

基于热质理论的广义热弹性动力学模型*

王颖泽[†] 宋新南

(江苏大学能源与动力工程学院, 镇江 212013)

(2012年4月16日收到; 2012年5月15日收到修改稿)

具有微尺度传热特征的超常传热过程中, 热流矢与温度梯度之间存在延迟效应, 且热流的运动受到空间效应的影响. 基于热质概念的普适导热定律, 结合 Clausius 不等式和 Helmholtz 自由能公式, 构建了计及热流矢和温度对时间和空间惯性效应的广义热弹性动力学模型, 推导了各向同性材料超常传热行为的热弹性控制方程组. 通过与已有广义热弹性动力学模型进行对比分析可得, 当热流密度不大的条件下, 热流矢与温度对空间的惯性效应可忽略时, 基于热质概念的广义热弹性模型可分别退化为 L-S, G-L 和 G-N 的模型; 对于尺度微观、稳态导热条件时, 热流矢与温度对空间的惯性效应不可忽略, 此时导热系数将受到热质运动惯性效应的影响, 利用所建模型可揭示稳态导热时呈现的非傅里叶现象, 并可避免基于已有广义模型得到的导热系数随结构特征尺寸变化的非物理现象.

关键词: 热质, 普适导热定律, 广义热弹性动力学模型, 微尺度传热

PACS: 46.25.Cc, 46.25.Hf

1 引言

经典的热弹性理论中用于描述热量传递过程的控制方程为抛物型方程, 意味着热扰动的速度为无限大. 随着激光脉冲、微波等加热技术的发展以及器件的小型化, 围绕具有超急速、微尺度传热特征的超常传热行为成为当前的研究热点. 通过已有实验可知^[1], 当热作用的时间极其短暂或处于极低温的环境下时, 热量将以有限速度传播. 显然, 对于超常的传热行为, 经典的热弹性理论将无法给出准确的描述. 为了弥补经典热弹性理论的不足, 相关学者基于不同的传热机理建立了不同形式的可以准确描述热以有限速度传播的热弹性理论, 为了区别于经典热弹性理论, 将其称之为广义热弹性理论. 其中, 应用较为广泛的主要有基于热流矢与温度梯度之间存在延迟效应的 L-S 理论^[2] 和 G-L 理论^[3] 以及基于能量非耗散效应的 G-N 理论^[4]. 相比于经典理论, 这些广义热弹性理论中的温度控制方程为双曲型方程, 为此可以准确地描述热量以有限速

度传递的波动特征. 此外, 基于微观两步模型提出的适合于微尺寸结构传热行为的 C-T 理论^[5] 以及基于双温度热传导模型提出的双温度广义热弹性理论^[6] 也陆续地被用于超常传热问题的研究中.

采用上述广义热弹性理论, 相关学者围绕各类超常传热问题进行了大量的研究, 在包括模型的求解、热波及热弹性波的传递、温度场、位移场以及应力场的分布以及延迟和耦合效应与各物理场之间的交叉影响等方面取得了诸多有价值的成果^[7,8]. 但值得注意的是, 上述理论所建模型均是从修正傅里叶导热定律的角度出发而得到的唯象模型, 主要用于解决时间极短时(超急速传热)的热力学行为, 由于模型中并不包含热流矢对空间的惯性效应, 对于稳态导热问题, 将退化为经典热弹性模型. 随着纳米技术和低维材料的发展, 采用经典模型研究具有空间微尺度传热特征的热力学问题时, 将得到导热系数与结构特征存在正比关系的非物理现象^[9,10]. 文献[11]通过对稳态导热条件下碳纳米管导热系数的研究中指出, 基于经典模型得到的与结构特征尺寸成正比关系的导热系数为器件

* 国家自然科学基金(批准号: 11102073, 50978125)、江苏省自然科学基金(批准号: BK2008234)和江苏大学高级人才启动基金(批准号: 10JDG055)资助的课题.

[†] E-mail: wyz3701320@ujs.edu.cn

的表观导热系数, 只有考虑热流矢及温度对空间的惯性效应才能获取符合实际的真实导热系数. 鉴于此, 要想全面揭示具有微尺度传热特征的超常传热问题, 除了考虑热流矢对时间的惯性效应外 (热以有限速度传播), 还要计及其对空间的惯性效应.

本文基于过增元和曹炳阳等^[11,12]基于热质概念提出的能够描述热流矢和温度对时间和空间的惯性效应的普适导热定律, 依据 Clausius 不等式以及 Helmholtz 自由能公式, 构建了描述超常传热行为的广义热弹性动力学模型, 推导了各向同性材料超常传热问题的热弹性控制方程组. 通过与已有热弹性理论模型进行对比可知, 对于时间极短、尺度宏观的超常传热问题, 在空间效应可忽略的条件下, 模型可分别退化为 L-S, G-L 和 G-N 广义热弹性模型; 而对于尺度微观、稳态导热下的传热问题, 模型退化为包含空间惯性效应的稳态模型, 可以揭示稳态导热下的非傅里叶导热现象.

2 模型的建立

2.1 普适导热定律

根据爱因斯坦的质能关系式, 过增元等引入热质的概念^[13]

$$\rho_h = \frac{\rho c_v T}{c^2}. \quad (1)$$

式中, ρ_h 为热质的密度, ρ 为物体的密度, T 为物体的温度, c_v 为常应变比热, c 为真空中的光速.

当固体介质中存在温度梯度时, 热就会从高温流向低温, 热质就具有宏观速度, 称之为漂移速度, 大小可由热流密度确定:

$$u_h = q_h / \rho_h, \quad (2)$$

式中 u_h 为漂移速度, $q_h = q/c^2$ 为热质流密度, q 为热流密度.

可见, 在引入热质概念后, 可基于牛顿力学原理构建热质流动的控制方程. 根据牛顿第二定律可得

$$\frac{DM}{Dt} = F_R, \quad (3)$$

式中, M 为热质的动量, F_R 为热质运动过程中受到的作用力主矢量.

对于体积为 V 面积为 S 的单元体而言, 动量 M 可表示为

$$M = \int_V \rho_h u_h dV. \quad (4)$$

热质运动过程中将受到来自热质压力差引起的驱动力和来自介质内部的阻力的共同作用^[14], 相应的 F_R 可表示为

$$F_R = \int_S p_h \cdot n_i ds - \int_V \rho f_h dV, \quad (5)$$

式中 p_h 为热子气压力, f_h 为单位质量的阻力, n_i 为单位基矢量.

将 (4) 式和 (5) 式代入 (3) 式中进行整理可得:

$$\rho_h \frac{Du_{h,i}}{Dt} = p_{h,i} - \rho f_{h,i}^i, \quad (6)$$

式中下标 “, i ” 表示对坐标的导数, 上标 “ i ” 表示沿坐标轴的分量.

将声子气的状态方程及阻力的关系式^[14] 分别代入上式进行整理可得

$$\begin{aligned} & \tau \left(\dot{q}_i - u_h^i \rho c_v \dot{T} \right) + \tau u_h^i \left(q_{i,i} - u_h^i \rho c_v T_{,i} \right) \\ & = -k_{ij} T_{,j} - q_i, \end{aligned} \quad (7)$$

式中 k_{ij} 为各向异性材料的导热系数, $\tau = \frac{k_{ij}}{\gamma \rho c_v^2 T}$ 为特征时间, 表征介质对热质运动的阻力特性, γ 为固体的格留林艾常数.

由上式可知, 方程左边的第一项为热质动量随时间的变化率, 其表征的是热流矢和温度对时间的惯性效应; 左边第二项为热质动量随空间的变化率, 其表征热流矢和温度对空间的惯性效应. 由于导热过程的本质为热量的传递过程, 可见上式即为基于热质概念的用于描述具有微尺度传热特征的普适导热定律.

2.2 广义热弹性动力学模型

根据 Clausius 不等式^[15] 可得

$$\varphi = -\partial\psi\partial T, \quad (8)$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial\psi}{\partial\gamma_{ij}}, \quad (9)$$

式中 φ 为熵密度, ψ 为自由能密度, 两者可视为应变张量 γ_{ij} 和温度 T 的状态函数, 即 $\varphi = \varphi(\gamma_{ij}, T)$, $\psi = \psi(\gamma_{ij}, T)$, σ_{ij} 为应力张量. 其中熵密度 φ 的变化率可表示为:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{ij}} \dot{\gamma}_{ij} + \frac{\partial\varphi}{\partial T} \dot{T}, \quad (10)$$

将 (8) 式代入熵密度变化率的表达式 (10) 中进行整理可得

$$\rho\dot{\varphi} = - \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma_{ij}\partial T} \dot{\gamma}_{ij} + \frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} \dot{T} \right], \quad (11)$$

式中 $\Psi = \rho\psi$ 为自由能, 其可展开成关于应变张量 γ_{ij} 和温度变化 $\theta = T - T_0$ 的幂级数^[15,16]:

$$\Psi(\gamma_{ij}, \theta) = \Psi_0 + A_1^{ij} \gamma_{ij} + A_2^{ijmn} \gamma_{ij} \gamma_{mn} + B_1 \theta + B_2 \theta^2 + C_2^{ij} \gamma_{ij} \theta, \quad (12)$$

式中 $A_s^{ij\dots}$, B_s 为各向异性材料的系数, 上标“ $ij\dots$ ”表示各向异性, 下标“ s ”表示该项的阶数; Ψ_0 为自然状态下的自由能初始值.

将 (12) 式代入 (11) 式中进行整理可得:

$$\rho\dot{\varphi} = \beta_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \frac{1}{T} \rho c_v \dot{T}, \quad (13)$$

式中 $\beta_{ij} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma_{ij} \partial T} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \gamma_{ij}}$, 为热力系数.

根据热力学第二定律, 熵密度变化率可满足如下的关系^[15]:

$$\rho\dot{\varphi} = \rho \frac{r}{T} - \frac{q_{i,i}}{T}, \quad (14)$$

式中 r 为内热源.

联立方程 (13) 和 (14) 式, 从中消去熵密度变化率 $\dot{\varphi}$ 可得:

$$-q_{i,i} = \rho c_v \dot{T} + T \beta_{ij} \dot{\gamma}_{ij} - \rho r. \quad (15)$$

将普适导热定律 (7) 式代入 (15) 式中进行适当的简化处理, 可得到用于超常传热问题中描述各向异性材料热量传递过程的控制方程:

$$\begin{aligned} & (k_{ij} - \tau u_h^{i2} \rho c_v) T_{,ij} \\ & = \rho c_v (\tau \ddot{T} + \dot{T} + 2\tau u_h^i \dot{T}_{,i}) \\ & + T_0 \beta_{ij} (\tau \ddot{\gamma}_{ij} + \dot{\gamma}_{ij} + \tau u_h^i \dot{\gamma}_{ij,i}) \\ & - \rho (\tau \dot{r} + r). \end{aligned} \quad (16)$$

将自由能展开式 (12) 代入 (9) 式中进行整理, 可得各向异性材料的本构方程为

$$\sigma_{ij} = E_{ijmn} \gamma_{mn} - \beta_{ij} \theta, \quad (17)$$

式中 E_{ijmn} 为各向异性材料的弹性模量.

各向异性材料的运动方程^[15]为

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + \rho f_i, \quad (18)$$

式中 u_i 为位移分量, f_i 为体积力分量.

将本构方程 (17) 代入上式中, 结合应力 - 应变关系进行整理, 可得到各向异性材料热弹性运动控制方程

$$\rho \ddot{u}_i = E_{ijmn} u_{m,nj} + \rho f_i - \beta_{ij} \theta_{,j}. \quad (19)$$

方程 (16), (17) 和 (19) 就构成了基于热质概念的用于描述各向异性材料超常传热行为的广义热弹性动力学模型.

对于各向同性材料, 导热系数、热力系数及弹性模量可表示成如下的形式:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= k \delta_{ij}, \quad \beta_{ij} = \beta \delta_{ij}, \\ E_{ijmn} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}), \end{aligned} \quad (20)$$

式中, k 和 β 分别为各向同性材料的导热系数和热力系数, λ 和 μ 为 Lamé 常数, δ_{ij} 为 Kronecker δ 符号.

将上式分别代入方程 (16), (17) 和 (19) 中进行整理, 则可得到各向同性材料广义热弹性动力学控制方程为

$$\begin{aligned} & (k - \tau u_h^{i2} \rho c_v) T_{,ii} \\ & = \rho c_v (\tau \ddot{T} + \dot{T} + 2\tau u_h^i \dot{T}_{,i}) \\ & + T_0 \beta (\tau \ddot{\gamma}_{ii} + \dot{\gamma}_{ii} + \tau u_h^i \dot{\gamma}_{ii,i}) \\ & - \rho (\tau \dot{r} + r), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \gamma_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij} - \beta \theta \delta_{ij}, \quad (22)$$

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho f_i - \beta \theta_{,i}. \quad (23)$$

3 模型的分析与讨论

为了便于对比, 这里将各向同性材料的经典的热弹性模型以及当前应用较为广泛的广义热弹性模型采用统一的形式给出:

$$\begin{aligned} & \eta_1 k T_{,ii} + \eta_2 \kappa^* T_{,ii} \\ & = \rho c_v [\eta_1 \dot{T} + (\tau_0 + \tau_1 + \eta_2) \ddot{T}] \\ & + T_0 \beta [\eta_1 \dot{\gamma}_{ii} + (\tau_0 + \eta_2) \ddot{\gamma}_{ii}] \\ & - \rho [\eta_1 r + (\tau_0 + \eta_2) \dot{r}], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \gamma_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij} - \beta (\theta + \tau_2 \dot{T}) \delta_{ij}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i &= (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho f_i \\ &- \beta (\theta_{,i} + \tau_1 \dot{T}_{,i}), \end{aligned} \quad (26)$$

式中 η_1 和 η_2 为归一化参数, τ_0 和 τ_1, τ_2 分别为 L-S 理论和 G-L 理论中的热延迟时间, κ^* 为 G-N 模型中的物性常数. 其中, 当 $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0, \tau_1 = \tau_2 = 0$ 时, 模型退化为 L-S 模型; 当 $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0, \tau_0 = 0$ 时, 模型退化为 G-L 模型; 当 $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1, \tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0$ 时, 模型退化为 G-N 模型;

当 $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0, \tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0$ 时, 模型退化为经典的热弹性模型.

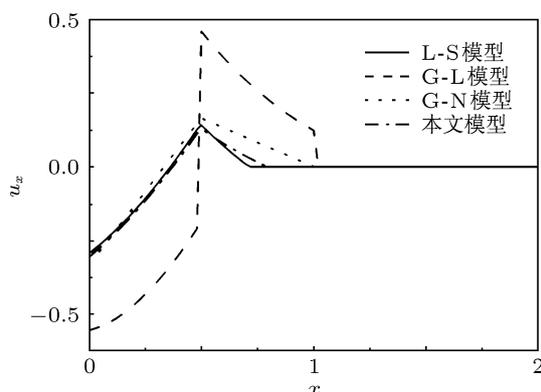


图1 无量纲位移分布 (无量纲时间 $t = 0.5$)

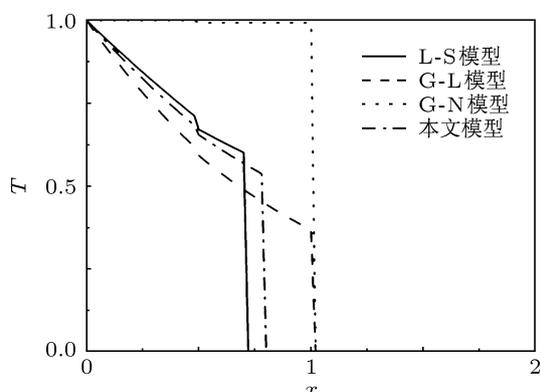


图2 无量纲温度分布 (无量纲时间 $t = 0.5$)

将 (21) 式和 (24) 式进行对比可知, 基于热质概念的温度控制方程增加了温度变化率随空间的变化项 $\dot{T}_{,i}$ 和应变率随空间的变化项 $\dot{\gamma}_{ii,i}$, 这两项的存在反映了热流矢和温度对空间的惯性效应. 当忽略热流矢和温度对空间的惯性效应时, (21) 式可分别退化为 L-S, G-L 和 G-N 模型中的温度控制方程, 由此可知, L-S, G-L 和 G-N 模型仅考虑了热流矢对时间的惯性效应. 对于时间极短、尺度宏观的超常传热问题, 当温度梯度不算大时, 采用上述三种模型进行热量传递过程的分析是可行的, 得到的相关结果与基于热质概念的广义模型的结果符合度较高. 图 1—3 分别给出了半无限大体外表面受热冲

击问题采用上述不同模型计算得到的位移场、温度场和应力场的分布规律, 具体相关的计算参数可见文献 [17].

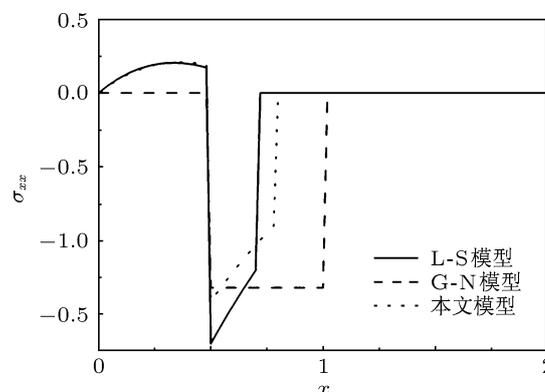


图3 无量纲正应力分布 (无量纲时间 $t = 0.5$)

4 结论

本文基于热质概念的普适导热定律, 依据 Clausius 不等式和 Helmholtz 自由能公式, 构建了描述具有微尺度传热特征的超常传热行为的广义热弹性动力学模型. 通过与已有广义模型对比分析可得:

1) 基于热质概念的广义热弹性动力学模型充分考虑了热流矢和温度对时间和空间的惯性效应, 而已有广义模型仅考虑了热流矢对时间的惯性; 当忽略热流矢和温度对空间的惯性效应时, 基于热质概念的广义模型可分别退化为 L-S, G-L 和 G-N 广义模型;

2) 对于时间极短、尺度宏观的超常传热问题, 当热流密度较小时, 热质动量随空间的变化并不明显, 此时可忽略热流矢和温度对空间的惯性效应, 已有模型与所建模型可得到类似的结果; 对于尺度微观、稳态导热问题时, 当热流密度随着材料结构尺寸显著减小而急剧增大时, 热流密度与温度梯度不再成线性关系, 导热系数将受到热质运动加速效应的影响; 此时, 采用本文所建模型可以得到更加合理的结果.

[1] Herwig H, Beckert K 2000 *Heat and Mass Transfer* **36** 387
 [2] Lord H W, Shulman Y A 1967 *J. Mech. Phys. Solids* **15** 299
 [3] Green A E, Lindsay K A 1972 *J. Elasticity* **2** 1

[4] Green A E, Naghdi P M 1993 *J. Elasticity* **31** 189
 [5] Zhou L P, Tang D W, Wu B X, Qian H S 2006 *Mater. Sci. Eng. A* **428** 284

- [6] Youssef H M 2011 *J. Therm. Stresses* **34** 138
- [7] Chandrasekharaiah D S 1998 *Appl. Mech. Rev.* **51** 705
- [8] Tian X G, Shen Y P 2012 *Advances in Mechanics* **42** 1 (in Chinese) [田晓耕, 沈亚鹏 2012 力学进展 **42** 1]
- [9] Lepri S, Livi R, Politi A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 1896
- [10] Narayan O, Ramaswamy S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 200601
- [11] Guo Z Y, Cao B Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4273 (in Chinese) [过增元, 曹炳阳 2008 物理学报 **57** 4273]
- [12] Hu R F, Cao B Y 2009 *Sci. China E: Tech. Sci.* **39** 680 (in Chinese) [胡锐峰, 曹炳阳 2009 中国科学 E 辑 - 技术科学 **39** 680]
- [13] Guo Z Y, Wu J, Cao B Y 2009 *J. Mech. Eng.* **45** 10 (in Chinese) [过增元, 吴晶, 曹炳阳 2009 机械工程学报 **45** 10]
- [14] Guo Z Y, Cao B Y, Zhu H Y, Zhang Q G 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3306 (in Chinese) [过增元, 曹炳阳, 朱宏晔, 张清光 2007 物理学报 **56** 3306]
- [15] Wang H G 1989 *Introduction of Thermoelasticity* (Beijing: Tsinghua University Press) p39 (in Chinese) [王洪纲 1989 热弹性力学概论 (北京: 清华大学出版社) 第 39 页]
- [16] Dillon O W 1962 *J. Mech. Phys. Solids* **10** 123
- [17] Wang Y Z, Zhang X B, Song X N 2012 *Acta Mechanica* **223** 735

Dynamic model of generalized thermoelasticity based on thermal mass theory*

Wang Ying-Ze[†] Song Xin-Nan

(Department of Energy and Power Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 16 April 2012; revised manuscript received 15 May 2012)

Abstract

A lagging response in time exists between the propagation of heat flux and the establishment of temperature gradient and it is affected by the space effect during the heat conduction with the micro-scale property. Based on the general heat conduction law of thermal mass, the dynamic model of generalized thermoelasticity is established by Clausius inequality and Helmholtz free energy, where the inertia effect on the time and space of heat flux and temperature is involved. The guiding equations are derived and given for the isotropic and homogeneous materials. By comparison with the existing models of generalized thermoelasticity, the guiding equations can reduce to the L-S, G-L and G-N models when the heat flux is not very high, so that the inertia effect on space of heat flux and temperature can be ignored. For micro-scale heat conduction, the heat flux may be very high and the inertial force due to the spatial velocity variation cannot be ignored, the non-Fourier phenomenon will take place even under steady state condition. In such cases, the thermal conductivity is affected by the inertia effect of the space, which can be explained by the model established in the paper. Meanwhile, the physically impossible phenomenon that thermal conductivity changes with structure size induced by existing generalized model can also be eliminated.

Keywords: thermal mass, general heat conduction law, dynamic model of generalized thermoelasticity, micro-scale heat conduction

PACS: 46.25.Cc, 46.25.Hf

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11102073, 50978125), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China (Grant No. BK2008234), and the Research Foundation of Advanced Talents of Jiangsu University, China (Grant No. 10JDG055).

[†] E-mail: wyz3701320@ujs.edu.cn