

时滞对一类单位负反馈二阶振荡系统的正面作用分析*

张勇[†]

(中国石油大学(华东)信息与控制工程学院, 青岛 266580)

(2012年4月1日收到; 2012年7月2日收到修改稿)

针对一类被控对象具有二阶系统标准形式的振荡系统进行了稳定性分析, 讨论了闭环系统为单位负反馈时信号传输时滞对控制系统性能的影响. 通过绘制和分析相对阻尼系数在不同取值区间的 Nyquist 曲线, 得出了时滞与闭环系统稳定性的关系, 并对各种情况进行了单位阶跃响应的实例仿真. 仿真结果表明了分析的正确性.

关键词: 振荡系统, 负反馈, 时滞, 正面作用

PACS: 02.30.Yy, 02.70.-c, 07.05.Dz, 46.40.Ff

1 引言

时滞系统受到自然科学与工程科学各学科领域的广泛关注, 并取得了许多重要进展^[1]. 时滞动力系统成为一个重要的研究对象, 主要有3个原因: 一个原因是时滞广泛存在于各种动力系统^[2-4], 时滞可以是系统本身固有的, 如网络信息传输总需要一定的时间等, 也可以是控制环节出现的, 如信号采集与分析需要时间, 作动器产生效果需要时间等; 另一个原因是时滞常常使系统失稳, 使系统的动力学品质变差, 出现复杂的动力学行为等^[5-7]. 和时无滞情形不一样, 一些非常简单的时滞系统, 如一阶 Ikeda (自治) 系统, 也可以出现各种分岔和混沌现象; 第三个原因是可以主动利用时滞镇定系统, 控制混沌等^[8,9]. 这方面的工作源自 Pyragas 提出的利用时滞状态反馈控制混沌的开创性工作^[10], 通过施加一个简单的时滞状态差分反馈或者其推广(递归时滞状态差分反馈)来实现各种控制目的. 随着主动控制技术的不断发展, 主动利用时滞反馈实现各种控制目标的研究工作必将越来越多.

但是, 目前国际上对时滞相关问题的研究, 一般只考虑时滞对系统性能的负面影响, 认为时滞越小, 系统性能越好. 给出的研究结果只能保证时滞本身在小于某个上界时才能保证系统的某些性能指标. 这种研究思想只适合时滞相对比较小的情形, 结果仍是比较保守的^[11-13]. 1993年 Abdallah 等^[14]提出: “时滞的正反馈控制可以稳定化具有振荡特性的系统”. 此研究结果表明, 在一定条件下, 时滞对系统性能有正面影响. 随后, 胡海岩院士和王在华教授^[15]运用 Routh-Hurwitz 稳定判据和广义 Sturm 判别法, 讨论了含待定参数的高阶时滞动力系统的稳定性切换问题, 在时滞与系统稳定性的关系方面做了大量的研究工作. 在此基础上, 唐功友教授^[16]运用 Nyquist 稳定判据和坐标变换方法, 研究了弹簧-质量-阻尼器机械位移系统的最大稳定裕度时滞比例控制器的设计问题, 实现了主动利用时滞反馈控制镇定振荡系统的目的, 对本文的撰写具有指导性的意义.

关于时滞对被控对象具有二阶系统标准形式的振荡系统的系统性能是否具有正面作用这一议题, 本文进行了全面细致的稳定性分析, 基于不同

* 国家自然科学基金(批准号: 61004095)、山东省自然科学基金(批准号: ZR2009GQ018)和山东省优秀中青年科学家科研奖励基金(批准号: BS2010DX036)资助的课题.

[†] E-mail: paul.zhangyong@163.com

的条件分别讨论了闭环系统为单位负反馈时信号传输时滞对控制系统性能的影响. 通过绘制相对阻尼系数在不同取值区间的 Nyquist 曲线, 得出了时滞与闭环系统稳定性的关系, 并针对各种情况进行了单位阶跃响应的实例仿真. 仿真结果表明了分析

的正确性.

2 问题描述

考虑图 1 所示结构的闭环二阶振荡系统:

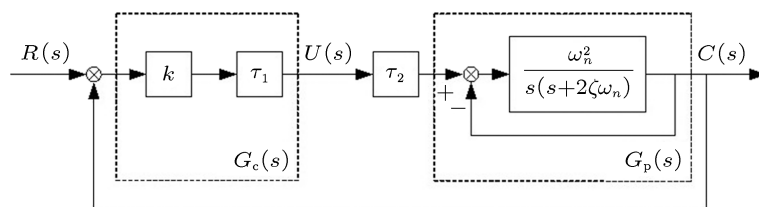


图 1 闭环二阶振荡系统结构

其中 $R(s)$ 表示参考信号, $C(s)$ 表示输出信号, $U(s)$ 表示控制信号, $\tau_2 \geq 0$ 为信号传输时滞对控制系统的综合效应, $G_p(s)$ 为具有二阶系统标准形式的被控对象.

$$G_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (1)$$

其中 $\omega_n > 0$ 表示无阻尼振荡频率, ζ 表示相对阻尼系数.

时滞比例控制器 $G_c(s)$ 可描述为

$$G_c(s) = ke^{-\tau_1 s}, \quad (2)$$

其中 $k > 0$ 为比例控制器增益, $\tau_1 \geq 0$ 为待设计的人为控制时滞.

系统的开环传递函数可以表示为

$$G(s) = G_c(s) \cdot e^{-\tau_2 s} \cdot G_p(s) = \frac{\omega_n^2 ke^{-\tau s}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (3)$$

其中 $\tau = \tau_1 + \tau_2$ 为闭环系统的总时滞. 可以通过设计人为控制时滞 τ_1 来改变 τ 的大小, 进而改善系统的稳定性能.

系统 (3) 的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2 ke^{-j\omega\tau}}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\omega 2\zeta\omega_n}. \quad (4)$$

3 稳定性分析

当闭环控制系统采用单位负反馈时, 系统的闭环传递函数可以表示为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$= \frac{\omega_n^2 ke^{-\tau s}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + \omega_n^2 ke^{-\tau s}}. \quad (5)$$

当 $\tau = 0$ 时, 闭环系统的特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + \omega_n^2 k = 0, \quad (6)$$

其特征根为

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1 - k}, \quad (7)$$

由代数稳定判据可以得到此时闭环系统稳定的充要条件是 $\zeta > 0$.

下面我们分析当 $\tau > 0$ 时闭环系统的稳定性.

1) 当 $\zeta = 0$ 时, 开环传递函数在右半 s 平面无极点, 由 Nyquist 稳定判据闭环系统稳定的充要条件是 Nyquist 曲线不包围或穿越临界点 $(-1, j0)$.

系统开环传递函数的幅频特性为

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} \frac{\omega_n^2 k}{\omega_n^2 - \omega^2}, & 0 \leq \omega < \omega_n, \\ \frac{\omega_n^2 k}{\omega^2 - \omega_n^2}, & \omega_n < \omega < +\infty, \end{cases} \quad (8)$$

系统开环传递函数的相频特性为

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} -\omega\tau, & 0 \leq \omega < \omega_n, \\ -\pi - \omega\tau, & \omega_n < \omega < +\infty, \end{cases} \quad (9)$$

然后找出所有的极坐标曲线与负实轴的交点. 当相位为 $-(2i + 1)\pi, i = 0, 1, 2, \dots$ 时存在交点. 因此, 交点将会产生于频率 ω_c :

$$\begin{cases} \omega_c \tau = (2i + 1)\pi, & 0 \leq \omega_c < \omega_n, \\ \omega_c \tau = 2i\pi, & \omega_n < \omega_c < +\infty. \end{cases} \quad (10)$$

为了确保 Nyquist 曲线不包围或穿越临界点 $(-1, j0)$, 必须保证在频率等于 ω_c 处的幅

值 $|G(j\omega_c)|$ 小于 1, 即

$$\begin{cases} \frac{\omega_n^2 k}{\omega_n^2 - (2i+1)^2 \pi^2 / \tau^2} < 1, & 0 \leq \omega_c < \omega_n, \\ \frac{\omega_n^2 k}{4i^2 \pi^2 / \tau^2 - \omega_n^2} < 1, & \omega_n < \omega_c < +\infty. \end{cases} \quad (11)$$

综合以上两个条件并假设 $k < 1$, 可以得到能够使系统稳定的时滞 τ 的取值范围为

$$\frac{(2i+1)\pi}{\omega_n \sqrt{1-k}} < \tau < \frac{2i\pi}{\omega_n \sqrt{1+k}}, \quad (12)$$

显然, 上式的右侧要小于左侧, 即不等式 (12) 不成立, 故此时闭环系统是不稳定的. 例如, 取 $\omega_n = 1$, $k = 0.1$, $\tau = 1$, 则 Nyquist 曲线如图 2 所示, 闭环系统的单位阶跃响应曲线见图 3.

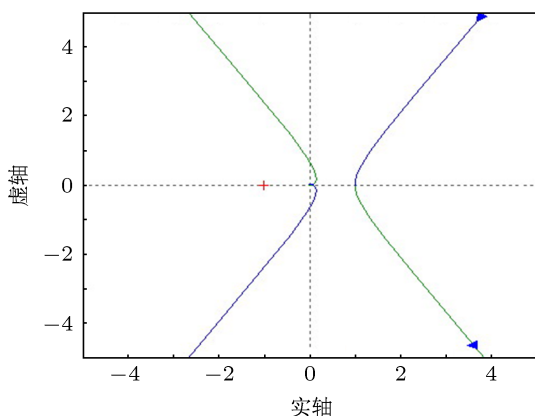


图 2 负反馈 $\zeta = 0$ 时系统的 Nyquist 曲线

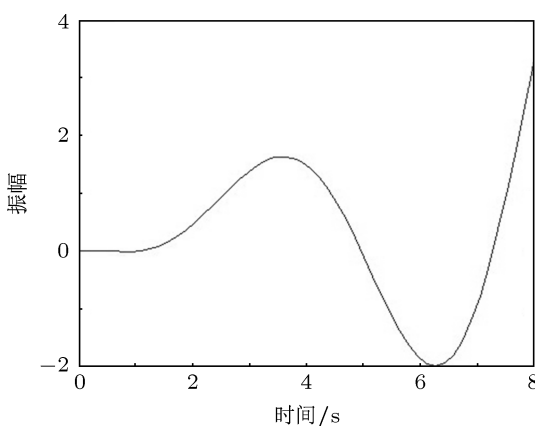


图 3 负反馈 $\zeta = 0$ 时系统的单位阶跃响应曲线

2) 当 $\zeta < 0$ 时, 系统开环传递函数的幅频特性为

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2 k}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2 \omega^2}}. \quad (13)$$

系统开环传递函数的相频特性为

$$\angle G(j\omega) = -\arctan \frac{2\zeta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} - \omega\tau. \quad (14)$$

对于开环系统 (3), 两个极点均位于右半 s 平面. 根据 Nyquist 稳定判据, 系统渐近稳定的充要条件是 Nyquist 曲线逆时针围绕 $(-1, j0)$ 点转两圈. 这表明如果系统是渐近稳定的, 则存在且仅存在两个频率 ω_1 和 ω_2 ($0 < \omega_1 < \omega_2 < +\infty$) 使得如下的两个表达式成立:

$$|G(j\omega_1)| = |G(j\omega_2)| = 1 \quad (15)$$

和

$$\angle G(j\omega_1) < -(2i+1)\pi < \angle G(j\omega_2). \quad (16)$$

将 (13) 式代入 (15) 式, 可以得到

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 - \sqrt{k^2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}, \\ \omega_2 &= \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{k^2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}. \end{aligned} \quad (17)$$

注意到 (15), (16) 和 (17) 式, 根据 Nyquist 稳定判据, 如果系统是渐近稳定的, 则下列不等式必须成立:

$$|G(j\omega)| > 1, \quad \omega \in (\omega_1, \omega_2). \quad (18)$$

不等式 (18) 表明, 当 $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ 时 $|G(j\omega)|$ 存在一个最大值. 根据 (13) 式很容易发现存在最大值 $\max_{\omega \in (0, \infty)} |G(j\omega)|$ 的充分必要条件是 $\zeta > -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

通过频率特性 (4) 式, 得到 $G(j0) = k > 0$ 和 $G(j\infty) = 0$. 这表明如果要保证 $|G(j\omega)| = 1$ 仅存在两个解 ω_1 和 ω_2 , 则 $k < 1$ 必须成立. 根据 (13) 式, 要使系统渐近稳定, (4) 式的 Nyquist 曲线必然有一个最大值位于 $\omega \in (0, \infty)$. 最大值 $\max_{\omega \in (0, \infty)} |G(j\omega)|$ 可以很容易由 (13) 式计算得出:

$$\begin{aligned} \max_{\omega \in (0, \infty)} |G(j\omega)| &= \left| G(j\omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}) \right| \\ &= -\frac{k}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

显然 $|G(j\omega)|$ 是关于 $\omega \in (0, +\infty)$ 的凹函数, 即 $|G(j\omega)|$ 仅有一个最大值位于 $\omega \in (0, +\infty)$. 另一方面, 根据 Nyquist 稳定判据, Nyquist 曲线逆时针围绕 $(-1, j0)$ 点转两圈需要满足

$$\max_{\omega \in (0, \infty)} |G(j\omega)| > 1. \quad (20)$$

因此, 由 (19) 和 (20) 式可以得到 $k > -2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}$. 综合以上的讨论, 可以得到能够使闭环系统渐近稳定的参数 k 的取值区间, 即

$$-2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} < k < 1. \quad (21)$$

根据 (14), (16) 和 (17) 式, 当且仅当系统是渐近稳定的, 以下不等式必须成立:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega_1) &= -\arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega_1}{\omega_n^2 - \omega_1^2}\right) - \omega_1\tau \\ &< -(2i+1)\pi, \\ \angle G(j\omega_2) &= -\arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega_2}{\omega_n^2 - \omega_2^2}\right) - \omega_2\tau \\ &> -(2i+1)\pi \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

上式表明

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_1} \left[(2i+1)\pi - \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega_1}{\omega_n^2 - \omega_1^2}\right) \right] \\ < \tau < \frac{1}{\omega_2} \left[(2i+1)\pi - \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega_2}{\omega_n^2 - \omega_2^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

其中: $i = 0, 1, 2, \dots$, 直到不等式 (23) 右侧不再大于左侧.

例如, 取 $\omega_n = 1, k = 1, \tau = 1, \zeta = -1$, 则 Nyquist 曲线见图 4, 闭环系统的单位阶跃响应曲线见图 5.

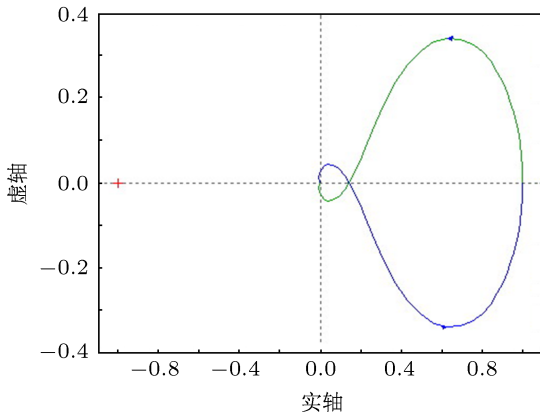


图 4 负反馈 $\zeta < 0$ 时不稳定系统的 Nyquist 曲线

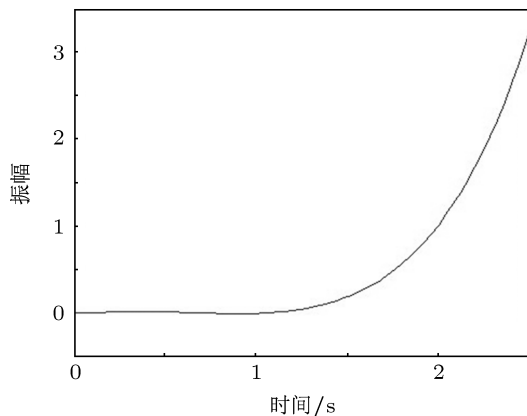


图 5 负反馈 $\zeta < 0$ 时不稳定系统的单位阶跃响应曲线

另一方面, 取 $\omega_n = 1, k = 0.1, \tau = 6, \zeta = -0.01$, 则 Nyquist 曲线见图 6. 相应地, 闭环系统的单位阶跃响应曲线如图 7 所示.

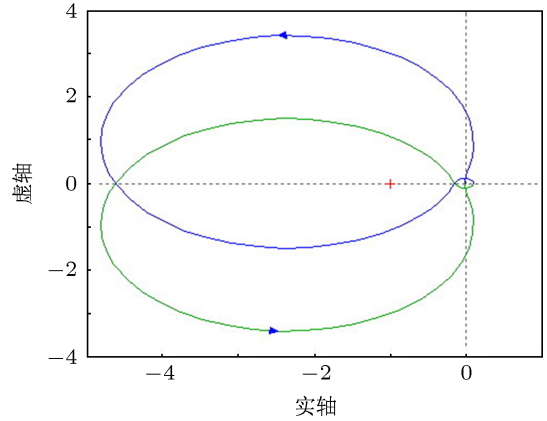


图 6 负反馈 $\zeta < 0$ 时稳定系统的 Nyquist 曲线

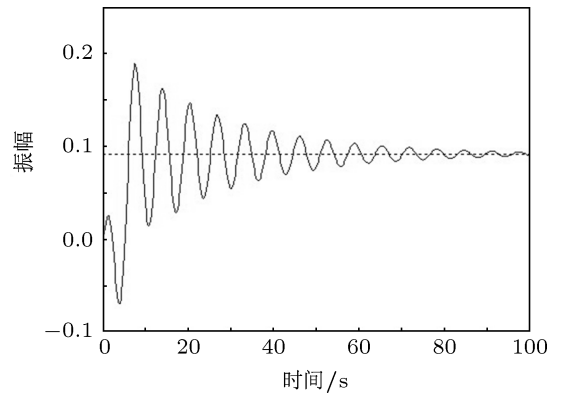


图 7 负反馈 $\zeta < 0$ 时稳定系统的单位阶跃响应曲线

3) 当 $\zeta > 0$ 时, 开环传递函数在右半 s 平面无极点, 由 Nyquist 稳定判据闭环系统稳定的充要条件是 Nyquist 曲线不包围或穿越临界点 $(-1, j0)$.

例如, 取 $\omega_n = 1, k = 1, \tau = 1, \zeta = 1$, 则 Nyquist 曲线如图 8, 闭环系统的单位阶跃响应曲线如图 9 所示.

当系统不稳定时, 若 Nyquist 曲线与以坐标原点为圆心的单位圆有两个交点, 则根据以下等式

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{\omega_n^2 k}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2 \omega^2}} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (24)$$

可以求得交点频率为

$$\omega_1 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{k^2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}},$$

$$\omega_2 = -\omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{k^2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}, \quad (25)$$

$$-\infty < \omega_2 < 0 < \omega_1 < +\infty.$$

由 $\angle G(j\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} - \omega\tau$, 则以下不等式成立

$$-\arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega_1}{\omega_n^2 - \omega_1^2} - \omega_1\tau \leq -\pi \leq -\arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega_2}{\omega_n^2 - \omega_2^2} - \omega_2\tau. \quad (26)$$

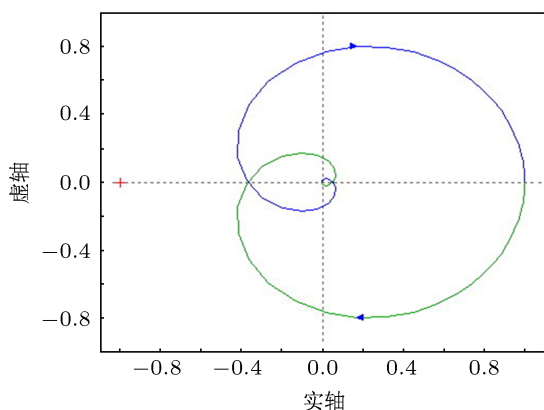


图 8 负反馈 $\zeta > 0$ 时稳定系统的 Nyquist 曲线

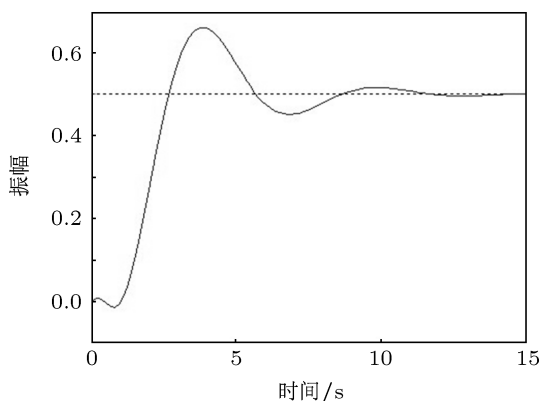


图 9 负反馈 $\zeta > 0$ 时稳定系统的单位阶跃响应曲线

根据 (26) 式, 我们可以求得当系统不稳定时, 时滞 τ 的取值范围为

$$\frac{1}{\omega_1} \left(\pi - \arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega_1}{\omega_n^2 - \omega_1^2} \right) \leq \tau \Leftrightarrow \frac{1}{\omega_2} \left(\pi - \arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega_2}{\omega_n^2 - \omega_2^2} \right) \leq \tau, \quad (27)$$

(27) 式左右两边的不等式是等价的.

例如, 取 $\omega_n = 1, k = 2, \tau = 2, \zeta = 1$, 则 Nyquist 曲线为图 10 所示, 闭环系统的单位阶跃响应曲线见图 11.

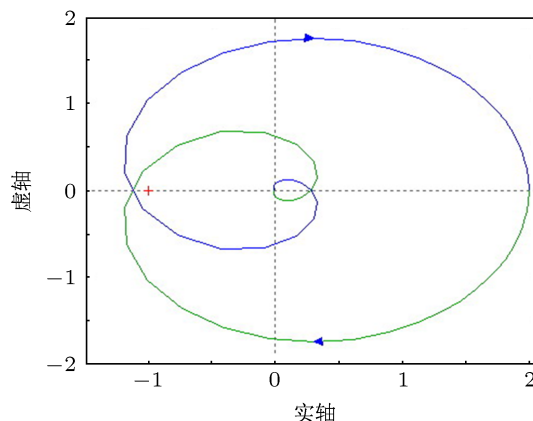


图 10 当 Nyquist 曲线与单位圆有两个交点时不稳定系统的 Nyquist 曲线

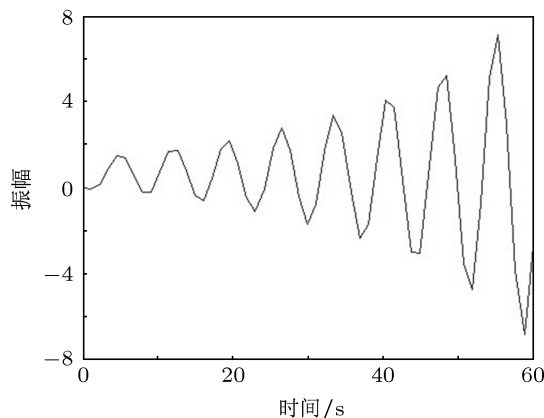


图 11 当 Nyquist 曲线与单位圆有两个交点时不稳定系统的单位阶跃响应曲线

如果 Nyquist 曲线与以坐标原点为圆心的单位圆有四个交点, 则根据以下等式

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2 k}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2 \omega^2}} = 1, \quad (28)$$

可以求得交点频率为

$$\omega_1 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 - \sqrt{k^2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}},$$

$$\omega_2 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{k^2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}, \quad (29)$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < +\infty.$$

由 $\angle G(j\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} - \omega\tau$, 则以下不等式成立

$$-\arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega_2}{\omega_n^2 - \omega_2^2} - \omega_2\tau$$

$$\leq -(2i + 1)\pi \leq -\arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega_1}{\omega_n^2 - \omega_1^2} - \omega_1\tau. \quad (30)$$

根据 (30) 式, 我们可以求得当系统不稳定时, 时滞 τ 的取值范围为

$$\frac{1}{\omega_2} \left[(2i + 1)\pi - \arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega_2}{\omega_n^2 - \omega_2^2} \right] \leq \tau \leq \frac{1}{\omega_1} \left[(2i + 1)\pi - \arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega_1}{\omega_n^2 - \omega_1^2} \right], \quad (31)$$

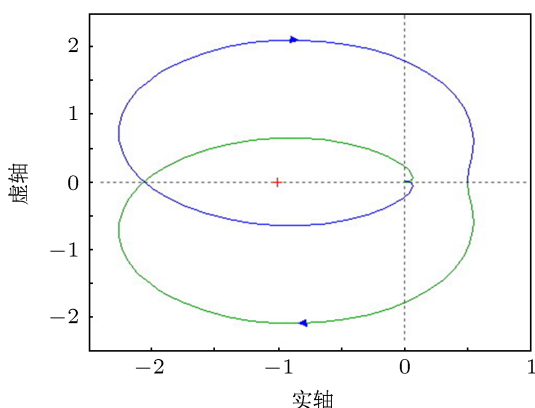


图 12 当 Nyquist 曲线与单位圆有四个交点时不稳定系统的 Nyquist 曲线

其中: $i = 0, 1, 2, \dots$, 直到不等式 (31) 右侧不再大于左侧.

例如, 取 $\omega_n = 1, k = 0.5, \tau = 1, \zeta = 0.1$, 则 Nyquist 曲线见图 12, 闭环系统的单位阶跃响应曲线见图 13.

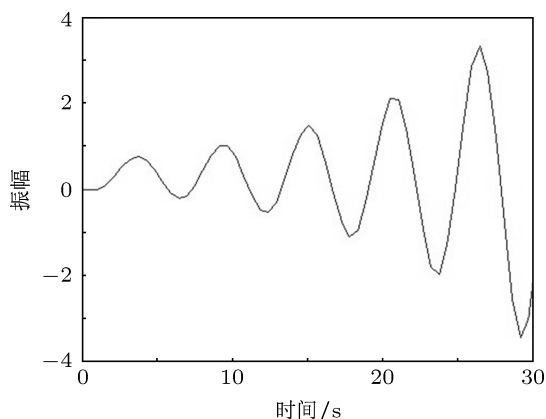


图 13 当 Nyquist 曲线与单位圆有四个交点时不稳定系统的单位阶跃响应曲线

4 结论

在经典输出反馈控制理论中, 通常采用负反馈 (即控制力的方向与受控系统运动方向相反), 但当采用时滞输出负反馈来镇定线性振动系统的不稳定运动时会发现, 只有较大的反馈增益或者较大的时滞量才能较好地实现控制目标, 而大增益意味着控制实现需要大能量. 本文针对被控对象具有二阶系统标准形式的振荡系统进行了稳定性分析, 讨论了闭环系统为单位负反馈时信号传输总时滞对控制系统性能的影响. 通过绘制相对阻尼系数在不同取值区间的 Nyquist 曲线, 得出了时滞与闭环系统稳定性的关系. 类似地, 还可以分析时滞对输出正反馈闭环系统的控制效果. 期望本文的研究结果可以为实际系统的振动控制提供新的思路, 但本文的结论对一般的动力系统是否成立还有待进一步研究.

- [1] Wang Z H, Li J Y 2010 *Acta Mech. Sin.* **42** 933 (in Chinese) [王在华, 李俊余 2010 力学学报 **42** 933]
- [2] Liu H R, Zhu Z L, Shi P M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6770 (in Chinese) [刘浩然, 朱占龙, 时培明 2010 物理学报 **59** 6770]
- [3] Guo X Y, Li J M 2012 *Chin. Phys. B* **21** 020501
- [4] Xu J, Pei L J 2006 *Adv. Mech.* **36** 17 (in Chinese) [徐鉴, 裴利军 2006 力学进展 **36** 17]
- [5] Tao H F, Hu S S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010514 (in Chinese) [陶洪峰, 胡寿松 2011 物理学报 **60** 010514]
- [6] Zheng Y A 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 020502
- [7] Xu X, Hu H Y, Wang H L 2006 *Nonlinear Dynam.* **49** 117
- [8] Yang J H, Liu X B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 010505 (in Chinese) [杨建华, 刘先斌 2012 物理学报 **61** 010505]
- [9] Liu B, Hu H Y 2008 *J. Sound Vib.* **312** 509
- [10] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [11] Michiels W, Van A, Niculescu S 2005 *IEEE Trans. Automat. Contr.* **50** 493
- [12] Yue D, Han Q L, Peng C 2004 *IEEE Trans. Circuits-II* **51** 640
- [13] Han X, Arcak M 2006 *IEEE Trans. Automat. Contr.* **51** 139
- [14] Abdallah C, Dorato P, Benitez-Read J, Byrne R 1993 *American Control Conference San Francisco, USA, June 2-4, 1993* p3106
- [15] Wang Z H, Hu H Y 2000 *J. Sound Vib.* **233** 215
- [16] Tang G Y 2006 *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation Dalian, China, June 21-23, 2006* p349

Analysis on positive effect of time-delay on a class of second-order oscillatory systems with unit negative feedback*

Zhang Yong[†]

(College of Information and Control Engineering, China University of Petroleum (East China), Qingdao 266580, China)

(Received 1 April 2012; revised manuscript received 2 July 2012)

Abstract

The stability analysis on a class of oscillatory systems whose controlled object has a standard form of second-order systems is presented. The effect of the signal transmission delay on the performance of the closed loop control system with unit negative feedback is discussed. The relationship between the time-delay and the stability of closed loop control system is obtained via drawing and analyzing the Nyquist plots in the different regions of the relative damping coefficient. The simulation example of unit step response for each case is processed and the simulation results show that the analysis is correct.

Keywords: oscillatory systems, negative feedback, time-delay, positive effect

PACS: 02.30.Yy, 02.70.-c, 07.05.Dz, 46.40.Ff

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61004095), the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. ZR2009GQ018), and the Research Award Fund for Outstanding Young and Middle-aged Scientists of Shandong Province, China (Grant No. BS2010DX036).

[†] E-mail: paul_zhangyong@163.com