物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 23 (2012) 230201

非完整系统 Boltzmann-Hamel 方程的 Birkhoff 化及其广义辛算法*

解加芳† 庞硕 邹杰涛 李国富

(北方工业大学理学院, 北京 100144)

(2012 年 5 月 4 日收到; 2012 年 7 月 2 日收到修改稿)

针对非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程, 当其满足一定条件时, 可以进行广义 Birkhoff 化. 构造生成函数, 利用当前比较优越的非自治 Birkhoff 广义辛算法对其进行数值仿真. 仿真结果和传统的 Runge-Kutta 算法结果相比较, 非自治 Birkhoff 广义辛算法在长期跟踪后更加准确.

关键词: 非完整约束, Boltzmann-Hamel 方程, Birkhoff 辛算法

PACS: 02.20.Sv, 11.30.−j, 03.50.−z

1 引 言

Boltzmann-Hamel 方程最先是德国学者 Boltzmann 于 1902 年用准坐标推导出完整系统的运动方程 [1], 后来被 Hamel 分别于 1904 年及 1938 年推广到一阶线性非完整系统 [2] 及一阶非线性非完整系统 [3]. 20 世纪 80 年代我国学者梅凤翔研究了带参数约束的一类可控系统 [4]、变质量非完整约束系统 [5]. 20 世纪 90 年代我国学者进一步将 Boltzmann-Hamel 方程推广到高阶非完整系统 [6]、准事件空间 [7]、非惯性系 [8]、可控系统 [9]、约束依赖于质量变化过程和带参数约束的系统中 [10]. 但目前, 关于该系统数值计算方面的工作屈指可数, 这将较大程度地影响非完整力学系统的理论研究成果在实际问题中的应用.

几乎所有的完整系统都能表示成 Hamilton 正则方程的形式. 1984 年, 我国已故数学家冯康 [11] 首次系统地提出了基于辛几何的辛算法. 由于在非完整系统中, 非完整约束对力学系统相空间辛结构的破坏 [12−14], 使得对于完整系统成立的保辛算法不再适用, 需要寻求新的保结构数值算法来进行非完整力学系统的数值计算. Birkhoff 系统作为 Hamilton 力学的 Birkhoff 推广, 从形式上是一个具有一般辛结构的 Hamilton 系统加上一个外力项. 因此针对非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程, 在其满足一定条件时, 可以通过它的正则形式 [15,16] 来进行广义 Birkhoff 化, 这样就可以应用 Birkhoff 广义辛算法这种保结构数值算法对其进行数值求解. 本文将对受到外力作用的非完整系统 Boltzmann-Hamel 方程进行数值计算, 采用 Birkhoff 辛算法和 Runge-Kutta 方法, 并将数值结果进行比较, 得出 Birkhoff 辛算法计算的优越性.

2 非完整系统 Boltzmann-Hamel 方程的 Birkhoff 化

设力学系统的位形由 s 个广义坐标 $q_1, \cdots, q_s$ 确定, 系统受有 r 个一阶非线性非完整约束

$$f_p(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = 0,$$
$$(p = 1, 2, \cdots, r; \alpha = 1, 2 \cdots, s). \qquad (1)$$

引进准坐标 π_α 对应的准速度

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha(q_\beta, \dot{q}_\beta, t) = \dot{\pi}_\alpha,\ (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, s).$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11102001, 11026090) 资助的课题.

† E-mail: jia3409457@126.com

根据非完整约束条件, 取

$$\begin{aligned}&\omega_\sigma=\omega_\sigma(q_\alpha,\dot q_\alpha,t),\\&\omega_{\varepsilon+p}=f_p(q_\alpha,\dot q_\alpha,t)=0,\\&(p=1,2,\cdots,r;\sigma=1,2,\cdots\varepsilon;\varepsilon=s-r),\end{aligned}\qquad(2)$$

可以得到非理想非线性非完整非保守系统的广义 Boltzmann-Hamel 方程 (见文献 [15])

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde T}{\partial\omega_\sigma}-\frac{\partial\tilde T}{\partial\pi_\sigma}\\&\quad+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\tilde T}{\partial\omega_\alpha}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\dot q_k}-\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial q_k}\right)\frac{\partial\dot q_k}{\partial\omega_\sigma}\\&=\tilde Q_\sigma+\tilde P_\sigma,\end{aligned}\qquad(3)$$

其中

$$\tilde Q_\beta=\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\frac{\partial\dot q_\alpha}{\partial\omega_\beta},\quad \tilde P_\beta=\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\frac{\partial\dot q_\alpha}{\partial\omega_\beta},$$

式中 Q_α 为广义力, P_α 为广义约束反力, $\tilde T(q_\alpha,\omega_\beta,t)=T[q_\alpha,\dot q_\alpha(q_\beta,\omega_\beta,t),t]$ 为用准速度表示的动能表达式.

当 $\tilde Q_\sigma+\tilde P_\sigma=0$ 且

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\tilde T}{\partial\omega_\alpha}\sum_{k=1}^{s}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\dot q_k}-\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial q_k}\Big)\frac{\partial\dot q_k}{\partial\omega_\sigma}=f(\omega_m,\pi_m),$$

$m\neq\sigma$ 时, (3) 式即为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde T}{\partial\omega_\sigma}-\frac{\partial\tilde T}{\partial\pi_\sigma}+f(\omega_m,\pi_m)=0,\ m\neq\sigma,\qquad(4)$$

此时, (4) 式为非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程.

引进准速度 ω_α 对应的广义动量

$$p_\alpha=\frac{\partial\tilde T}{\partial\omega_\alpha},(\alpha=1,2,\cdots,s),\qquad(5)$$

定义广义 Hamilton 函数

$$\tilde H=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\omega_\alpha-\tilde T,\qquad(6)$$

从而得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde H}{\partial\pi_\alpha}&=-\frac{\partial\tilde T}{\partial\pi_\alpha},\\\frac{\partial\tilde H}{\partial p_\alpha}&=\omega_\alpha.\end{aligned}\qquad(7)$$

将 (5) 式和 (7) 式代入 (4) 式, 可以得到准坐标下非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程的正则形式

$$\left.\begin{aligned}\dot p_\sigma&=-\frac{\partial\tilde H}{\partial\pi_\sigma}-f(\omega_m,\pi_m),\\\dot\pi_\sigma&=\frac{\partial\tilde H}{\partial p_\sigma},\end{aligned}\right.\quad m\neq\sigma.\qquad(8)$$

由 (8) 式推得

$$\begin{pmatrix}0&-e^t\\e^t&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\pi_\sigma\\\dot p_\sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\tilde H}{\partial\pi_\sigma}e^t+f(\omega_m,\pi_m)e^t\\\dfrac{\partial\tilde H}{\partial p_\sigma}e^t\end{pmatrix},$$
$$m\neq\sigma.\qquad(9)$$

当 p_σ 与 π_σ 无关时, 将 (9) 式 Birkhoff 化得到

$$\begin{pmatrix}0&-e^t\\e^t&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\pi_\sigma\\\dot p_\sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial B}{\partial\pi_\sigma}\\\dfrac{\partial B}{\partial p_\sigma}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p_\sigma e^t\\0\end{pmatrix},$$
$$m\neq\sigma,\qquad(10)$$

其中

$$\begin{aligned}B&=\tilde He^t+B_m\pi_\sigma e^t,\\B_m&=f(\omega_m,\pi_m)-\frac{\partial\tilde T}{\partial\omega_\sigma},\\F&=\begin{pmatrix}p_\sigma e^t\\0\end{pmatrix},\quad m\neq\sigma.\end{aligned}\qquad(11)$$

3 Boltzmann-Hamel 方程的广义辛差分格式

对于依赖于时间的辛结构 $K(z,t)$ 上的 Birkhoff 系统, 苏红玲 [17] 在秦孟兆的辛算法基础上进行了改进, 构造了能够保持离散的 $K(z,t)$ 结构的广义辛算法. 首先假设 R^{4n} 上存在到它自身的可逆映射

$$\alpha(t,t_0):\begin{pmatrix}\tilde z\\z\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\tilde\omega\\\omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1(\tilde z,z,t,t_0)\\\alpha_2(\tilde z,z,t,t_0)\end{pmatrix}.\qquad(12)$$

(12) 式的 Jacobi 矩阵为

$$\alpha_*(\tilde z,z,t,t_0)=\begin{pmatrix}A_\alpha&B_\alpha\\C_\alpha&D_\alpha\end{pmatrix},$$

映射 α 要满足

$$\alpha_*^{\mathrm T}J_{4n}\alpha_*=\begin{pmatrix}K(\tilde z,t)&0\\0&-K(z,t_0)\end{pmatrix},$$

当 α 如上定义时, 假定 $z\to\tilde z=g(z,t,t_0)$ 是定义在 R^{2n} 的某一领域 $\tilde R$ 上的一个 $K(z,t)$ 辛映射, 它的 Jacobi 矩阵记为 $g_z(z,t,t_0)=\boldsymbol M(z,t,t_0)$. 如果 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol M$ 在领域 $\tilde R$ 上满足截面条件

$$\big|C_\alpha(g(z,t,t_0),z,t,t_0)\boldsymbol M(z,t,t_0)$$

$$+ D_\alpha(g(z,t,t_0),z,t,t_0)\Big| \neq 0,$$

那么在领域 $\tilde{R}$ 上存在唯一的梯度映射 $\omega \to \tilde{\omega} = f(\omega,t,t_0)$, 它的 Jacobi 矩阵是 $f_\omega(\omega,t,t_0) = N(\omega,t,t_0)$, 并且存在一个标量函数, 即生成函数 $\phi(\omega,t,t_0)$, 使得 $f(\omega,t,t_0) = \phi_\omega(\omega,t,t_0)$.

基于 Birkhoff 相流的生成函数 $\phi(\omega,t,t_0)$, 可以构造广义 Birkhoff 辛差分格式. 当步长 $\tau > 0$ 足够小的时候, 取

$$\begin{aligned}\psi_w^{(m)}(w,t_0+\tau,t_0) = &\sum_{i=0}^{m} \tau^i \varphi_w^{(i)}(w,t_0),\\ m = &1,2,\cdots,\end{aligned} \tag{13}$$

$\psi_w^{(m)}(w,t_0+\tau,t_0)$ 就定义了一个有 m 阶精度的 $K(z,t)$ 辛离散格式, 使得

$$\begin{aligned}z =& z^k \to z^{k+1} = \tilde{z},\\ &\alpha_1(z^{k+1},z^k,t_{k+1},t_k)\\ =&\psi_w^{(m)}(\alpha_2(z^{k+1},z^k,t_{k+1},t_k),t_{k+1},t_k).\end{aligned} \tag{14}$$

4 非完整系统的一个经典例: 四轮小车

四轮小车, 它的位置由八个参数确定: 铰链 B 的坐标 x,y; 角 θ,χ 及轮子转角 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$(见文献 [5], p35) 系统受到的六个非完整约束条件为

$$\begin{aligned}&-\dot{x}\sin(\theta+\chi)+\dot{y}\cos(\theta+\chi)=0,\\ &-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta-l\dot{\theta}=0,\\ &\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta-a\dot{\theta}-r_1\varphi_1=0,\\ &\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta+a\dot{\theta}-r_1\varphi_1=0,\\ &\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)\\ &-c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r_2\varphi_3=0,\\ &\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)\\ &+c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r_2\varphi_4=0.\end{aligned} \tag{15}$$

选取准速度如下

$$\begin{aligned}&\omega_1=\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi),\\ &\omega_2=\dot{\chi},\\ &\omega_3=-\dot{x}\sin(\theta+\chi)+\dot{y}\cos(\theta+\chi),\\ &\omega_4=-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta-l\dot{\theta},\\ &\omega_5=\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta-a\dot{\theta}-r_1\dot{\varphi}_1,\\ &\omega_6=\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta+a\dot{\theta}-r_1\dot{\varphi}_2,\\ &\omega_7=\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)\\ &\quad-c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r_2\dot{\varphi}_3,\\ &\omega_8=\dot{x}\cos(\theta+\chi)+\dot{y}\sin(\theta+\chi)\\ &\quad+c(\dot{\theta}+\dot{\chi})-r_2\dot{\varphi}_4,\end{aligned} \tag{16}$$

显然, 非完整约束条件即为

$$\omega_3=\omega_4=\omega_5=\omega_6=\omega_7=\omega_8=0. \tag{17}$$

设 M_1 M_2 分别代表后轴及前轴的质量 (不包括轮子), Θ_1,Θ_2 分别为相对于通过 A 和 B 并垂直于路面的轴的转动惯量, 轮子质量为 m_1,m_3, 相对于通过轮心与轮面相垂直的轴的转动惯量为 J_1,J_3, 相对于通过轮心在轮面内的轴的转动惯量为 J_1',J_3', 于是系统动能为

$$T^*=\frac{1}{2}\{(\mu+\mu_1\sin^2\chi)\omega_1^2+lv\omega_2^2+2v\omega_1\omega_2\sin\chi\}, \tag{18}$$

其中常数

$$\begin{aligned}\mu=&M_1+2m_1+M_2+2m_3+\frac{2J_1}{r_1^2}+\frac{2J_2}{r_2^2},\\ \mu_1=&\frac{1}{l^2}\Big(\Theta_1+2m_1a^2+2J_1'+\Theta_2+2m_3c^2+2J_3'\Big),\\ &-M_1-2m_1+\frac{2J_3}{r_2^2}\frac{c^2}{l^2}-\frac{J_1}{r_1^2}\Big(1-\frac{c^2}{l^2}\Big),\\ v=&\frac{1}{l}\Big(\Theta_2+2m_3c^2+2J_3'+2\frac{J_3c^2}{r_2^2}\Big).\end{aligned} \tag{19}$$

假设广义力 P_2^* 是舵控制的转矩, P_1^* 是其他主动力, 如作用于主动轮上电机的转矩、在轮轴上的摩擦力、空气阻力、滚阻摩擦力等. 在这里考察 $\mu=\mu_1=P_1^*=P_2^*=0$ 的简单情况. 根据 (4) 式, 可以给出该系统的特殊 Boltzmann-Hamel 方程

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_2\sin\pi_2=0,\\ l\dot{\omega}_2+\dot{\omega}_1\sin\pi_2+\omega_1\omega_2\cos\pi_2=0,\end{aligned} \tag{20}$$

由 (6) 式可知

$$\tilde{H}=\frac{1}{2}lv\omega_2^2+v\omega_1\omega_2\sin\pi_2. \tag{21}$$

由 (8) 式可得系统的正则形式

$$\begin{aligned}\dot{p}_1=&-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\pi_1}+v\dot{\pi}_2^2\cos\pi_2,\\ \dot{\pi}_1=&\frac{\partial\tilde{H}}{\partial p_1},\\ \dot{p}_2=&-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\pi_2}-v\dot{\pi}_1\dot{\pi}_2\cos\pi_2,\\ \dot{\pi}_2=&\frac{\partial\tilde{H}}{\partial p_2}.\end{aligned} \tag{22}$$

由上式可以看出此方程无法用 Hamilton 辛算法求解.

又 (20) 式中显然有

$$\omega_2 = C, \quad \pi_2 = Ct, \ (C \text{ 为常数}) \tag{23}$$

再利用 (10) 式对 (22) 式 Birkhoff 化

$$\begin{pmatrix} 0 & -e^t \\ e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\pi}_1 \\ \dot{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t(vC^2\cos Ct + vC\sin Ct) + p_1 e^t \\ \dot{\pi}_1 e^t \end{pmatrix}, \tag{24}$$

其中

$$F = \begin{pmatrix} p_1 e^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2} v e^t (lC^2 + 2C\dot{\pi}_1 \sin Ct - 2C^2\pi_1\cos Ct - 2C\pi_1\sin Ct), \tag{25}$$

采用上述的 Birkhoff 广义辛算法 (13), 可以求解上述方程组 (24), 得到此 Birkhoff 系统的二阶 $K(z,t)$ 辛离散格式, 同时算出 π_1 的解析解

$$\pi_1 = C_1 - C_2 \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

对该例题分别采用二阶 $K(z,t)$ 辛算法和二阶 Runge-Kutta 算法进行计算. 在计算过程中选取如下初值: $\pi_1 = 1, \omega_1 = 1, C = 1$, 取步长 $\tau = 0.001$. 并通过比较两种数值方法计算所得数值解和解析解之间的相对误差来说明两种数值方法之间的差别.

从图 1, 图 2 中可以看出,

$$\pi_1 = C_1 - C_2 \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

在 $t = k\pi$ 处为无穷, 因此 Runge-Kutta 方法在长期跟踪后周期性地与解析解 π_1 出现较大幅度的相对误差, 而 Birkhoff 二阶辛算法则相对误差较小, 结果更精确.

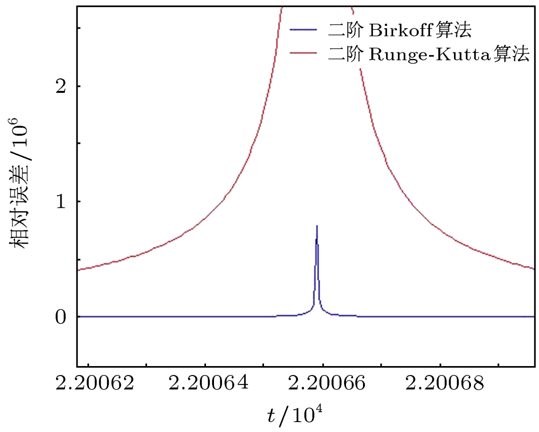

图 1 相对误差

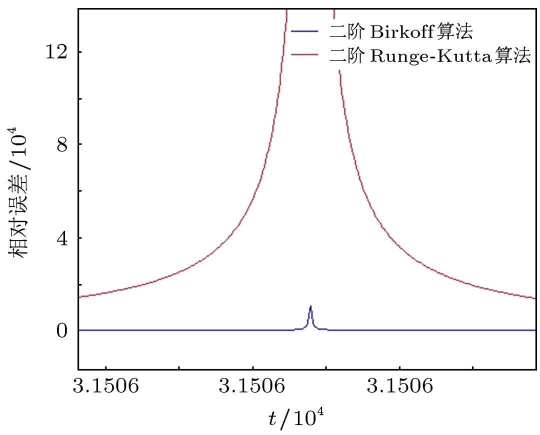

图 2 相对误差

5 结 论

本文先推导出满足一定条件的非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程 (4) 的正则形式 (8), 然后对其 Birkhoff 化, 得到广义 Birkhoff 方程 (10), 并针对该方程, 应用 Birkhoff 广义辛差分格式进行计算, 并与传统的 Runge-Kutta 算法相比较, 最后得出 Birkhoff 广义辛差分算法在非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程 (4) 中更加优越, 可以带来更加精确的参考数据.

[1] Boltzmann L 1902 *Sitz. Math. Natur. Akad. Wiss.* B **11** 1603
[2] Hame1 G 1904 *Math. Phys.* **50** 1
[3] Hamel G 1938 *Art. Sitz. Math. Ges.* **37** 4
[4] Mei F X 1983 *Transactions of Beijing Institute of Technology* **2** 22 (in Chinese) [梅凤翔 1983 北京工业学院学报 **2** 22]
[5] Mei F X 1985 *The Foundations of Mechanics of Nonholonomic System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础 (北京: 北京工业学院出版社)]
[6] Zhang J F 1990 *Huanghuai Journal* **6** 13 (in Chinese) [张解放 1990 黄淮学刊 **6** 13]
[7] Luo S K 1990 *Huanghuai Journal* **6** 23 (in Chinese) [罗绍凯 1990 黄淮学刊 **6** 23]
[8] Luo S K 1992 *Chinese Science Bulletin* **37** 93 (in Chinese) [罗绍凯 1992 科学通报 **37** 93]
[9] Chen L Q 1994 *Huanghuai Journal* **10** 8 (in Chinese) [陈立群 1994 黄淮学刊 **10** 8]
[10] Lü Z Q 1994 *Jiangxi Science* **12** 195 (in Chinese) [吕哲勤 1994 江西科学 **12** 195]
[11] Feng K 1985 *Proc of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equationgs Computation of Partial Differential Equations* (Beijing: Science Press)
[12] Guo Y X, Song Y B, Zhang X B, Chi D P 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1192
[13] Guo Y X, Shang M, Luo S K, Mei F X 2001 *Int. J. Theor. Phys.* **40** 1197
[14] Guo Y X, Luo S K, Shang M, Mei F X 2001 *Rep. Math. Phys.* **47** 313
[15] Luo S K 1990 *Journal of Yiyang Teachers College* **1** 32 (in Chinese) [罗绍凯 1990 益阳师专学报 **1** 32]
[16] Zhang J F, Zhang H Z 1990 *Journal of Zhejiang Normal University* **13** 61 (in Chinese) [张解放, 张洪忠 1990 浙江师范大学学报 **13** 61]
[17] Su H L 2004 *Commun. Theor. Phys.* **53** 476

The Borkhoffian expression of Boltzmann-Hamel equation of nonholonomic system and its generalized symplectic geometric algorithm*

Xie Jia-Fang† Pang Shuo Zou Jie-Tao Li Guo-Fu

(*College of Science, North China University of Technology, Beijing* 100144*, China*)

(Received 4 May 2012; revised manuscript received 2 July 2012)

Abstract

For a Boltzmann-Hamel equation of nonholonomic mechanical system, when it meets certain conditions, the Boltzmann-Hamel equation can be transformed into a Birkhoffian system. By constructing the generating function, the system is investigated numerically using the generalized symplectic geometric algorithm of the nonautonomous Birkhoffian system. Compared with the above-mentioned algorithm with the classical Runge-Kutta method, Birkhoffian symplectic scheme is very accurate in a long-term tracing.

Keywords: nonholonomic constraint, Boltzmann-Hamel equation, Birkhoffian symplectic algorithm
PACS: 02.20.Sv, 11.30.−j, 03.50.−z

∗ Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11102001, 11026090).

† E-mail: jia3409457@126.com