性,不能彻底解决应力不稳定性问题,目前对 SPH 方法应力不稳定性还没有一个令人信服的解决方案.

本文先简要介绍一下传统 SPH 方法的控制方程和应力不稳定性的原因,然后给出能够消除应力不稳定性的改进的 SPH 方法,并通过算例对改进方法的有效性进行验证.

2 传统的 SPH 方法

2.1 控制方程

拉格朗日形式的 Navier-Stokes(N-S) 方程

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}, \quad (2)$$

其中 ρ , $\mathbf{u}$, p , ν 分别为密度、速度、压强和运动黏

性系数, $\mathbf{g}$ 为体积力,如重力等.

在 SPH 方法中,函数 $A(\mathbf{r})$ 及其导数可以表示成如下的离散形式:

$$A_a = \sum_b A_b W_{ab} \frac{m_b}{\rho_b}, \quad (3)$$

$$\nabla_a A_a = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} A_b \nabla_a W_{ab}, \quad (4)$$

其中 $W_{ab} = W(\mathbf{r}_{ab}, h)$ 为核函数,也称为光滑函数, h 为光滑长度, $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ 表示从粒子 b 到粒子 a 的位移矢量, $\nabla_a W_{ab} = \frac{\mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}} \frac{\partial W_{ab}}{\partial r_{ab}}$ 表示核函数的梯度, $r_{ab} = |\mathbf{r}_{ab}|$ 表示粒子间的距离. 关于 SPH 方法的详细介绍可参考文献 [3, 5].

利用 SPH 方法的基本公式和适当的数学技巧,可以把 N-S 方程离散成如下形式:

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b \mathbf{u}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = & - \sum_b m_b \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} \\ & + \sum_b \frac{4m_b(\mu_a + \mu_b)\mathbf{r}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)^2(r_{ab}^2 + 0.01h^2)} \mathbf{u}_{ab} \\ & + \mathbf{g}_a, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\mu = \rho\nu$ 是动力黏性系数.

N-S 方程不是封闭的,还需要一个求解压强的方程. 在 SPH 方法中,一般通过弱可压缩形式的人工状态方程求解压强. 本文使用如下的人工状态方程计算压强^[29]

$$p(\rho) = c^2(\rho - \rho_0), \quad (7)$$

其中 ρ_0 为参考密度, c 为数值声速. 为了使密度变化小于 1%, 数值声速应取粒子最大速度的十倍以上.

2.2 应力不稳定性

Swegle 等^[7] 利用稳定性分析理论得到了传统 SPH 方法应力不稳定的充分条件

$$W''T > 0, \quad (8)$$

其中 T 表示应力,压缩状态下为负,拉伸状态下为正,与压强的正负相反. 根据稳定性条件 (8) 可知,应力不稳定性既不依赖于黏性,也不依赖于时间积分格式,也没有应力临界值. 根据 Swegle 等的分析结果,黏性的大小会影响扰动的增长速度,所以黏

性对应力不稳定性具有一定程度的抑制作用,但不能消除应力不稳定性,也不能改变应力不稳定的性质. 应力状态分为压缩状态和拉伸状态,对于同一个核函数,压缩状态下的稳定性和拉伸状态下的稳定性正好相反(即如果压缩状态下稳定,拉伸状态下就不稳定;如果拉伸状态下稳定,压缩状态下就不稳定),所以无法仅通过改变核函数就同时解决压缩不稳定和拉伸不稳定问题.

Swegle 等的分析结果也解释了为什么拉伸状态下容易出现应力不稳定现象,而压缩状态下很少出现. 传统 SPH 方法使用的核函数是钟形函数,如三次样条函数和高斯函数等. 文献中常用的是三次样条函数

$$W(s, h) = \alpha_d \begin{cases} (2-s)^3 - 4(1-s)^3, & 0 \leq s < 1, \\ (2-s)^3, & 1 \leq s < 2, \\ 0, & s \geq 2, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $s = r/h$, α_d 是函数在 d 维空间中的归一化系数,它在一维、二维和三维空间中的取值分别为 $1/6h$, $5/(14\pi h^2)$ 和 $1/(4\pi h^3)$. 对于传统的 SPH 方法,三次样条函数的应力不稳定性如图 1 所示. 从图中可以看出,对于三次样条函数,无论应力处于拉伸状态还是压缩状态,都存在不稳定区域. 由于光滑长度的取值通常等于或稍大于粒子间距,所以粒子通常都处在拉伸失稳区域,这就揭示了为什么拉伸状态下容易出现应力不稳定现象. 如果粒子距离减小,进入压缩失稳区域,就会导致压缩不稳定. 因为所有钟形函数及其导数的形状都与三次样条函数相似,所以钟形函数的应力不稳定性都与三次样条函数相似.

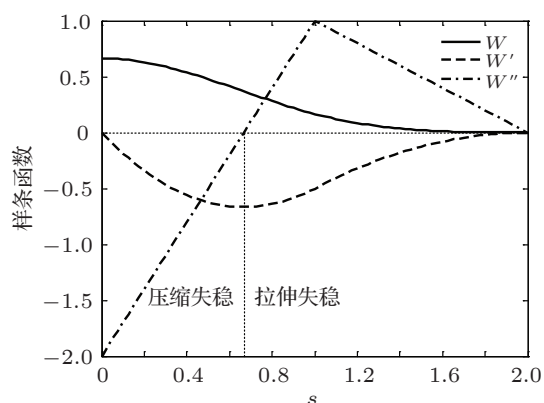


图 1 三次样条函数的稳定性

在压缩状态下,粒子间的作用力为排斥力.当粒子间距减小时,排斥力会先增大再减小.当粒子进入排斥力减小的区域后,也会导致粒子聚集现象,即压缩不稳定性.压缩状态下,粒子还有形成局部线性结构的趋势,因为排斥力随着粒子距离的减小先增大后减小,容易导致粒子在平衡位置附近振荡,从而使得粒子压强振荡,出现间断的交错式分布,形成线性结构(见后文图 6).

对于传统的 SPH 方法,在压缩失稳区,粒子间的作用力为排斥力,且排斥力随着粒子间距的减小而减小,所以粒子有相互靠近的趋势;在拉伸失稳区,粒子间的作用力为吸引力,且吸引力随着粒子间距的减小而增大,所以粒子会相互靠近.因此,应力不稳定问题的一种可能的解决方案是:压缩状态下,让排斥力随着粒子间距的减小而增大;在拉伸状态下,让吸引力随着粒子间距的减小而减小,或者通过某种方式把吸引力转化成排斥力,并让排斥力随着粒子间距的减小而增大.下一节的改进方法就是根据这种思想提出的.

3 改进的 SPH 方法

根据应力不稳定性产生的原因,本文从核函数和离散格式两个方面对传统的 SPH 方法进行改进.先利用二阶导数非负的核函数消除压缩不稳定性,然后通过改进离散格式消除拉伸不稳定性.为了与传统的 SPH 方法区分开,改进后的 SPH 方法称为稳定的 SPH 方法 (stabilized SPH, SSPH)

3.1 核函数的改进

前文已经指出,在核函数二阶导数为负值的区域会出现压缩不稳定.如果使用二阶导数非负的核函数,就可以消除压缩不稳定性.同理,使用二阶导数非正的核函数,可以消除拉伸不稳定性.对于固体力学问题,由于固体材料可以处于压缩状态,也可以处于拉伸状态,因此无法通过调整或选择核函数同时消除压缩和拉伸不稳定性.对于一般的流体问题,只存在压缩状态,不存在拉应力状态,因此可以通过构造二阶导数非负的核函数来消除压缩不稳定性.

核函数的选取或构造一般需要满足如下条件:

Delta 函数条件

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r}, h) = \delta(\mathbf{r}); \quad (10)$$

归一化条件

$$\int W(\mathbf{r}, h) dV = 1; \quad (11)$$

紧致性条件

$$W(\mathbf{r}, h) = 0, \quad |\mathbf{r}| \geq kh. \quad (12)$$

归一化条件保证了常数积分的严格成立. 紧致性条件是为了把实际的积分区域限制在有限的范围之内, 从而降低计算量. 满足了归一化条件和紧致性条件, 就自动满足了 Delta 函数条件. 除了这三个条件, 核函数通常还要满足单调性、对称性和光滑性等条件. 单调性条件要求核函数的值随粒子间距的增大单调递减, 从而使得粒子间的相互作用随着粒子之间距离的增大而减小. 对称性条件要求核函数 W 是关于 $\mathbf{r}$ 的偶函数, 从而使得粒子间的相互作用与距离相关, 与方向无关. 光滑性条件要求核函数光滑可导, 通常至少要存在连续的前两阶导数. 连续的二阶导数意味着核函数对粒子的无序性不敏感. 如果不满足光滑性条件, 会导致不稳定问题.

根据上面给出的几个条件和二阶导数非负的条件, 我们构造了如下形式的核函数:

$$W(s, h) = \alpha_d \begin{cases} s^3 - 6s + 6, & 0 \leq s < 1, \\ (2-s)^3, & 1 \leq s < 2, \\ 0, & 2 \leq s, \end{cases} \quad (13)$$

其中归一化系数 α_d 在一维、二维和三维空间的取值分别为 $1/(7h)$, $1/(3\pi h^2)$ 和 $15/(62\pi h^3)$. 核函数 (13) 及其前两阶的形状见图 2. 根据 Fulk 和 Quinn^[30] 对核函数的分类, 传统 SPH 方法常用的核函数 (如样条函数和高斯函数) 属于钟形 (bell shaped) 核函数, 而新构造的核函数 (13) 属于双曲形 (hyperbolic shaped) 核函数. 该函数的一阶导数单调增加, 二阶导数非负. 在压缩状态下, 粒子之间的作用力为排斥力. 对于新的核函数, 当粒子相互靠近的时候, 排斥力增大, 不再出现排斥力减小的区域, 从而消除压缩不稳定性.

根据 (8) 式给出的应力不稳定性充分条件, 新的核函数二阶导数非负, 如果介质处于压缩状态 (应力为负), 应力不稳定性条件不成立, 因此能够消除压缩不稳定性. 对于一般流体力学问题, 因为流体不能承受拉应力, 不存在拉伸不稳定性, 应

力不稳定性即表现为压缩不稳定性. 因此, 通过使用新的核函数就能解决流体模拟中的应力不稳定性问题.

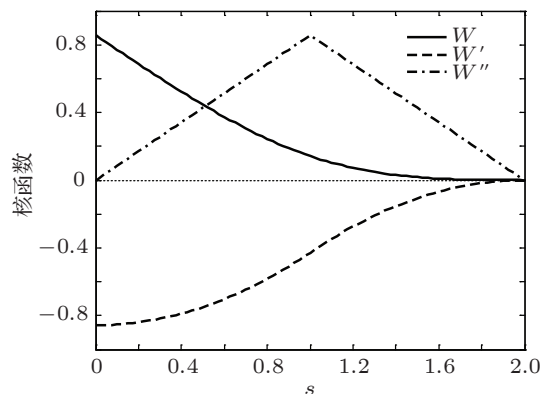


图 2 新的核函数及其前两阶导数的形状

需要指出的是, 新的核函数对自由表面上的压强误差比较敏感, 因此, 在模拟流体问题时, 需要将自由表面上的粒子压强设置为 0. 具体做法是, 先通过下式:

$$\sum_b W_{ab} V_b < \beta, \quad (14)$$

判断粒子属于自由表面粒子, 其中参数 $\beta < 1$, 取值为 0.9—0.95 时区别不大, 本文取 $\beta = 0.9$. 然后, 使表面粒子的密度等于参考密度 ρ_0 , 根据状态方程 (7) 可得压强等于 0.

3.2 离散格式的改进

如果介质中存在拉伸 (或负压) 应力状态, 仅靠新的核函数不能同时消除压缩与拉伸不稳定性. 因此, 为了消除拉伸不稳定性, 还需要对离散格式进行改进. 对于传统的 SPH 方法, 负压状态下粒子间作用力为吸引力, 而且吸引力随着粒子间距的减小而增大, 因此导致了拉伸不稳定性. 为了解决拉伸不稳定问题, 可以通过改变离散格式把吸引力转化成排斥力. 这里给出如下形式的离散格式:

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right)_a = \sum_b \frac{m_b}{\rho_a \rho_b} (p_b - p_a^-) \nabla_a W_{ab}, \quad (15)$$

其中 $p_a^- = \min_b (p_b)$, 表示粒子 a 的相邻粒子中最小的压强, 即 $p_a^- \leq p_b$, 所以 $(p_b - p_a^-)$ 在任何应力状态下都不小于零. 使用新的核函数 (13) 和离散格式 (15) 得到的粒子间作用力恒为排斥力.

离散格式 (15) 中的 p_a^- 实际上起到了背景压强的作用. 根据动量方程 (2), 压强梯度影响物质运动, 而背景压强不会影响物质运动. 数值上, 因为核函数是对称的, 其一阶导数的积分等于 0, 所以当粒子均匀分布时, 下式成立:

$$\sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} \approx 0. \quad (16)$$

于是

$$\sum_b \frac{m_b}{\rho_a \rho_b} p_a^- \nabla_a W_{ab} = \frac{p_a^-}{\rho_a} \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \nabla_a W_{ab} \approx 0, \quad (17)$$

所以, 离散格式 (15) 中的背景压强产生的粒子加速度可以忽略, 即对背景压强 p_a^- 不敏感. 不过, 在自由边界附近, 由于粒子缺失, (17) 式不成立, 所以离散格式 (15) 对自由边界比较敏感, 也需要对自由边界进行处理.

4 数值算例

本节通过两个算例来检验改进的 SPH 方法在消除应力不稳定性方面的有效性. 第一个算例是典型的流体力学问题, 用于验证新的核函数在消除压缩不稳定性方面的有效性, 模拟中不需要使用改进的离散格式. 第二个算例是封闭的计算区域中存在负压, 粒子处于拉伸状态. 通过该算例可以验证所提出的新核函数与离散格式的联合使用在消除拉伸不稳定性方面的有效性. 值得指出的是, 本文的两个算例虽然简单, 却具有较好的代表性. 第一个算例展示了水体从准静态到静态过程静水压力的形成与保持能力, 第二个算例与 Swegle 等 [7] 最早对 SPH 方法进行稳定性分析理论的经典算例一致.

4.1 静水压力

如图 3 所示, 方槽中盛有一定量的水. 方槽宽 1.0 m, 水深 0.5 m, 参考密度取 1000 kg/m^3 , 初始粒子均匀分布, 粒子间距为 0.01 m, 数值声速 50 m/s, 重力加速度取 9.8 N/kg . P_1 和 P_2 是方槽中心线上的两个点, P_1 距离水面 0.4 m, P_2 距离水面 0.2 m. 这两个点作为空间上的观测点, 不随流体运动. 在没有外界扰动的情况下, 水槽中的水保持稳定的静水压力.

图 4 和图 5 分别记录了应用传统和改进的 SPH 方法得到的 P_1 和 P_2 两个位置上的压强随时间的变化. 从图 4 可以看出, 在开始的几秒内, 压强有较小的波动, 因为 SPH 方法一般难以给出压强的精确值. 从 $t = 8 \text{ s}$ 左右开始, 压强开始剧烈变化, 出现了图 6 所示的间断式压强分布, 与静水压强理论分布相差很大, 粒子结合成线性结构.

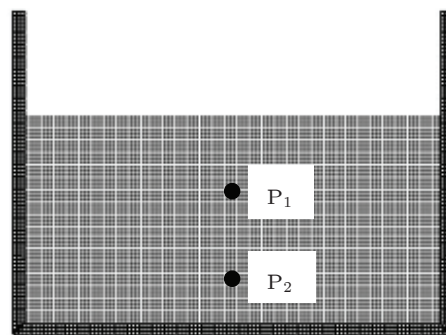


图 3 初始粒子分布图

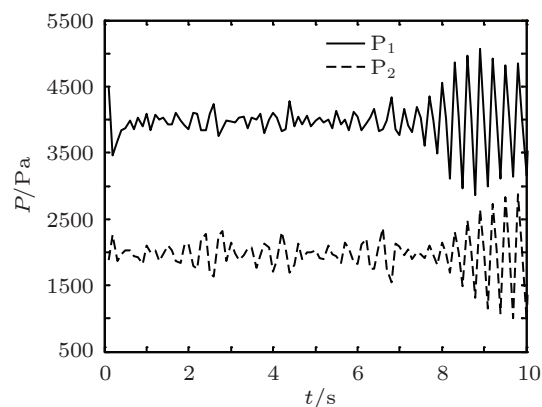


图 4 传统 SPH 方法得到的参考点压强随时间的变化

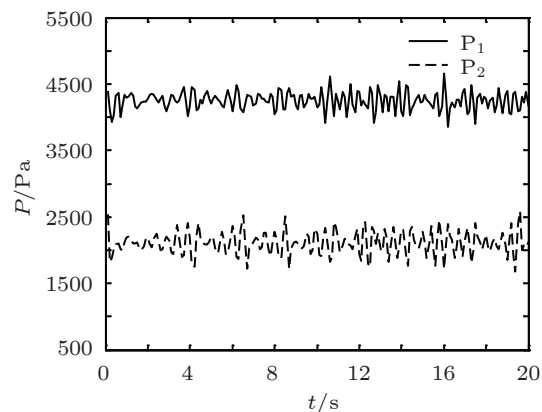


图 5 改进 SPH 方法得到的参考点压强随时间的变化

图 5 表明, 使用改进的 SPH 方法, 压强也有波动, 但是波动基本上在理论值上下振荡, 没有出现异常变化. 图 7 给出了压强场的空间分布, 可以看出压强变化比较均匀, 接近静水压强的理论分布, 不再出现间断式分布. 结果显示, 改进的方法有效地消除了压缩状态下的不稳定现象.

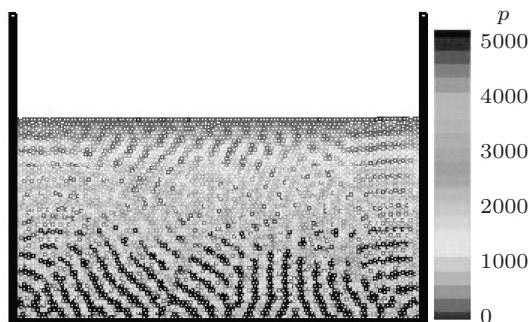


图 6 传统 SPH 方法得到的压强分布

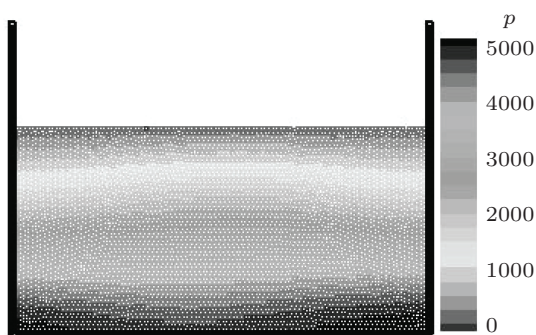


图 7 改进 SPH 方法得到的压强分布

4.2 负压问题

文献 [7] 给出了一个能揭示 SPH 方法应力不稳定性的典型算例: 介质在正压状态下受到扰动保持稳定, 但在负压状态下受到扰动会失稳. 本例采用与文献 [7] 相同的设置. 如图 8 所示, 计算区域是边长为 0.02 m 的正方形, 初始粒子均匀分布, 粒子间距为 0.001 m, 外面的三层粒子为边界粒子 (方形粒子), 保持不动, 其余粒子为运动粒子 (圆形粒子). 所有粒子初始压强相等, 没有体积力. 粒子初始密度为 900 kg/m^3 , 参考密度为 1000 kg/m^3 , 数值声速 5 m/s . 根据状态方程 (7), 可得粒子的初始压强为 -2500 N/m^2 . 初始时刻, 中心点处的粒子受到水平向右的 10^{-7} m/s 的速度扰动, 其余粒子初始速度为零. 理论上, 中心点处速度的微小扰动会向周围传播, 对整个速度场产生微小扰动. 因为粒子的

运动限制在方形区域内, 速度场的扰动持续一段时间后, 最终达到粒子均匀分布的平衡状态, 与初始状态粒子分布应该保持一致.

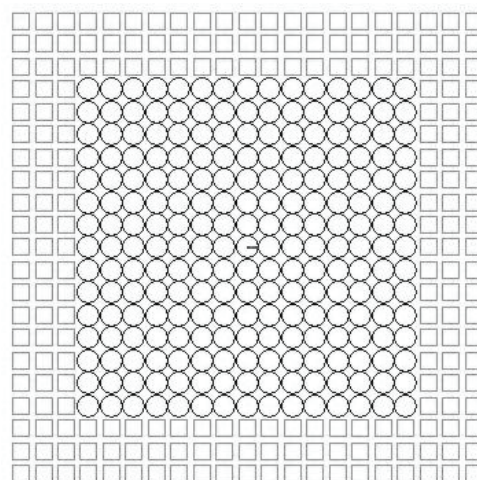


图 8 初始粒子分布图

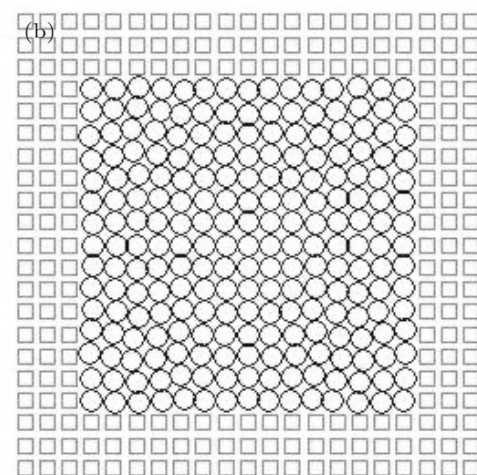
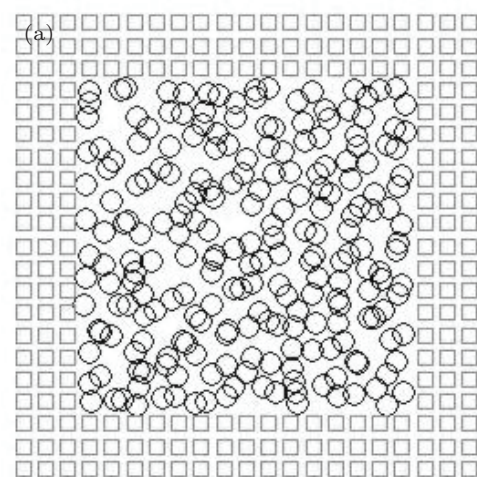


图 9 粒子分布形态对比 (a) 传统的 SPH 方法结果; (b) 改进的 SPH 方法结果

图 9 是分别使用改进前后的 SPH 方法得到的粒子分布图. 从图中可以看出, 传统的 SPH 方法在负压下出现了应力不稳定性现象. 初始状态下的小扰动导致了所有粒子的剧烈运动, 一些粒子相互聚集, 与初始状态粒子分布差距很大. 改进的 SPH 方法没有出现异常现象, 粒子分布状态和初始时刻基本保持一致, 均匀分布.

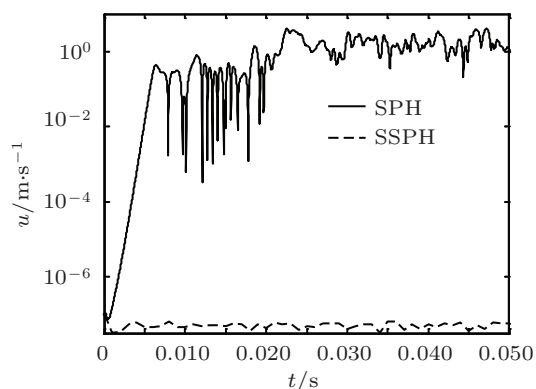


图 10 粒子速度随时间的变化 (SPH: 传统的 SPH 方法; SSPH: 改进的 SPH 方法)

图 10 记录了初始时刻位于中心点处的粒子的速度大小随时间的变化. 使用传统的 SPH 方法时, 粒子速度从初始时刻的 10^{-7} m/s 迅速增大到 1 m/s 左右, 即初始扰动被放大了 7 个量级. 使用改进的 SPH 方法时, 粒子速度则减小到初始速度的一半左右, 并一直维持在这一水平. 因为周围的粒子吸收了扰动粒子的能量, 使得粒子只能在初始位置附近做微弱振动. 很明显, 改进的 SPH 方法有效地消除了负压状态下的应力不稳定性.

5 结论和讨论

本文针对传统 SPH 方法的应力不稳定性, 从核函数和离散格式两方面进行了改进. 改进的方法从

应力不稳定性产生的根本原因出发, 消除应力不稳定性. 应力不稳定性包括压缩不稳定性和拉伸不稳定性:

1. 压缩不稳定性的原因在于核函数的二阶导数存在负值区域, 导致压缩状态下的排斥力随着粒子间距的减小而减小. 本文通过构造二阶导数非负的核函数, 使得排斥力随着粒子间距的减小而增大, 从而消除压缩不稳定性.

2. 拉伸不稳定性的原因在于负压状态下粒子间作用力为吸引力, 且吸引力随着粒子间距的减小而增大. 本文通过构造新的离散格式, 把负压状态下的粒子间吸引力转化成排斥力, 从而消除拉伸不稳定性.

与文献中已有的其他消除或改善应力不稳定性的方法相比, 本文所提出的方法有两个主要的优点:

1. 形式简单, 计算量小. 本文的方法从核函数和离散格式上对 SPH 方法进行改进, 而不需要施加繁琐的人为修正, 形式上很简单, 而且计算量的增加可以忽略.

2. 理论上具有普适性. 本文的方法从应力不稳定性产生的根本原因出发, 从理论上消除应力不稳定性产生的原因, 有望从根本上解决应力不稳定性问题.

对流体力学问题, 通过使用新的尖顶形式的核函数就能够消除应力不稳定性. 而对于具有拉伸 (或负压) 应力状态的问题, 还需要结合使用新的离散格式以消除拉伸不稳定性. 文中给出的两个算例具有典型代表性, 能够初步展示所提出的新核函数与离散格式在消除压缩及拉伸不稳定性上的有效性. 然而, 对于一些复杂的问题, 尤其是非牛顿流体的运动与变形以及含材料强度的固体动力学问题 (如冲击与侵彻等), 还有待于进一步的验证.

- [1] Lucy L B 1977 *Astron. J.* **82** 1013
- [2] Gingold R A, Monaghan J J 1977 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **181** 375
- [3] Liu G R, Liu M B 2003 *Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method* (Singapore: World Scientific) p36
- [4] Liu M B, Liu G R, Zong Z 2008 *Int. J. Comput. Methods* **5** 135
- [5] Monaghan J J 2005 *Rep. Prog. Phys.* **68** 1703
- [6] Liu M B, Chang J Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7556 (in Chinese) [刘谋斌, 常建忠 2010 物理学报 **59** 7556]

- [7] Sweigle J W, Hicks D L, Attaway S W 1995 *J. Comput. Phys.* **116** 123
- [8] Dyka C T, Ingel R P 1995 *Comput. Struct.* **57** 573
- [9] Zhang J Z, Zheng J, Yu K P, Wei Y J 2010 *Eng. Mech.* **27** 65 (in Chinese) [张嘉钟, 郑俊, 于开平, 魏英杰 2010 工程力学 **27** 65]
- [10] Zheng J 2010 *Ph. D. Dissertation* (Harbin: Harbin Institute of Technology) (in Chinese) [郑俊 2010 博士学位论文 (哈尔滨: 哈尔滨工业大学)]
- [11] Morris J P 1995 *Publ. Astron. Soc. Aust.* **13** 97

- [12] Dyka C T, Randles P W, Ingel R P 1997 *Int. J. Num. Methods Eng.* **40** 2325
- [13] Randles P W, Libersky L D 2000 *Int. J. Num. Methods Eng.* **48** 1445
- [14] Morris J P 1996 *Ph.D. Dissertation* (Melbourne: Monash University)
- [15] Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R 1996 *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **139** 347
- [16] Johnson G R, Beissel S R 1996 *Int. J. Num. Methods Eng.* **39** 2725
- [17] Hicks D L, Liebrock L M 1999 *Comput. Math. Appl.* **38** 1
- [18] Belytschko T, Guo Y, Liu W K, Xiao S P 2000 *Int. J. Num. Methods Eng.* **48** 1359
- [19] Zhang G M, Wang X J, Hu X Z, Zhou Z 2003 *Explosion and Shock Waves* **23** 219 (in Chinese) [张刚明, 王肖钧, 胡秀章, 周钟 2003 爆炸与冲击 **23** 219]
- [20] Hicks D L, Swegle J W, Attaway S W 1997 *Appl. Math. Comput.* **85** 209
- [21] Wen Y, Hicks D L, Swegle J W 1994 *Sandia Report SAND94-1932*
- [22] Chen J K, Beraun J E, Jih C J 1999 *Comput. Mech.* **23** 279
- [23] Monaghan J J 2000 *J. Comput. Phys.* **159** 290
- [24] Gray J P, Monaghan J J, Swift R P 2001 *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **190** 6641
- [25] Jia B, Ma Z T, Zhang W, Pang B J 2010 *J. of Harbin Institute of Technology* **42** 1369 (in Chinese) [贾斌, 马志涛, 张伟, 庞宝君 2010 哈尔滨工业大学学报 **42** 1369]
- [26] Liu W K, Jun S, Zhang Y F 1995 *Int. J. Num. Methods in Fluids* **20** 1081
- [27] Dils G A 1999 *Int. J. Num. Methods Eng.* **44** 1115
- [28] Fu X J, Qiang H F, Yang Y C 2007 *Advances in Mech.* **37** 375 (in Chinese) [傅学金, 强洪夫, 杨月诚 2007 力学进展 **37** 375]
- [29] Morris J P, Fox P J, Zhu Y 1997 *J. Comput. Phys.* **136** 214
- [30] Fulk D A, Quinn D W 1996 *J. Comput. Phys.* **126** 165

Improvement on stress instability in smoothed particle hydrodynamics

Yang Xiu-Feng Liu Mou-Bin[†]

(Key Laboratory for Hydrodynamics and Ocean Engineering, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

(Received 16 March 2012; revised manuscript received 12 June 2012)

Abstract

Smoothed particle hydrodynamics (SPH) is a Lagrangian meshfree particle method. It has special advantages in modeling large deformation and free surface flow, and has been widely applied to different problems in engineering and science. However, the classical SPH suffers from stress instability which restricts its further development and applications. The fundamental reason of stress instability is that the stress state and the kernel do not match each other. For frequently used bell-shaped kernel function, in tensile state the attraction between particles increases as particle spacing decreases, thereby leading to tensile instability. In a compressible state, the repulsive force between particles increases, and then decreases as particle spacing decreases, thereby leading to compressible instability. In this paper is presented an approach to removing stress instability in SPH by proposing a new kernel function and a modified SPH discrete form. In the modified SPH, the force between particles is always repulsive and it increases as particle spacing decreases. Two numerical examples are given to test the proposed approaches, and the obtained numerical results clearly demonstrate that the new approach can eliminate stress instability effectively.

Keywords: smoothed particle hydrodynamics, stability, kernel, discrete form

PACS: 47.11.-j, 02.70.-c, 46.15.-x

[†] E-mail: liumoubin@imech.ac.cn