

# 被圆相位片衍射的空心高斯光束 的远场矢量结构特征\*

陆世专<sup>†</sup> 游开明 陈列尊 王友文 杨辉 戴志平

(衡阳师范学院物理与电子信息科学系, 衡阳 421008)

(2012年1月19日收到; 2012年5月2日收到修改稿)

基于麦克斯韦方程组解的矢量角谱表述与稳相法, 在仅有远场近似的条件下, 得到了被圆相位片衍射的空心高斯光束远场能流密度分布的解析表达式. 结果表明, 光束的总能流可以表示为自由项与附加项之和, 其中附加项是相位片对能流分布的影响; 总能流、自由项能流、附加项能流又可以分别表示为各自的 TE 项和 TM 项之和. 利用所导出的公式, 描绘了空心高斯光束的总能流、自由项能流、附加项能流及其各自的 TE 项与 TM 项能流的横截面分布图. 讨论了截断参数与附加相移对纵向总能流分布的影响.

**关键词:** 空心高斯光束, 矢量结构, 相位片

**PACS:** 42.25.Bs, 42.25.Fx, 42.30.Kq

## 1 引言

空心光束在原子光学中有着潜在的应用价值, 极大地吸引了人们的研究兴趣<sup>[1-4]</sup>. 在理论上, 已经提出了几种模型来描述空心光束, 例如有 TEM<sub>0l</sub> 光束<sup>[5]</sup>、高阶贝塞尔光束<sup>[6]</sup>、空心高斯光束<sup>[7,8]</sup>等模型. 其中空心高斯光束模型是一个比较理想而又简洁的模型. 利用空间滤波, Liu 等<sup>[9]</sup>提出了一种产生空心高斯光束的方法. 人们研究了空心高斯光束的分数傅里叶变换<sup>[10]</sup>、聚焦<sup>[11-13]</sup>、矢量结构<sup>[14-16]</sup>以及多种情况的传输特性<sup>[17-19]</sup>. 这些研究多数只涉及到硬光阑的衍射作用. 除了硬光阑, 还会碰到一些软光阑衍射的问题. 由于有相位片的存在会使光束局部产生一个附加相移, 可以用来改变高斯光束的强度分布<sup>[20]</sup>. Zhou<sup>[21]</sup>研究了被圆相位片衍射的高斯光束的矢量结构特征. 空心高斯光束不是一个单模光束, 它与高斯光束传输特性有很大的差异, 所以本文将进一步研究被圆相位片衍射的空心高斯光束的远场矢量结构特征.

## 2 能流分布的矢量结构

在直角坐标系中, 取光束的传播方向为  $z$  轴, 光束的中心轴与  $z$  轴重合, 取  $z = 0$  的平面为源平面, 设在源平面上空心高斯光束的初始分布为

$$\begin{bmatrix} E_x(\rho_0, 0) \\ E_y(\rho_0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\rho_0^2}{w_0^2}\right)^n \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{w_0^2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中  $\rho_0 = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$ ,  $n$  为空心高斯光束的阶数,  $w_0$  为高斯光束的束腰半径. 在 (1) 式中时间因子  $e^{-i\omega t}$  被省略. 将一块半径为  $R$ 、附加相移为  $\beta$  的圆形的相位片放置于源平面, 中心与坐标原点重合. 在相位片后面光束分布为

$$\begin{bmatrix} E_x(\rho_0, 0) \\ E_y(\rho_0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\rho_0^2}{w_0^2}\right)^n \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{w_0^2}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \times \text{circ}(\zeta), \quad (2)$$

\* 湖南省教育厅科研项目 (批准号: 11A018) 和湖南省自然科学基金 (批准号: 11JJ3076) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: shizhuanlu@gmail.com

其中  $\zeta = \rho_0/R$ ,

$$\text{circ}(\zeta) = \begin{cases} \exp(-i\beta), & 0 \leq \zeta \leq 1, \\ 1, & \zeta > 1. \end{cases} \quad (3)$$

根据矢量角谱表示方法, 在  $z > 0$  的空间, 电场强度可以表示为

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(p, q) \times \exp[ik(px + qy + \gamma z)] dpdq, \quad (4)$$

其中  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  为波矢 ( $\lambda$  为光束的波长),  $\gamma = (1 - p^2 - q^2)^{1/2}$ ,  $\mathbf{A}(p, q)$  为角谱, 可以写成如下形式

$$\mathbf{A}(p, q) = A_x(p, q)\mathbf{i} + A_y(p, q)\mathbf{j} + A_z(p, q)\mathbf{k}, \quad (5)$$

式中  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  分别为  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向的单位矢量,  $A_x(p, q)$ ,  $A_y(p, q)$ ,  $A_z(p, q)$  分别为角谱在  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向的分量,  $A_x(p, q)$  与  $A_y(p, q)$  可以分别表示为

$$A_x(p, q) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(x_0, y_0, 0) \times \exp[ik(px_0 + qy_0)] dx_0 dy_0, \quad (6a)$$

$$A_y(p, q) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x_0, y_0, 0) \times \exp[ik(px_0 + qy_0)] dx_0 dy_0. \quad (6b)$$

根据光束的初始分布, 经计算可得

$$A_x(p, q) = \frac{z_r}{\lambda} n! \exp(-i\beta) \exp\left(-\frac{b^2}{4f^2}\right) L_n\left(\frac{b^2}{4f^2}\right) + [1 - \exp(-i\beta)] \frac{k}{\lambda} \int_R^{\infty} \left[\frac{\rho_0^2}{w_0^2}\right]^n \times \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{w_0^2}\right) J_0(k\rho_0 b) \rho_0 d\rho_0, \quad (7a)$$

$$A_y(p, q) = 0, \quad (7b)$$

其中  $z_r = kw_0^2/2$  为瑞利长度,  $b^2 = p^2 + q^2$ ,  $f = 1/(kw_0)$  称为  $f$  参数,  $L_n(\cdot)$  为拉盖尔多项式,  $J_0(\cdot)$  为第一类零阶贝塞尔函数. 由关系式  $pA_x(p, q) + qA_y(p, q) + \gamma A_z(p, q) = 0$ , 可以求得

$$A_z(p, q) = -pA_x(p, q)/\gamma. \quad (7c)$$

根据电磁场的矢量结构理论<sup>[22,23]</sup>, 传输电磁场可以表示为 TE 项和 TM 项之和

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \mathbf{E}_{\text{TE}}(\rho, z) + \mathbf{E}_{\text{TM}}(\rho, z), \quad (8)$$

$$\mathbf{H}(\rho, z) = \mathbf{H}_{\text{TE}}(\rho, z) + \mathbf{H}_{\text{TM}}(\rho, z), \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{E}_{\text{TE}}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}(p, q) \cdot \mathbf{e}_1] \mathbf{e}_1 \times \exp[ik(px + qy + \gamma z)] dpdq, \quad (10)$$

$$\mathbf{E}_{\text{TM}}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}(p, q) \cdot \mathbf{e}_2] \mathbf{e}_2 \times \exp[ik(px + qy + \gamma z)] dpdq, \quad (11)$$

$$\mathbf{H}_{\text{TE}}(\rho, z) = \eta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}(p, q) \cdot \mathbf{e}_1] \mathbf{e}_2 \times \exp[ik(px + qy + \gamma z)] dpdq, \quad (12)$$

$$\mathbf{H}_{\text{TM}}(\rho, z) = \eta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{A}(p, q) \cdot \mathbf{e}_2] \mathbf{e}_1 \times \exp[ik(px + qy + \gamma z)] dpdq, \quad (13)$$

这里  $\eta = (\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}$ ,  $\varepsilon_0$  和  $\mu_0$  分别为真空中的介电常数和磁导率,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  为单位矢量, 分别定义为

$$\mathbf{e}_1 = \frac{q}{b}\mathbf{i} - \frac{p}{b}\mathbf{j}, \quad (14a)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{p\gamma}{b}\mathbf{i} + \frac{q\gamma}{b}\mathbf{j} - b\mathbf{k}. \quad (14b)$$

由 (7a) 式可以看出, 角谱分量由两项之和组成, 把它代入 (10)—(13) 式计算, 则相应的电磁场也可以分为两项, 即

$$\mathbf{E}_{\text{TE}}(\rho, z) = \mathbf{E}_{\text{TE1}}(\rho, z) + \mathbf{E}_{\text{TE2}}(\rho, z), \quad (15)$$

$$\mathbf{E}_{\text{TM}}(\rho, z) = \mathbf{E}_{\text{TM1}}(\rho, z) + \mathbf{E}_{\text{TM2}}(\rho, z), \quad (16)$$

$$\mathbf{H}_{\text{TE}}(\rho, z) = \mathbf{H}_{\text{TE1}}(\rho, z) + \mathbf{H}_{\text{TE2}}(\rho, z), \quad (17)$$

$$\mathbf{H}_{\text{TM}}(\rho, z) = \mathbf{H}_{\text{TM1}}(\rho, z) + \mathbf{H}_{\text{TM2}}(\rho, z). \quad (18)$$

接下来, 首先计算  $\mathbf{E}_{\text{TE}}(\rho, z)$ . 把 (7) 式与 (14) 式代入 (10) 式, 经计算后可得

$$\mathbf{E}_{\text{TE1}}(\rho, z) = \frac{z_r}{\lambda} n! \exp(-i\beta) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{b^2} \times \exp\left(-\frac{b^2}{4f^2}\right) L_n\left(\frac{b^2}{4f^2}\right) (q\mathbf{i} - p\mathbf{j}) \times \exp[ik(px + qy + \gamma z)] dpdq, \quad (19)$$

$$\mathbf{E}_{\text{TE2}}(\rho, z) = [1 - \exp(-i\beta)] \frac{k}{\lambda} \int_R^{\infty} \left(\frac{\rho_0^2}{w_0^2}\right)^n \times \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{w_0^2}\right) T(\rho_0, \rho, z) \rho_0 d\rho_0, \quad (20)$$

其中

$$T(\rho_0, \rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b^{-2} q J_0(k\rho_0 b) (q\mathbf{i} - p\mathbf{j}) \times \exp[ik(px + qy + \gamma z)] dpdq. \quad (21)$$

在远场区域  $k(\rho^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty$  成立, 所以可以用稳相法处理 (19) 与 (21) 式中的积分. 由 (19) 式积分可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{TE1}}(\rho, z) = & -\frac{iz_r z}{\rho^2 r^2} y n! \exp(ikr - i\beta) \\ & \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) \\ & \times L_n\left(\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}), \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ . 由 (21) 式积分可得

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\rho_0, \rho, z) = & -\frac{i\lambda z}{\rho^2 r^2} y \exp(ikr) \\ & J_0(k\rho_0\rho/r) (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}). \end{aligned} \quad (23)$$

为了获得  $\mathbf{E}_{\text{TE2}}(\rho, z)$  的解析表达式, 可以把第一类零阶贝塞尔函数展开为如下形式

$$J_0(k\rho_0\rho/r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (k\rho_0\rho)^{2m}}{2^{2m} (m!)^2 r^{2m}}. \quad (24)$$

把 (23) 式与 (24) 式代入 (20) 式积分得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{TE2}}(\rho, z) = & -iz_r z y [1 - \exp(-i\beta)] \\ & \times \exp(ikr) (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \rho^{2m-2} \Gamma(1+m+n, \delta^2)}{2^{2m} (m!)^2 r^{2m+2} f^{2m}}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中  $\delta = R/w_0$  为截断参数,  $\Gamma(1+m+n, \delta^2)$  为不完全 Gamma 函数, 具体形式为

$$\Gamma(1+m+n, \delta^2) = \int_{\delta^2}^{\infty} \exp(-t) t^{m+n} dt. \quad (26)$$

类似地, 可以计算出电磁场的其他各个量的远场解析表达式, 具体结果如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{TM1}} = & -\frac{iz_r}{\rho^2 r^2} x n! \\ & \times \exp(ikr - i\beta) \exp\left(-\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) \\ & \times L_n\left(\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) \\ & \times (xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - \rho^2\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{TM2}} = & -iz_r x [1 - \exp(-i\beta)] \\ & \times \exp(ikr) (xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - \rho^2\mathbf{k}) \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \rho^{2m-2} \Gamma(1+m+n, \delta^2)}{2^{2m} (m!)^2 r^{2m+2} f^{2m}}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\mathbf{H}_{\text{TE1}} = -\eta \frac{iz_r z}{\rho^2 r^3} y n! \exp(ikr - i\beta)$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) L_n\left(\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) \\ & \times (xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - \rho^2\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{TE2}} = & -i\eta z_r z y [1 - \exp(-i\beta)] \\ & \times \exp(ikr) (xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - \rho^2\mathbf{k}) \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \rho^{2m-2} \Gamma(1+m+n, \delta^2)}{2^{2m} (m!)^2 r^{2m+3} f^{2m}}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{TM1}} = & \eta \frac{iz_r}{\rho^2 r} x n! \exp(ikr - i\beta) \\ & \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) L_n\left(\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) \\ & \times (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{TM2}} = & i\eta z_r x [1 - \exp(-i\beta)] \\ & \times \exp(ikr) (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \rho^{2m-2} \Gamma(1+m+n, \delta^2)}{2^{2m} (m!)^2 r^{2m+1} f^{2m}}. \end{aligned} \quad (32)$$

上面式中电场强度、磁场强度以及后面提到的能流都是关于  $x, y, z$  的函数, 为了使式子更简洁, 予以省略.

最后, 根据已经得到的电场强度与磁场强度可以算出被圆相位片衍射的空心高斯光束在远场区域的能流密度分布, 也可以分为 TE 项和 TM 项

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_{\text{TE}} = & \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}_{\text{TE}} \times \mathbf{H}_{\text{TE}}^*] \\ = & \langle S \rangle_{\text{TE0}} + \langle S \rangle_{\text{TE1}}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_{\text{TM}} = & \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}_{\text{TM}} \times \mathbf{H}_{\text{TM}}^*] \\ = & \langle S \rangle_{\text{TM0}} + \langle S \rangle_{\text{TM1}}, \end{aligned} \quad (34)$$

其中尖括号表示对时间取平均,  $\text{Re}$  表示取实部, 星号表示取复共轭, 经计算  $\langle S \rangle_{\text{TE0}}, \langle S \rangle_{\text{TE1}}, \langle S \rangle_{\text{TM0}}, \langle S \rangle_{\text{TM1}}$  可以分别表示为

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_{\text{TE0}} = & \frac{\eta z_r^2 z^2}{2\rho^2 r^5} y^2 (n!)^2 \\ & \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{2f^2 r^2}\right) L_n\left(\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right)^2 \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_{\text{TE1}} = & \frac{\eta z_r^2 z^2}{r^5} y^2 (1 - \cos \beta) \end{aligned}$$

$$\times \left[ \rho^2 \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \rho^{2m-2} \Gamma(1+m+n, \delta^2)}{2^{2m} (m!)^2 r^{2m} f^{2m}} \right)^2 - n! \exp\left(-\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) L_n\left(\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \rho^{2m-2} \Gamma(1+m+n, \delta^2)}{2^{2m} (m!)^2 r^{2m} f^{2m}} \right] \mathbf{r}, \quad (36)$$

$$\langle S \rangle_{\text{TM}0} = \frac{\eta z_r^2}{2\rho^2 r^3} x^2 (n!)^2 \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{2f^2 r^2}\right) L_n\left(\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right)^2, \quad (37)$$

$$\langle S \rangle_{\text{TM}1} = \frac{\eta z_r^2}{r^3} x^2 (1 - \cos \beta) \times \left[ \rho^2 \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \rho^{2m-2} \Gamma(1+m+n, \delta^2)}{2^{2m} (m!)^2 r^{2m} f^{2m}} \right)^2 - n! \exp\left(-\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) L_n\left(\frac{\rho^2}{4f^2 r^2}\right) \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \rho^{2m-2} \Gamma(1+m+n, \delta^2)}{2^{2m} (m!)^2 r^{2m} f^{2m}} \right] \mathbf{r}, \quad (38)$$

其中  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , 总能流密度可以表示为 TE 和 TM 两项之和

$$\langle S \rangle = \langle S \rangle_{\text{TE}} + \langle S \rangle_{\text{TM}} = \langle S \rangle_0 + \langle S \rangle_1, \quad (39)$$

其中  $\langle S \rangle_0$  称为自由项能流, 表示空心高斯光束在自由空间传输时的远场能流分布;  $\langle S \rangle_1$  称为附加项能流, 直接反映相位片对远场能流分布的影响.  $\langle S \rangle_0$  与  $\langle S \rangle_1$  也可以分别表示为 TE 项与 TM 项之和

$$\langle S \rangle_0 = \langle S \rangle_{\text{TE}0} + \langle S \rangle_{\text{TM}0}, \quad (40)$$

$$\langle S \rangle_1 = \langle S \rangle_{\text{TE}1} + \langle S \rangle_{\text{TM}1}. \quad (41)$$

### 3 分析与讨论

在远场区域  $z \gg x, y$ , 所以横向能流远小于纵向能流. 当  $\delta \rightarrow \infty$  时, (36) 式与 (38) 式中的求和部分趋向于零, 即附加项能流趋于零, 所以相位片对远场能流分布的影响可忽略. 相位延迟因子  $\beta$  以系数形式出现在式中, 当  $\beta$  改变时, 不会改变附加项能流分布的形状, 只会改变其大小. 附加项能流大小随  $\beta$  的变化呈周期性, 周期为  $2\pi$ , 当  $\beta = \pi$  时, 其值最大.

$f$  参数不同的空心高斯光束在远场的纵向能流分布情况如图 1 与图 2 所示. 图中参数为:  $z = 20z_r$ ,  $\delta = 1.5$ ,  $n = 3$ ,  $\beta = \pi$ . 图 1 中  $f$  参数为 0.05; 图 2 中的  $f$  参数为 1, 对应束腰很小的极端情况. 从图中可以看出能流的 TE 项和 TM 项在远场区域是正交的. 通过对图 2 与图 1 的比较可以看出,  $f$  参数增大后总能流分布的轮廓形状发生了改变, 由圆形变成了椭圆形, 不再呈环状分布, 而是呈连续分布. 总能流于光轴中心处最大, 而在源平面的空心光束分布中心为暗点, 所以能流在传输过程中发生了很大改变. 这是由于空心高斯光束是多模光束, 在传输过程中多模衍射叠加形成了这样的结果. 附加项能流中心值为负, 外围为正, 说明相位片的存在会削弱空心高斯光束远场能流分布的中心能流, 而使外围能流增大.

归一化的空心高斯光束纵向总能流分布随截断参数  $\delta$  的变化关系如图 3 所示. 图中参数设置为:  $z = 20z_r$ ,  $n = 3$ ,  $f = 0.05$ ,  $\beta = \pi$ . 实线加实三角形、圆圈、五角星、圆点、正方形、空三角形分别对应于  $\delta = 0.00, 0.80, 1.80, 1.92, 2.10, 3.00$ . 从图 3 中可以看出, 当截断参数增大时, 中心能流先减小至零 (对应  $\delta = 1.92$ ) 再增至最大; 当截断参数趋向于零 (例  $\delta < 0.8$ ) 或者趋向于无穷大 (例  $\delta > 3.0$ ) 时, 相位片对光束能流分布的影响可以忽略不计.

归一化的空心高斯光束纵向总能流分布随附加相移  $\beta$  的变化关系如图 4 所示. 图 4 中参数为:  $z = 20z_r$ ,  $n = 3$ ,  $f = 0.05$ ,  $\delta = 1.5$ . 图中的实线、虚线、点线、虚点线分别对应于  $\beta = 0, \pi/4, \pi/2, \pi$ . 由图 4 可以看出, 当其他条件不变时, 总能流分布会随  $\beta$  的变化而发生改变.  $\beta$  由零增大到  $\pi$  的过程中, 能流分布的外围相对值保持增大, 说明相位片的衍射效果使能流的横截面分布趋向于分散. 文献 [21] 认为附加相移的改变不会影响能流的相对分布. 这里需指出, 文献 [21] 中的 (34) 式和 (36) 式表示是有错误的, 应该由于计算能流密度时没有对磁场强度取复共轭导致的. 图 3 的结果表明, 只有在  $\delta$  较小或较大时附加相移的改变对能流分布的影响才可以忽略不计.

在远场区域, 横向能流分布关于光轴是圆对称的, 所以分析横向能流时只给出了沿  $x$  轴的能流分布图. 在图 5 中, 给出了远场横向能流沿  $x$  轴的分布, 图中参数为:  $z = 20z_r$ ,  $n = 3$ ,  $f = 0.05$ ,  $\delta = 1.5$ . 图中的点线、虚线、实线分别对应于  $\langle S_x \rangle_0, \langle S_x \rangle_1$ ,

$\langle S_x \rangle$ .  $\langle S_x \rangle_1$  取值可以为负, 负值表示横向能流往内流, 即沿着  $x$  轴从外向光轴方向流. 从图中可以看出, 相位片的存在可以使横向总能流减小. 横向能

流的存在会导致纵向能流横截面的分布的改变, 横向能流减小可以使纵向能流横截面的分布在传输过程中更稳定一些.

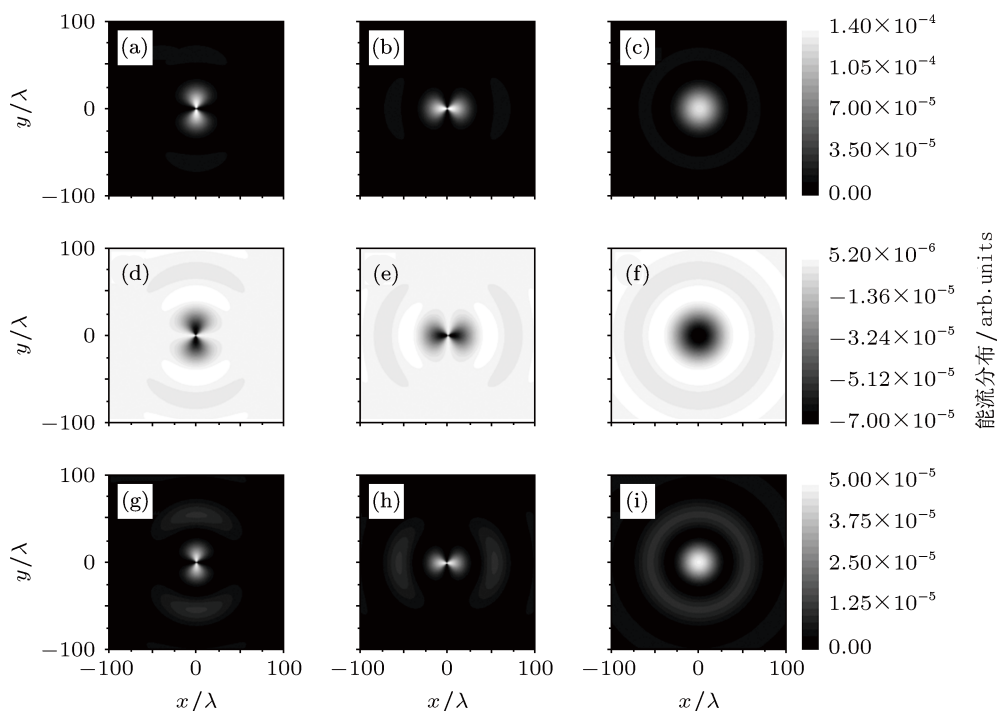


图 1  $f$  参数为 0.05 的空心高斯光束的远场纵向能流分布, 参数设置为  $z = 20z_r$ ,  $\delta = 1.5$ ,  $n = 3$ ,  $\beta = \pi$  (a)  $\langle S_z \rangle_{\text{TE0}}$ ; (b)  $\langle S_z \rangle_{\text{TM0}}$ ; (c)  $\langle S_z \rangle_0$ ; (d)  $\langle S_z \rangle_{\text{TE1}}$ ; (e)  $\langle S_z \rangle_{\text{TM1}}$ ; (f)  $\langle S_z \rangle_1$ ; (g)  $\langle S_z \rangle_{\text{TE}}$ ; (h)  $\langle S_z \rangle_{\text{TM}}$ ; (i)  $\langle S_z \rangle$

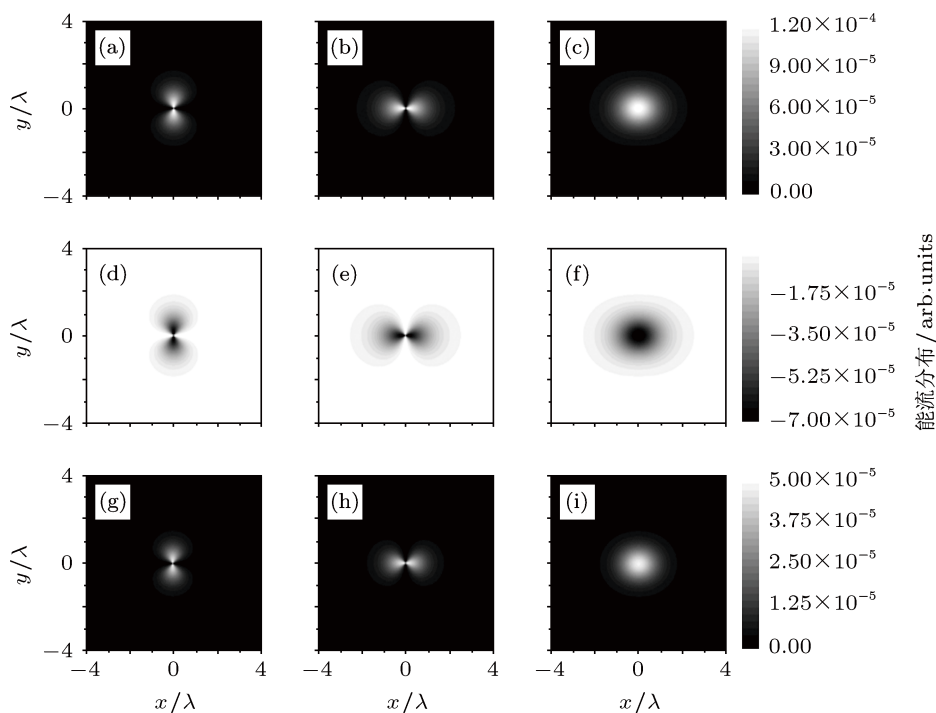


图 2  $f$  参数为 1 的空心高斯光束的远场纵向能流分布, 参数设置为  $z = 20z_r$ ,  $\delta = 1.5$ ,  $n = 3$ ,  $\beta = \pi$  (a)  $\langle S_z \rangle_{\text{TE0}}$ ; (b)  $\langle S_z \rangle_{\text{TM0}}$ ; (c)  $\langle S_z \rangle_0$ ; (d)  $\langle S_z \rangle_{\text{TE1}}$ ; (e)  $\langle S_z \rangle_{\text{TM1}}$ ; (f)  $\langle S_z \rangle_1$ ; (g)  $\langle S_z \rangle_{\text{TE}}$ ; (h)  $\langle S_z \rangle_{\text{TM}}$ ; (i)  $\langle S_z \rangle$

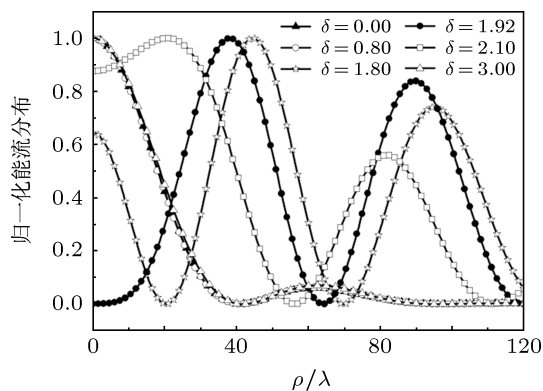


图3 归一化的纵向总能流随截断参数的变化关系, 参数设置为  $z = 20z_r$ ,  $n = 3$ ,  $f = 0.05$ ,  $\beta = \pi$

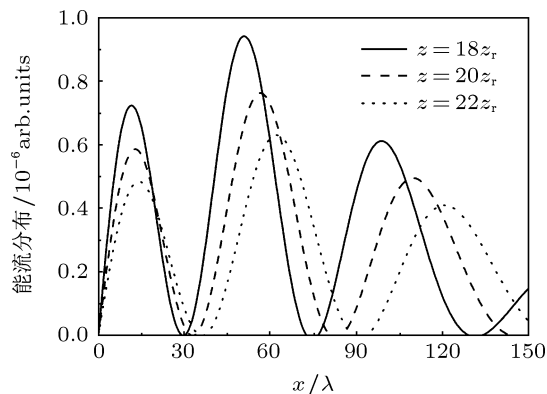


图6 横向总能流随传输距离的变化关系, 参数设置为  $n = 3$ ,  $f = 0.05$ ,  $\delta = 1.5$ ,  $\beta = \pi$

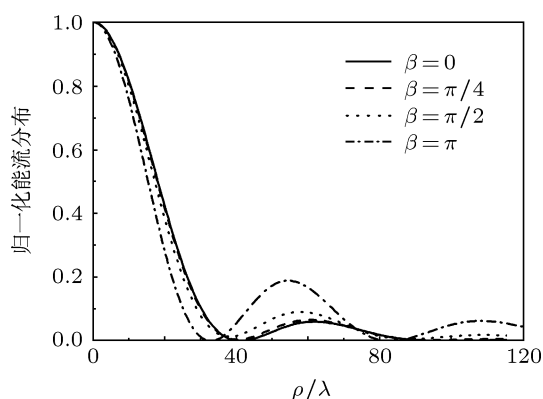


图4 归一化的纵向总能流随附加相移的变化关系, 参数设置为  $z = 20z_r$ ,  $n = 3$ ,  $f = 0.05$ ,  $\delta = 1.5$

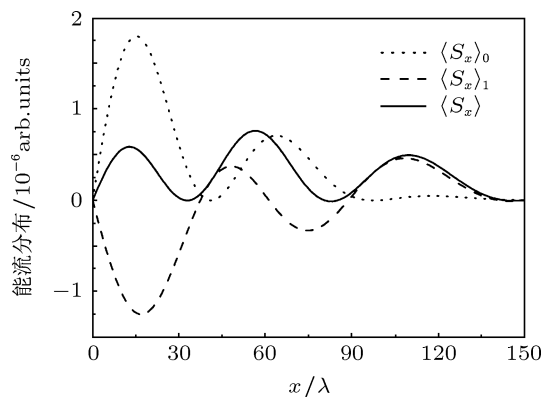


图5 远场横向能流分布, 参数设置为  $z = 20z_r$ ,  $n = 3$ ,  $f = 0.05$ ,  $\delta = 1.5$ ,  $\beta = \pi$

横向总能流随光束传输距离的变化关系如图6所示. 参数设置为:  $n = 3$ ,  $f = 0.05$ ,  $\delta = 1.5$ ,  $\beta = \pi$ . 横向总能流在传输过程中是动态变化的, 随着传输距离的增大, 横向能流相对强度减小, 整体向外围移动, 会导致光斑在传输过程中扩大.

## 4 结论

基于麦克斯韦方程组解的矢量角谱表述与稳相法, 在仅有远场近似的条件下, 得到了被圆相位片衍射的空心高斯光束的解析矢量结构. 光束总能流可以表示为自由项能流与附加项能流之和. 各项能流又可分解为 TE 项和 TM 项, 在远场 TE 项与 TM 项是正交的. 此结果适用于光束非旁轴传输的情况. 分析了  $f = 0.05$  与  $f = 1$  的两种不同情况下光束的传输性质, 两者有较大的差异, 说明空心高斯光束的旁轴传输与非旁轴传输特性是不同的. 当  $f = 1$  时对应束腰比波长还小的极端情况, 与  $f = 0.05$  的情况相比, 远场纵向总能流分布的轮廓形状发生了改变, 由圆形变成了椭圆形. 讨论了截断参数与附加相移对光束纵向能流分布的影响. 发现  $\delta$  与  $\beta$  分别单独变化时, 光束的纵向总能流分布会受到其影响. 另外分析了横向能流的分布情况, 在远场横向能流远远小于纵向能流, 横向能流的作用主要是改变纵向能流的横截面分布. 一般情况下, 人们不会重视对横向能流的分析, 然而, 横向能流也会导致一些有趣的现象, 例如有光学马格努斯效应<sup>[24]</sup>和光学自旋霍尔效应<sup>[25]</sup>等. 我们将在此基础上进一步研究涡旋光束的马格努斯效应与自旋霍尔效应. 这一研究丰富了对空心高斯光束的认识, 不仅揭示了其矢量结构特性, 还有助于了解了相位片对光束传输的影响.

- [1] Ito H, Nakata T, Sakaki K, Ohtsu M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4500
- [2] Yan M, Yin J P, Zhu Y F 2000 *J. Opt. Soc. Am. B* **17** 1817
- [3] Wang Z L, Dai M, Yin J P 2005 *Opt. Express* **13** 8406
- [4] Luo Y M, Lü B D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3915 (in Chinese) [罗亚梅, 吕百达 2009 物理学报 **58** 3915]
- [5] Kuga T, Torii Y, Shiokawa N, Hirano T, Shimizu Y, Sasa H 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4713
- [6] Arlt J, Dholakia K 2000 *Opt. Commun.* **177** 297
- [7] Cai Y J, Lu X H, Lin Q 2003 *Opt. Lett.* **28** 1084
- [8] Zhang L, Cai Y J, Lu X H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1777 (in Chinese) [张蕾, 蔡阳健, 陆璇辉 2004 物理学报 **53** 1777]
- [9] Liu Z J, Zhao H F, Liu J L, Lin J, Ahmad M A, Liu S T 2007 *Opt. Lett.* **32** 2076
- [10] Zheng C W 2006 *Phys. Lett. A* **355** 156
- [11] Zhao C L, Wang L G, Lu X H 2008 *Opt. Laser Technol.* **40** 58
- [12] Zhang H F, Wu G H, Guo H 2008 *Opt. Commun.* **281** 4169
- [13] Alkelly A A, Al-Nadarya H, Alhijrya I A 2011 *Opt. Commun.* **284** 322
- [14] Zhou G Q, Chu X X, Zheng J 2008 *Opt. Commun.* **281** 5653
- [15] Wu G H, Lou Q H, Zhou J 2008 *Opt. Express* **16** 6417
- [16] Zhang Y L, Wang B, Li X Y, Zhu J Q 2010 *Optik* **121** 652
- [17] Cai Y J, He S L 2006 *J. Opt. Soc. Am. A* **23** 1410
- [18] Deng D G, Yu H, Xu S Q, Tian G L, Fan Z X 2008 *J. Opt. Soc. Am. B* **25** 83
- [19] Zhou G Q 2009 *Opt. Laser Technol.* **41** 562
- [20] Jiang Z P, Lu Q S, Liu Z J 1997 *Appl. Opt.* **36** 772
- [21] Zhou G Q 2011 *Opt. Commun.* **284** 8
- [22] Martinez-Herrero R, Mejias P M, Bosch S, Carnicer A 2001 *J. Opt. Soc. Am. A* **18** 1678
- [23] Zhou G Q 2006 *Opt. Lett.* **31** 2616
- [24] Luo H L, Wen S C, Shu W X, Fan D Y 2010 *Phys. Rev. A* **81** 053826
- [25] Luo H L, Wen S C, Shu W X, Fan D Y 2012 *Opt. Commun.* **285** 864

# Vectorial structure of a hollow Gaussian beam diffracted by a circular phase aperture in the far field\*

Lu Shi-Zhuan<sup>†</sup> You Kai-Ming Chen Lie-Zun Wang You-Wen  
Yang Hui Dai Zhi-Ping

(Department of Physics and Electronic Information Science, Hengyang Normal University, Hengyang 421008, China)

(Received 19 January 2012; revised manuscript received 2 May 2012)

## Abstract

Based on the vector angular spectrum representation of the Maxwell equations and the method of stationary phase, only with the far field approximation, the analytical expressions of energy flux density of a hollow Gaussian beam diffracted by a circular phase aperture is presented. It is shown that the total energy flux of the beam can be expressed as the sum of the unapertured term and the additional term, where the additional term is the effect of the phase aperture on the beam; the total energy flux, the unapertured one and the additional one each can be expressed as the sum of TE term and TM term. The distributions of the total energy flux, the unapertured one, the additional one, and their TE terms and TM terms are depicted in the far field. The influences of truncation parameter  $\delta$  and the phase delay  $\beta$  on the longitudinal total energy flux distributions are discussed.

**Keywords:** hollow Gaussian beam, vectorial structure, phase aperture

**PACS:** 42.25.Bs, 42.25.Fx, 42.30.Kq

---

\* Project supported by the Research Foundation of Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 11A018), and the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 11JJ3076).

<sup>†</sup> E-mail: shizhuanlu@gmail.com