

求解 Kuramoto-Sivashinsky 方程的平移基 无单元 Galerkin 方法*

冯昭 王晓东 欧阳洁†

(西北工业大学应用数学系, 西安 710129)

(2012 年 3 月 30 日收到; 2012 年 6 月 11 日收到修改稿)

Kuramoto-Sivashinsky 方程是一种可以描述复杂混沌现象的高阶非线性演化方程. 方程中高阶导数项的存在, 使得传统无单元 Galerkin 方法采用高次多项式基函数构造形函数时, 形函数违背了一致性条件. 因此, 本文提出了一种采用平移多项式基函数的无单元 Galerkin 方法. 与传统无单元 Galerkin 方法相比, 该方法在方程离散时依然采用 Galerkin 进行离散, 但形函数的构造采用了基于平移多项式基函数的移动最小二乘近似. 通过对具有行波解和混沌现象的 Kuramoto-Sivashinsky 方程的数值模拟, 验证了本文方法的有效性.

关键词: 无单元 Galerkin 方法, Kuramoto-Sivashinsky 方程, 平移多项式基函数, 混沌现象

PACS: 02.60.Lj, 03.65.Ge, 94.20.Bb, 05.45.Pq

1 引言

Kuramoto-Sivashinsky 方程是物理学中一类重要的高阶非线性演化方程. 该方程由 Kuramoto 和 Tsuzuki^[1] 以及 Sivashinsky^[2] 提出, 它具有混沌解并在有限空间域展现时空混沌现象^[3]. 混沌解是描述确定性系统在远离平衡时具有混沌现象的一种解^[4], 该解似乎是随机的过程, 它不是一种暂态, 在充分长时间后, 这种不规则特性仍然存在. 从物理上看, 混沌解能够显示出确定性系统的内在随机性. 对于 Kuramoto-Sivashinsky 方程的混沌解, 它可以描述对流胞流动、斜面上流体流动、火焰前锋传播等^[5-7] 物理现象.

如果 Kuramoto-Sivashinsky 方程的解析解存在, 那么通过解析解就可以了解复杂的物理现象和动力学过程. 近年来, 许多学者对 Kuramoto-Sivashinsky 方程的解析解做了大量研究. 2000 年, Fan^[8] 运用双曲正切函数法得到了 Kuramoto-Sivashinsky 方程的解析解. 2003 年, Peng^[9] 采用多

项式展开法得到了 Kuramoto-Sivashinsky 的孤子解. 2007 年, Nickel^[10] 通过结合双曲正切函数法和多项式展开法又得到了 Kuramoto-Sivashinsky 方程的一组行波解. 然而 Kuramoto-Sivashinsky 方程的解析解只在极少数情况下存在, 大部分情况只能进行数值求解.

无单元 Galerkin^[11,12] (element-free Galerkin, EFG) 方法是近年来发展起来的一种无网格数值方法. 该方法采用移动最小二乘 (moving least squares, MLS) 方法对未知函数进行近似, 具有自适应性强、易于构造高阶可导近似函数、计算精度高和稳定性好等优点. 但是将 EFG 方法应用于求解高阶非线性偏微分方程却非常困难, 目前只有少量对三阶非线性 Korteweg-de Vries (KdV) 方程及 Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB) 方程求解的相关文献^[11,12], 尚未见到对四阶非线性 Kuramoto-Sivashinsky 方程进行数值模拟的相关文献. 其原因在于采用传统多项式基函数的 EFG 方法求解 Kuramoto-Sivashinsky 方程时, 由于高次基函数的运用使得形函数违背了一致性条件^[13], 从而致

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2012CB025903) 和国家自然科学基金 (批准号: 10871159) 资助的课题.

† E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn

使数值结果失真. 然而同样的问题也存在于基于核近似的无网格方法. 针对此问题, 文献 [13] 提出了一种平移多项式基函数, 并将其运用到基于核近似的有限云方法 (finite cloud method, FCM) 中, 解决了一致性条件的问题.

鉴于此, 本文尝试将平移多项式基函数推广应用到基于移动最小二乘近似的 EFG 方法中, 克服采用传统 EFG 方法时形函数违背一致性条件问题, 解决求解高阶方程时遇到的困难, 并对具有行波解和混沌现象的 Kuramoto-Sivashinsky 方程进行了数值模拟.

2 EFG 方法的基本原理

EFG 方法是一种基于 Galerkin 原理的无网格方法, 采用移动最小二乘方法对未知函数进行近似 [11,12]. 该方法可直接基于空间离散点对函数近似, 此时不需要对求解区域进行网格划分.

2.1 移动最小二乘近似

设待求场函数 $u(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x} 处的 MLS 近似表达式为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

其中 m 为基函数个数, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 为基函数向量, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 为待定系数作为分量构成的向量.

为了确定待定系数 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, 对于逼近函数 $u^h(\mathbf{x})$ 的离散加权 L_2 范数为

$$J = \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2, \quad (2)$$

其中 N 为节点数目, $u_i = u(\mathbf{x}_i)$ 为函数在节点 \mathbf{x}_i 的函数值, $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ 为节点权函数. 本文为了保证权函数高阶导数的连续性, 取四次样条函数, 即

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4, & r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

为使 L_2 范数达到最小, 即要求

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

得到

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}, \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= (w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \\ &\quad \dots, w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N) \mathbf{p}(\mathbf{x}_N)), \\ \mathbf{U} &= (u_1, u_2, \dots, u_N)^T, \end{aligned}$$

将 (4) 式代入到 (1) 式, 可得

$$\begin{aligned} u^h(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U} \\ &= \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi^T(\mathbf{x}) &= (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

一般情况下, 由 MLS 构造的形函数不满足 Kronecker delta 条件, 即 $\varphi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$, 因此边界条件不能直接实施. 本文所有算例均采用 Lagrange 乘子法 [14] 处理本质边界条件.

2.2 基函数的选取

基函数 $\mathbf{P}^T(\mathbf{x})$ 的选取对逼近函数的精度有重要影响, 一维空间中, 基函数 $\mathbf{P}^T(\mathbf{x})$ 一般取为如下传统多项式基函数:

- ① 线性基 $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x), \quad m = 2;$
- ② 二次基 $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x, x^2), \quad m = 3;$
- ③ 三次基 $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x, x^2, x^3), \quad m = 4.$

为了对高阶偏微分方程能够进行准确的数值模拟, 需要采用高次多项式基函数对未知函数进行数值逼近; 而当解决高梯度问题时, 一般需要对问题的高梯度区域进行节点加密. 然而当采用这两种方案时, 形函数违背了一致性条件 [13], 导致数值结果失真. 文献 [13] 针对此问题提出了一种平移多项式基函数, 并将其运用到基于核近似的 FCM, 解决了形函数的一致性问题. 本文将平移多项式基函数推广应用到基于移动最小二乘近似的 EFG 方法. 一维空间中, 平移多项式基函数形式如下:

- ① 线性基 $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x - \bar{x}), \quad m = 2;$
- ② 二次基 $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x - \bar{x}, (x - \bar{x})^2), \quad m = 3;$
- ③ 三次基 $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (1, x - \bar{x}, (x - \bar{x})^2),$

$$(x - \bar{x})^3), m = 4;$$

其中 \bar{x} 为计算点.

3 MLS 形函数的一致性分析

形函数的一致性对于构造高精度的近似函数非常重要, 它表示该形函数所能够再生出的完备多项式阶数. MLS 近似函数的一致性取决于基函数所包含的完备单项式阶数. 一维空间中, 如完备的单项式阶数为 k , 则该形函数拥有 C^k 一致性, 即 $u^h(x) = \sum \phi_j(x)x_j^n = x_j^n$, 其中 $n = 0, 1, \dots, k$. 尽管传统多项式基函数与平移多项式基函数在理论上是等价的 [13], 然而在数值计算时却存在很大差异.

为了检验 EFG 方法分别采用上述两种基函数时, 形函数满足一致性条件的情况, 表 1 给出了三次基函数在区间 $[0, 1]$ 上的一致性条件的比较结果, 其中 $\phi_{j,x}, \phi_{j,xx}, \phi_{j,xxx}$ 分别表示 ϕ_j 的一阶导数, 二阶导数和三阶导数.

表 1 不同基函数下满足一致性条件情况比较

节点数目	$\sum \phi_{j,x} x_j = 1$		$\sum \phi_{j,xx} x_j^2 = 2$		$\sum \phi_{j,xxx} x_j^3 = 6$	
	传统基	平移基	传统基	平移基	传统基	平移基
21	1	1	2.00095	2	6.08612	6
41	1.00027	1	1.54359	2	-247.84	6
81	0.99618	1	49.3584	2	82254.8	6
161	5.23139	1	-14254	2	-2.42×10 ⁷	6.00003
321	-13.964	1	51971.7	2	-4.08×10 ⁷	5.99991
641	366.704	1	210869	2	4.168×10 ⁹	6.00043
1281	11.19	1	341376	2	2.193×10 ⁹	6.03204

由表 1 的比较结果可以看出, 当节点数目增加时, 采用传统多项式基函数的 EFG 方法, 形函数违背了一致性条件, 并且对于较少的节点布置, 形函数导数的阶数越高, 形函数的一致性越难以得到满足; 而采用平移多项式基函数的 EFG 方法则在节点数目较多时, 仍然满足形函数的一致性条件.

表 1 的结果表明: EFG 方法采用平移多项式基函数, 满足了形函数的一致性条件. 并且, 后续的数值算例仍将表明 EFG 方法采用平移多项式基函数时, 能够保持较高的数值计算精度. 本文后续所有算例均采用三次平移多项式基函数.

4 控制方程离散

考虑如下形式的 Kuramoto-Sivashinsky 方程

$$u_t + u \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad x \in [x_1, x_2], \quad (6)$$

初始条件: $u(x, 0) = f(x)$,

边界条件: $u(x_1, t) = \bar{u}_1, u(x_2, t) = \bar{u}_2$,

其中 a, b 为任意非零实常数.

(6) 式所对应的 Galenkin 强解积分表达式为

$$\int_{\Omega} \left\{ u_t + u \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\} \delta u d\Omega = 0, \quad (7)$$

其中 δu 为未知函数 u 的变分.

对 (7) 式进行分部积分得到 (6) 式的弱解积分表达式为

$$\int_{\Omega} \left\{ u_t \delta u + u \frac{\partial u}{\partial x} \delta u - a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} - b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} \right\} d\Omega = 0, \quad (8)$$

其中 Ω 为求解区域.

由 (5) 式可得 $u(x)$ 的近似函数及其偏导数为

$$u^h(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) u_i(t) = \Phi(x) U(t), \quad (9)$$

$$\frac{\partial u^h(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \phi_i(x) u_i(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = \Phi(x) \dot{U}(t), \quad (10)$$

$$\frac{\partial u^h(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^N \phi_i(x) u_i(t) = \sum_{i=1}^N \phi_{i,x}(x) u_i(t) = \Phi_x(x) U(t), \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u^h(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{i=1}^N \phi_i(x) u_i(t) = \sum_{i=1}^N \phi_{i,xx}(x) u_i(t) = \Phi_{xx}(x) U(t), \quad (12)$$

$$\frac{\partial^3 u^h(x, t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \sum_{i=1}^N \phi_i(x) u_i(t)$$

$$= \sum_{i=1}^N \phi_{i,xxx}(x)u_i(t) = \Phi_{xxx}(x)U(t), \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} U(t) &= (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))^T, \\ \dot{U}(t) &= \left(\frac{\partial u_1(t)}{\partial t}, \frac{\partial u_2(t)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_N(t)}{\partial t} \right)^T, \\ \Phi(x) &= (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x)), \\ \Phi_x(x) &= \left(\frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \phi_N(x)}{\partial x} \right), \\ \Phi_{xx}(x) &= \left(\frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \phi_2(x)}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 \phi_N(x)}{\partial x^2} \right), \\ \Phi_{xxx}(x) &= \left(\frac{\partial^3 \phi_1(x)}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 \phi_2(x)}{\partial x^3}, \dots, \frac{\partial^3 \phi_N(x)}{\partial x^3} \right), \end{aligned}$$

将 (9) 式—(13) 式代入 (8) 式, δu 与 u 取自同一函数空间, 由于 (8) 式对 $\forall \delta u$ 成立, 只需取 $\delta u = \phi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 得到

$$K\dot{U}(t) + (G + H)U(t) + \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x} \Phi^T(x) d\Omega = 0, \quad (14)$$

其中 K, G 和 H 为 $N \times N$ 矩阵, 其第 i 行, 第 j 列元素分别为

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega, \\ G_{ij} &= -a \int_{\Omega} \phi_{i,x} \phi_{j,x} d\Omega, \\ H_{ij} &= -b \int_{\Omega} \phi_{i,x} \phi_{j,xxx} d\Omega. \end{aligned}$$

采用 Crank-Nicolson 格式对 (14) 式进行时间离散, 得到如下离散格式

$$\begin{aligned} &K \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + (G + H) \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \\ &+ \int_{\Omega} \Phi^T(x) \frac{(uu_x)^{n+1} + (uu_x)^n}{2} d\Omega \\ &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

其中 Δt 为时间步长, $U^n = U(n\Delta t) = (u_1(n\Delta t), u_2(n\Delta t), \dots, u_N(n\Delta t))^T$.

非线性项 $(uu_x)^{n+1}$ 利用如下近似进行线性化处理 [12]

$$(uu_x)^{n+1} = u^{n+1}u_x^n + u^n u_x^{n+1} - u^n u_x^n, \quad (16)$$

将 (9), (11) 和 (16) 式代入 (15) 式, 可得

$$K \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + (G + H) \frac{U^{n+1} + U^n}{2}$$

$$+ (R + W)U^{n+1} = 0, \quad (17)$$

其中 R 和 W 为 $N \times N$ 矩阵, 其第 i 行, 第 j 列元素分别为

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \int_{\Omega} \frac{(\Phi_x U^n)}{2} \phi_i \phi_j d\Omega, \\ W_{ij} &= \int_{\Omega} \frac{(\Phi U^n)}{2} \phi_i \phi_{j,x} d\Omega. \end{aligned}$$

5 数值算例

本节采用平移基 EFG 方法, 分别对具有行波解的 Kuramoto-Sivashinsky 方程 [15] 和混沌现象的 Kuramoto-Sivashinsky [15] 方程进行了数值计算.

为了考察本文方法的计算精度, 引入如下 L_2 范数误差

$$L_2 = \|u - u^h\|_2 = \left(\int_{\Omega} (u - u^h)^2 \right)^{1/2}. \quad (18)$$

算例 1 考虑方程 (6) 中 $a = -1, b = 1$ 的情况, 此时方程具有行波解 [15]

$$\begin{aligned} u(x, t) &= c + \frac{15}{19\sqrt{19}} [-3 \tanh(k(x - ct - x_0)) \\ &+ \tanh^3(k(x - ct - x_0))], \end{aligned}$$

其中 c, k, x_0 为一组常数; c 是波速, k 是波数, x_0 为波的初始位置.

该算例的初值和边值可根据解析解准确得到. 计算时取计算区域为 $[-30, 30]$, 在计算区域内均匀布置 121 个节点, 在每个单元上采用三点 Gauss 积分, 时间步长取为 0.05 s. 图 1 和图 2 给出 EFG 方法在参数取 $c = 5, k = 1/2\sqrt{19}, x_0 = -10$ 的数值模拟结果. 为与文献结果进行比较, 表 2 给出了在参数取 $c = 0.2, k = 1/2\sqrt{19}, x_0 = -10$ 时, EFG 方法和文献 [14] 中采用复合二次 (multi-quadric, MQ) 函数、样条基 (spline basis, SP) 函数、薄板样条 (thin plate spline, TPS) 函数和高斯 (Gaussian, GA) 函数这四种径向基函数 (radial basic function, RBF) 方法的计算误差.

由图 1 可知, 本文提出的 EFG 方法求得的数值解与解析解非常吻合, 而且还可以看出相邻时刻的波形间距保持一致, 从而验证了波在以恒定速度向右传播; 此外还可以利用两个时刻波形之间的水平距离计算出波速大致为 5, 这与理论波速 $c = 5$ 相一致. 图 2 显示了本文 EFG 方法能够很好地模拟 Kuramoto-Sivashinsky 方程描述的波动

演化过程, 而且在演化过程中波的形状几乎不发生改变. 由表 2 中的 L_2 误差范数可知, 与 RBF 方

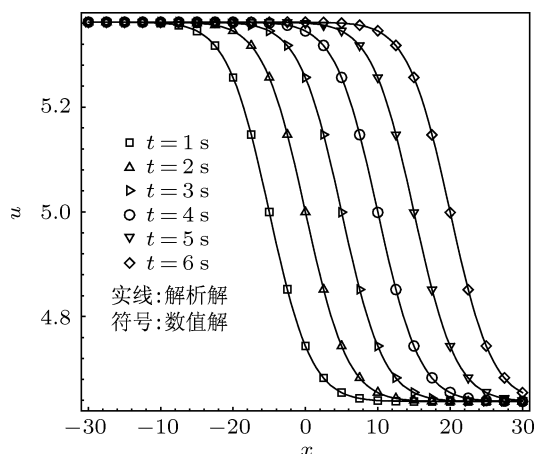


图1 不同时刻 EFG 方法的数值解与解析解比较

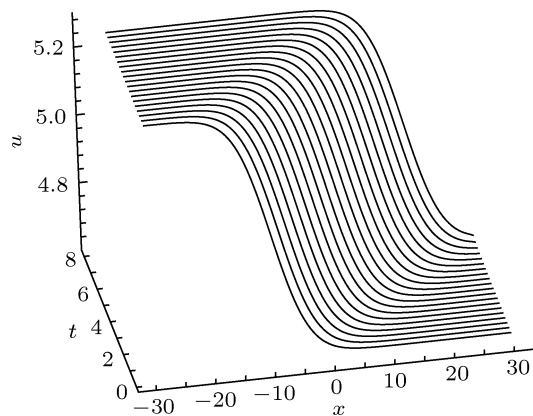


图2 不同时刻 EFG 方法数值解的演化图

法相比, 本文提出的 EFG 方法具有较高的数值计算精度.

表 2 EFG 方法与 RBF 方法在不同时刻的计算误差

	时间/s	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0
EFG	L_2	7.761×10^{-7}	1.627×10^{-6}	2.185×10^{-6}	2.615×10^{-6}	3.127×10^{-6}
				MQ		
	L_2	1.706×10^{-4}	2.649×10^{-4}	3.422×10^{-4}	6.156×10^{-4}	5.049×10^{-4}
RBF				SP		
	L_2	9.787×10^{-5}	8.515×10^{-5}	7.271×10^{-5}	2.662×10^{-5}	4.585×10^{-5}
				TPS		
	L_2	1.649×10^{-3}	3.971×10^{-3}	6.879×10^{-3}	1.057×10^{-2}	1.675×10^{-2}
			GA			
L_2	6.781×10^{-3}	1.745×10^{-2}	2.622×10^{-2}	3.389×10^{-2}	4.501×10^{-2}	

算例 2 考虑方程 (6) 中 $a = 1, b = 1$ 的情况, 采用文献 [15] 给出的 Gauss 初始条件和边值条件

$$u(x, 0) = \exp(-x^2),$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0,$$

该算例在有限空间区域展现混沌现象. 计算时, 对该算例在求解区域 $[-30, 30]$ 内均匀布置 201 个节点, 每个单元上采用三点 Gauss 积分, 时间步长取为 0.1 s. 计算结果如图 3—图 4 所示.

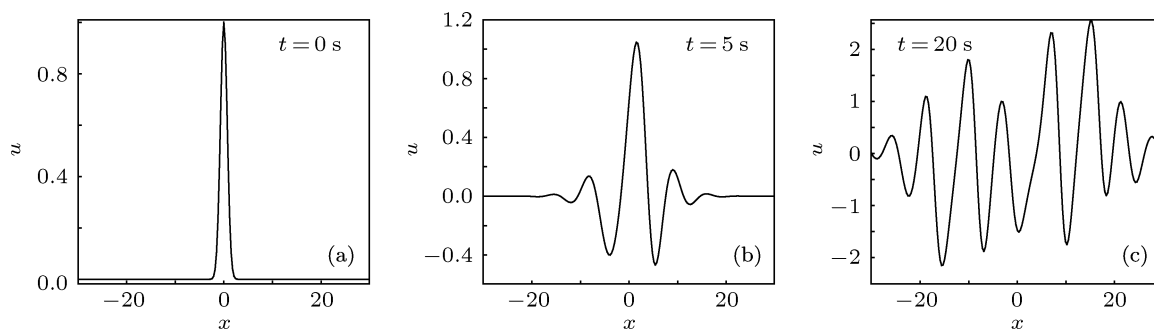


图3 EFG 方法在不同时刻的混沌解 (a) $t = 0$ s; (b) $t = 5$ s; (c) $t = 20$ s

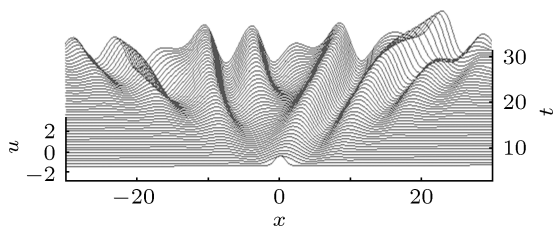


图4 EFG方法在不同时刻混沌解的时空演化过程

图3给出了EFG方法在 $t = 0, 5, 20$ s时刻的混沌解,图4给出了EFG方法在不同时刻混沌解的时空演化过程.由图3、图4可知,随着时间的推进,

数值解逐渐展现混沌现象,显示了收敛的混沌行为.为了与文献结果比较,图5和图6给出了文献[15]中采用RBF方法的计算结果,其中图5为RBF方法在 $t = 0, 5, 20$ s时刻的混沌解,图6为RBF方法在不同时刻混沌解的时空演化过程.将图3和图5、图4和图6进行对比,可知本文EFG方法与文献[15]中RBF方法得到的混沌现象吻合.为检验EFG方法的数值计算精度,表3给出了当 $t = 5, 10$ 和 15 s时,EFG方法和RBF方法的计算结果.由表3可知,EFG方法的计算结果与RBF方法的计算结果吻合.

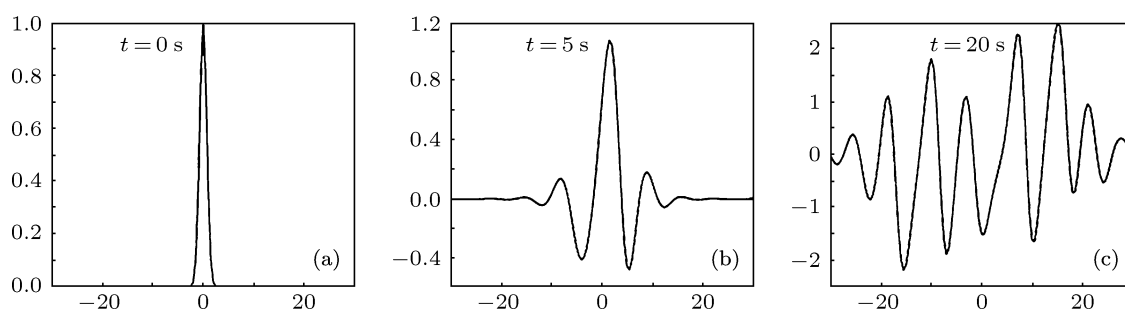


图5 RBF方法在不同时刻的混沌解 (a) $t = 0$ s; (b) $t = 5$ s; (c) $t = 20$ s

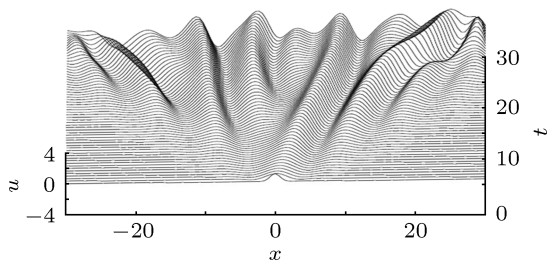


图6 RBF方法在不同时刻混沌解的时空演化过程

出了EFG方法在 $t = 50, 100, 200$ s时刻的混沌解,图8给出了在时间区间为 $[100, 200]$ s, EFG方法混沌解的时空演化过程.

由图7可知,随着时间的推进,混沌解逐渐趋于“稳定”,即在有限空间区域,混沌解开始围绕 $x = 0$ 做交替振荡,且振荡振幅大致稳定在空间区域 $[-3, 3]$,展现出随机性的非周期混沌运动.图8清晰地显示了长时间演化后,混沌振荡的无规则特性仍然存在且有一定的随机性,但这种无规则运动并非杂乱无章.

为进一步分析长时间演化的混沌行为,图7给

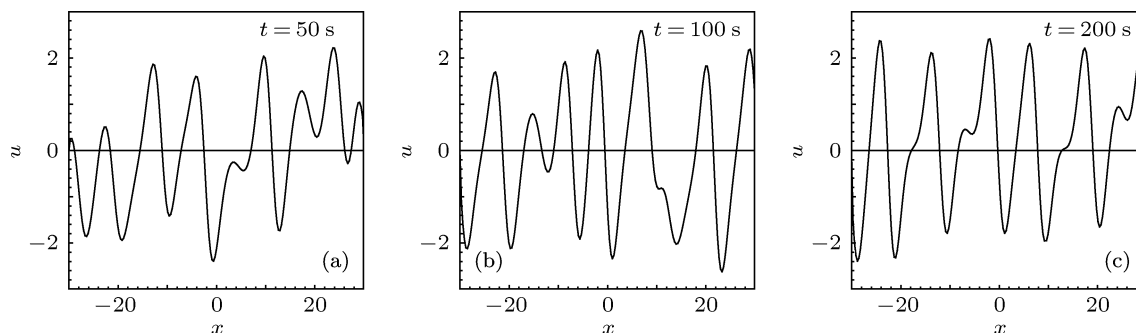


图7 EFG方法在不同时刻的混沌解 (a) $t = 50$ s; (b) $t = 100$ s; (c) $t = 200$ s

表3 EFG方法与RBF方法在不同时刻的计算结果

x	t = 5 s		t = 10 s		t = 15 s	
	EFG	RBF	EFG	RBF	EFG	RBF
-15	0.0115	0.0116	0.01293	0.0152	-0.4332	-0.4256
-12	-0.0424	-0.0424	-0.2334	-0.2357	-0.4998	-0.5086
-9	0.1068	0.1062	0.5273	0.5274	1.2123	1.2170
-6	-0.1249	-0.1234	-0.6283	-0.6278	-1.6440	-1.6457
-3	-0.3348	-0.3365	-0.6533	-0.6536	-0.0602	-0.0556
0	0.6407	0.6394	0.0522	0.0492	-0.4692	-0.4700
3	0.6153	0.6177	1.7267	1.7250	0.3740	0.3643
6	-0.4063	-0.4061	-0.7864	-0.7862	1.8335	1.8439
9	0.1827	0.1829	0.3488	0.3526	-1.1055	-1.1041
12	-0.0508	-0.0511	0.2069	0.2026	1.6621	1.6619
15	0.01073	0.0110	-0.1784	-0.1756	-0.7048	-0.7100

为分析计算区域对混沌行为的影响, 图9给出了在区域 $[-50, 50]$ 内, EFG方法在 $t = 50, 100, 200$ s 时刻的混沌解, 图10给出了在区域 $[-70, 70]$

内, EFG方法在 $t = 50, 100, 200$ s 时刻的混沌解.

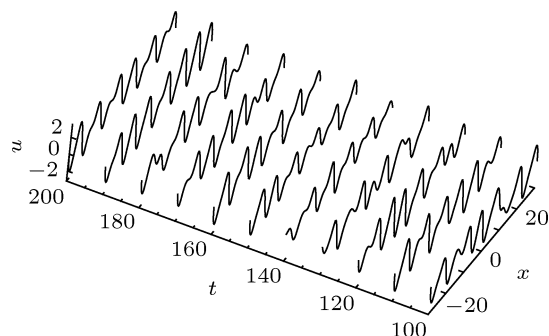


图8 EFG方法在时间区间为 $[100 \text{ s}, 200 \text{ s}]$ 的混沌解的时间演化过程

将图7, 图9和图10进行对比可知, 随着计算区域的增大, 混沌振荡的振幅略微增大, 并且振荡波的平均波长变短, 从而混沌振荡表现地愈加剧烈. 这些混沌现象与文献 [16] 中描绘的混沌现象吻合.

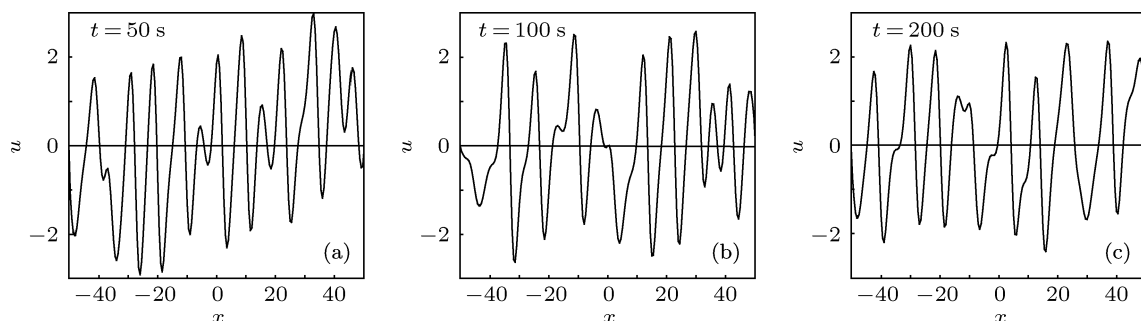


图9 EFG方法在不同时刻的混沌解 (a) $t = 50$ s; (b) $t = 100$ s; (c) $t = 200$ s

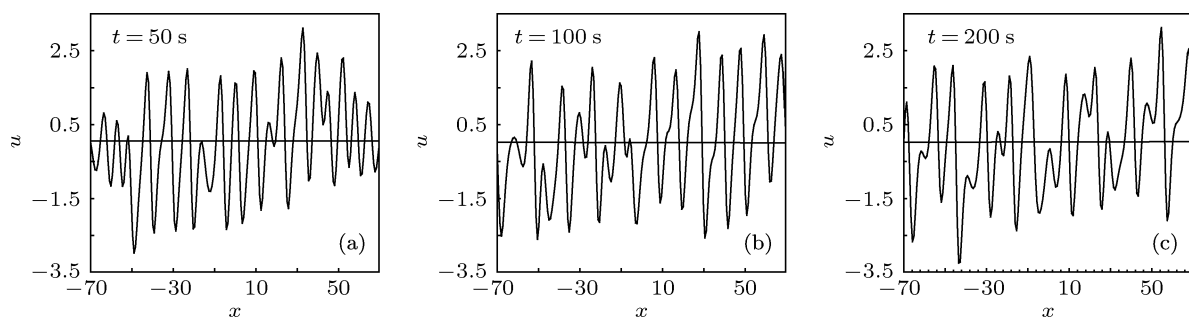


图10 EFG方法在不同时刻的混沌解 (a) $t = 50$ s; (b) $t = 100$ s; (c) $t = 200$ s

6 结论

本文建立了基于平移多项式基函数的EFG方法, 通过数值求解具有行波解和混沌现象的Kuramoto-Sivashinsky方程两个算例, 得到如

下结论:

(1) 与采用传统多项式基函数的EFG方法相比, 采用平移多项式基函数的EFG方法满足了形函数的一致性, 因而避免了传统EFG方法求解时形函数违背一致性所导致的结果失真;

(2) 采用平移多项式基函数的 EFG 方法不但可对具有行波解的 Kuramoto-Sivashinsky 方程进行精确的数值模拟, 很好地描述了方程的波动演化过程, 得出波以恒定速度传播的结论; 而且可以预测

出 Kuramoto-Sivashinsky 方程中的复杂的混沌现象;

(3) 与 RBF 方法相比, 采用平移多项式基函数的 EFG 方法求解 Kuramoto-Sivashinsky 方程, 其数值计算精度更高.

-
- [1] Kuramoto Y, Tsuzuki T 1975 *Prog. Theor. Phys.* **54** 687
 - [2] Sivashinsky G I 1977 *Acta Astronautica* **4** 1177
 - [3] Hyman J M, Nicolaenko B 1986 *Physica D* **18** 113
 - [4] Liu B Z, Peng J H 2004 *Nonlinear Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) p120 (in Chinese) [刘秉正, 彭建华 2004 非线性动力学 (北京: 高等教育出版社) 第 120 页]
 - [5] Kuramoto Y, Tsuzuki T 1976 *Pron. Theor. Phys.* **55** 356
 - [6] Sivashinsky G I, Michelson D M 1980 *Pron. Theor. Phys.* **63** 2112
 - [7] Sivashinsky G I 1983 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **15** 179
 - [8] Fan E 2000 *Phys. Lett. A* **277** 212
 - [9] Peng Y Z 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 641
 - [10] Nickel J 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **33** 1376
 - [11] Wang J F, Sun F X, Cheng R J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060201
 - [12] Cheng R J, Cheng Y M 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070206
 - [13] Jin X Z, Li G, Aluru N R 2001 *Comput. Modell. Eng. Sci.* **2** 447
 - [14] Fernandez-Mendez S, Huerta A 2004 *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **193** 1257
 - [15] Uddin M, Haq S, Islam S U 2009 *Appl. Math. Comput.* **212** 458
 - [16] Abdel-Gawad H I, Abdusalam H A 2001 *Chaos, Solitons and Fractals* **12** 2039

The element-free Galerkin method based on the shifted basis for solving the Kuramoto-Sivashinsky equation*

Feng Zhao Wang Xiao-Dong Ouyang Jie[†]

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

(Received 30 March 2012; revised manuscript received 11 June 2012)

Abstract

The Kuramoto-Sivashinsky equation is a kind of high-order nonlinear evolution equation which can describe complicated chaotic nature. Due to the existence of high-order derivatives in the equation, the shape functions violate the consistency conditions when using traditional element-free Galerkin method which adopts high-order polynomial basis functions to construct the shape functions. In order to solve the problems encountered in the traditional element-free Galerkin method, a kind of element-free Galerkin method adopting the shifted polynomial basis functions is presented in this paper. Compared with the traditional element-free Galerkin method, the Galerkin principle is still used to discrete the equation in this method, but the shape functions are constructed by moving least squares based on the shifted polynomial basis functions. Numerical results for the Kuramoto-Sivashinsky equation having traveling wave solution and chaotic nature prove the validity of the presented method.

Keywords: element-free Galerkin, Kuramoto-Sivashinsky equation, shifted polynomial basis functions, chaotic nature

PACS: 02.60.Lj, 03.65.Ge, 94.20.Bb, 05.45.Pq

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2012CB025903) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10871159).

[†] E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn