

混合自旋 XY 系统热纠缠的研究*

王鲁顺 江慧 孔祥木†

(山东省激光偏光与信息技术重点实验室, 曲阜师范大学物理系, 曲阜 273165)

(2012年5月29日收到; 2012年7月8日收到修改稿)

本文研究了两格点、三格点以及四格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统的热纠缠, 通过数值计算, 探讨了纠缠随温度和外磁场的变化关系. 发现在外磁场不存在或比较弱的情况下, 纠缠随着温度的升高单调减小. 对于两格点和四格点系统, 不论是铁磁还是反铁磁情况, 纠缠都在同一临界温度下消失, 并且这一临界值不受外磁场变化的影响. 对于三格点系统, 临界温度也不受外磁场的影响, 但是铁磁情况下系统的临界温度高于反铁磁情况. 在温度极低的环境中, 纠缠在一定的磁场范围内形成稳定的平台, 但是当磁场强度超过某一临界值时, 纠缠完全消失. 本文还对混合自旋和单一自旋系统的热纠缠进行了对比分析, 发现在混合自旋系统中存在多层次的能级交错现象.

关键词: XY 模型, 量子纠缠, 外磁场

PACS: 03.65.-w, 75.10.Jm

1 引言

量子纠缠是量子力学中的重要概念, 是两个或多个量子系统之间非局域的关联. 早在 1935 年, Einstein, Podolsky 和 Rosen 就提出了纠缠态 (后被称之为 EPR 态) 的概念 [1], 但由于实验条件等因素的限制, 对于纠缠的研究很长时间只停留在哲学层面, 直到 1964 年 Bell 不等式的提出 [2], 才为实验验证纠缠的非定域性奠定了基础. 1982 年, Aspect 通过实验对 Bell 不等式进行了检验 [3], 实验结果违背 Bell 不等式, 从而证实了纠缠非定域性的存在. 近年来, 随着相关实验技术的发展, 以及量子纠缠在量子通信、量子密钥和量子计算等方面的潜在应用, 量子纠缠再次引起了人们的关注 [4-6]. 而作为纠缠实现的主要媒介——自旋系统, 由于其丰富的纠缠特性, 更是在理论上得到了广泛的研究, 其中探讨较多的有 Heisenberg 自旋系统 [7-13] 和 XY 自旋系统 [14-18]. 发现对于 XY 铁磁和反铁磁自旋系统, 纠缠都可以存在.

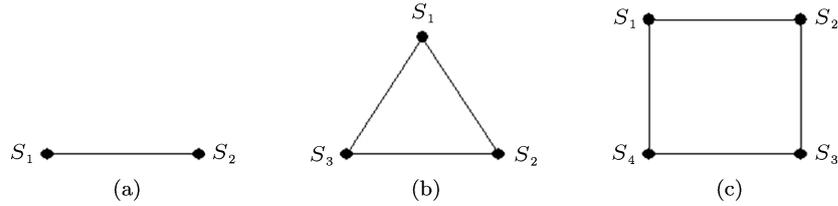
以往对于纠缠的研究大部分集中在自旋为 $1/2$ 的系统, 而对混合自旋系统的纠缠研究较少. 一个实际的量子自旋系统, 可能在一定程度上混合其他自旋构型, 而且处于外界环境中的自旋系统, 相应的热纠缠容易受到温度、磁场或系统各向异性等因素的影响, 从而在一定程度上破坏量子信息传输的保真度. 但是对于混合自旋系统, 处于热平衡态时的纠缠有较强的稳定性, 在一定的情况下, 能够较好的抵抗温度或者磁场的变化. 因此, 研究混合自旋系统的热纠缠性质对于量子通信等方面具有重要的实际意义. 本文利用 Negativity 这一纠缠度量方法研究混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统的热纠缠, 探讨纠缠随温度和磁场的变化规律.

2 两格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统的纠缠

在本文中我们研究两格点、三格点以及四格点的混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统的纠缠性质. 三种情况下系统的结构如图 1 所示.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10775088) 和山东省自然科学基金 (批准号: ZR2011AM018) 资助的课题.

† E-mail: kongxm@mail.qfnu.edu.cn


 图1 两格点、三格点和四格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统 s_i 和 S_i 分别为格点 i 上取值为 $1/2$ 和 1 的自旋

首先研究图 1(a) 所示两格点系统的纠缠. 在外场作用下, 该系统的哈密顿量为

$$H_2 = -J(s_1^x S_2^x + s_1^y S_2^y) - B(s_1^z + S_2^z), \quad (1)$$

其中 s_1^α 和 S_2^α , ($\alpha = x, y, z$) 分别代表自旋为 $1/2$ 和 1 的算符在 x, y, z 方向上的分量. J 是最近邻格点间的耦合常数, $J > 0$ 和 $J < 0$ 分别对应铁磁 (FM) 和反铁磁 (AFM) 的情况. B 代表外磁场. 当该系统处于热平衡态时, 可以用密度矩阵 $\rho(T) = \exp(-\beta H)/Z$ 来描述. 其中 $\beta = 1/k_B T$, k_B 是玻尔兹曼常数, T 是温度, $Z = \text{Tr} \exp[-\beta H]$ 为系统的配分函数. 由此可以得到该系统的配分函数和密度矩阵

$$Z_2 = 4 \cosh\left(\frac{\sqrt{2}K}{2}\right) \cosh\left(\frac{KB_0}{2}\right) + 2 \cosh\left(\frac{3KB_0}{2}\right), \quad (2)$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= \exp(-3B_0/2)/Z_2, \\ a_2 &= a_4 = \exp(B_0/2) \cosh(\sqrt{2}K/2)/Z_2, \\ a_3 &= a_5 = \exp(-B_0/2) \cosh(\sqrt{2}K/2)/Z_2, \\ a_6 &= \exp(3B_0/2)/Z_2, \\ b_1 &= \exp(B_0/2) \sinh(\sqrt{2}K/2)/Z_2, \\ b_2 &= \exp(-B_0/2) \sinh(\sqrt{2}K/2)/Z_2, \end{aligned}$$

$K = \beta J = J/k_B T$, $B_0 = B/J$ 是约化磁场.

利用部分转置方法定义 Negativity^[19,20]

$$N(\rho) = |u_i|, \quad (4)$$

这里 u_i 是转置密度矩阵 ρ^{T_1} 的负本征值 T_1 是指对系统第一部分的转置. 根据上述 Negativity 的定义, 就可以得出系统两自旋间的纠缠

$$\begin{aligned} N_{12} &= \frac{1}{2} \max \left[0, \sqrt{(a_1 - a_5)^2 + 4b_1^2} - (a_1 + a_5) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \max \left[0, \sqrt{(a_2 - a_6)^2 + 4b_2^2} \right. \\ &\quad \left. - (a_2 + a_6) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

通过对 (5) 式的分析, 我们发现 N_{12} 是磁场 B 和耦合参量 J 的偶函数, 在 $B \rightarrow -B$ 或者 $J \rightarrow -J$ 的变换下, N_{12} 的值不发生改变. 图 2(a) 给出了不同外磁场情况下, N_{12} 随温度变化的数值结果. 从图中可以看出, 当外磁场不存在或者磁场较小时, 纠缠随温度的升高单调减小, 当温度超过某一个临界值时, 纠缠完全消失. 当约化磁场 $B_0 = 0.75$ 时, 纠缠先随温度的升高增加到一个极大值, 然后逐渐减小到零. 在不同的外磁场情况下, 虽然纠缠的变化不同, 但是临界温度却相同, 这一现象说明两格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统的临界温度不受外磁场的影响.

为了探讨纠缠随外磁场的变化规律, 我们对系统的本征值和本征矢进行了计算. 将系统哈密顿量 H_2 表示成矩阵形式并作对角化处理, 可以得到

$$E_1 = -\frac{3}{2}B, \quad \psi_1 = \left| \frac{1}{2}, 1 \right\rangle, \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{3}{2}B, \quad \psi_2 = \left| -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle, \quad (7)$$

$$E_3 = -\frac{1}{2}(B + \sqrt{2}J),$$

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, 0 \right\rangle + \left| -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle \right), \quad (8)$$

$$E_4 = \frac{1}{2}(B - \sqrt{2}J),$$

$$\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, -1 \right\rangle + \left| -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle \right), \quad (9)$$

$$E_5 = \frac{1}{2}(-B + \sqrt{2}J),$$

$$\psi_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\left| \frac{1}{2}, 0 \right\rangle + \left| -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle \right), \quad (10)$$

$$E_6 = \frac{1}{2}(B + \sqrt{2}J),$$

$$\psi_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\left| \frac{1}{2}, -1 \right\rangle + \left| -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle \right). \quad (11)$$

通过比较 H_2 的本征值 (6)—(11) 式可以发现, 在铁磁情况下, 当 $B = 0$ 时, 系统能量 $E_3 = E_4 = -\sqrt{2}J/2$ 是最小值, 此时基态 ψ_3 和 ψ_4 是二重简并

的. 当 $B \neq 0$ 时, 简并被破坏, $E_3 = -(B + \sqrt{2}J)/2$ 为最小值, ψ_3 是基态. 随着磁场的进一步增大, 当 $B > \sqrt{2}J/2$ 时, E_1 是最小值, ψ_1 为基态. 由于在 $0 < B < \sqrt{2}J/2$ 的区域内, 基态一直是 ψ_3 , 因此在这一区域内 N_{12} 的值不变. 在 $B = \sqrt{2}J/2$ 处, N_{12} 出现了从非零值到零的跃变, 我们称这一磁场为临界磁场. 当 $B > \sqrt{2}J/2$ 时, 由于基态 ψ_1 是一个非纠缠态, 所以系统的纠缠为零. 对于反铁磁情况, 纠缠的变化与铁磁情况类似, 而且临界磁场也相同. 图 2 (b) 给出了不同温度下 N_{12} 随磁场的变化, 能够看出在 $k_B T/J = 0.01$ 的情况下, 纠缠随磁场的变化与我们的分析是非常符合的.

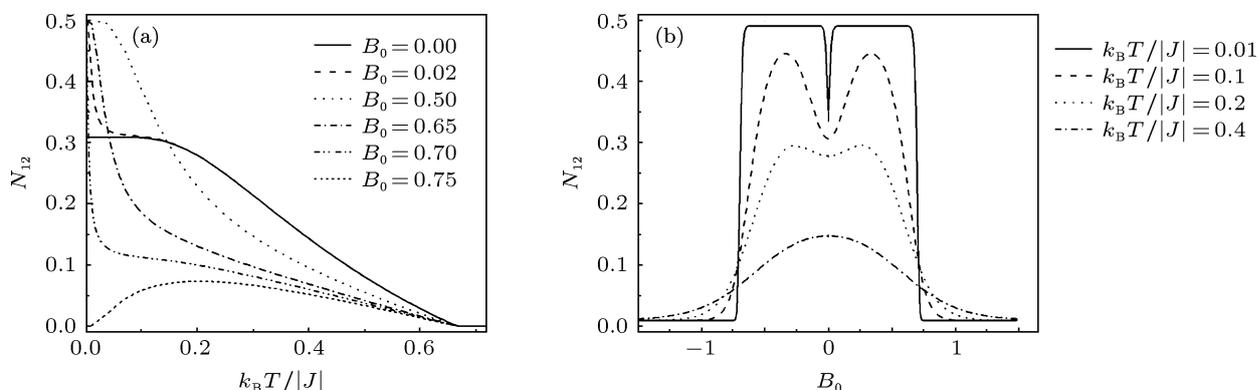


图 2 两格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统的纠缠 (a) 在约化磁场 B_0 取不同数值时对应的纠缠随温度的变化, 铁磁和反铁磁情况下的结果相同; (b) 在约化温度 $k_B T/|J|$ 取不同数值时对应的纠缠随磁场的变化

3 三格点和四格点情况

采用与上节类似的方法, 我们继续研究图 1(b) 所示三格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统的纠缠. 在外场作用下, 系统的哈密顿量为

$$H_3 = -J(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{s}_1) - B(s_1^z + S_2^z + s_3^z). \quad (12)$$

其中 s_1^α , S_2^α 和 s_3^α , ($\alpha = x, y, z$) 分别代表自旋为 $1/2$ 1 和 $1/2$ 的算符在 x, y, z 方向上的分量. 在该系统中存在着两种形式的纠缠, 即自旋为 $1/2$ 和 1 的格点间纠缠 N_{1-2} 以及两个自旋都为 $1/2$ 的格点间纠缠 N_{1-3} 消约掉格点 3, 可得到约化密度矩阵 ρ_{1-2} , 它与 (3) 式在形式上相同. 根据 Negativity 的定义, 就能够求出 N_{1-2} .

通过数值求解, 可以得到不同外磁场情况下 N_{1-2} 随温度的变化关系 (图 3(a)). 我们发现 N_{1-2} 在铁磁和反铁磁情况下都存在, 并且随

着温度的升高单调减小, 但是在铁磁情况下相应的临界温度高于反铁磁情况.

为了得到两个自旋都为 $1/2$ 的格点间纠缠 N_{1-3} , 需要消约掉格点 2, 即 $\rho_{1-3} = \text{Tr}_{S_2} \rho_3$, 它的矩阵形式可表示为

$$\rho_{1-3} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & D_1 & 0 \\ 0 & D_1 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中 A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 和 D_1 都是 K 和 B_0 的函数. 由此可以求得

$$N_{1-3} = \max \left[0, \frac{1}{2} \left(\sqrt{(A_1 - A_4)^2 + 4D_1^2} - (A_1 + A_4) \right) \right]. \quad (14)$$

通过对 (14) 式进行数值求解, 发现在铁磁情况下, 自旋都为 $1/2$ 的两格点间存在纠缠但是数值较

小(图 3(b)). 而对于反铁磁情况, 在任意温度下, 不管是否存在磁场, N_{1-3} 都几乎为零. 这是因为三个

格点组成一个三角形, 在反铁磁情况下会有一些的阻挫发生, 从而导致 N_{1-3} 趋近于零.

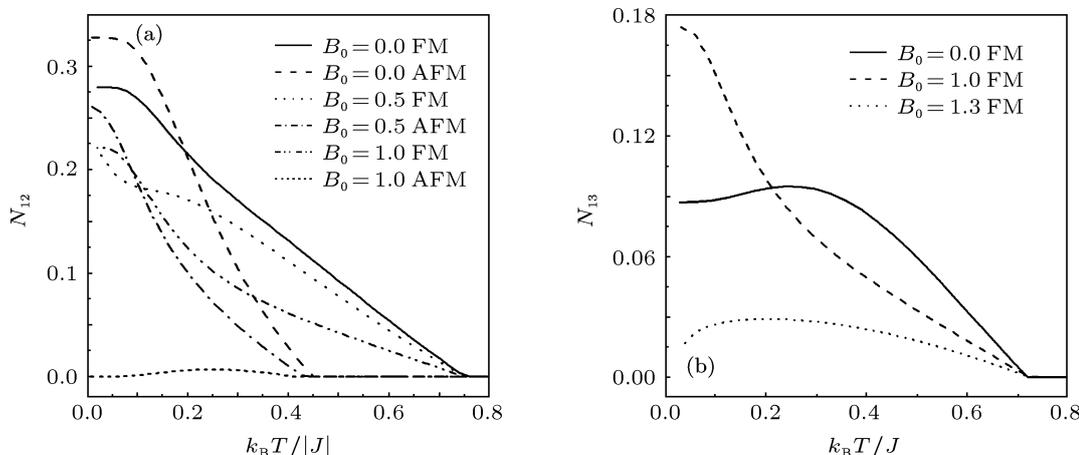


图 3 三格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统的热纠缠 (FM 表示铁磁情况 AFM 表示反铁磁情况) (a) 自旋为 $1/2$ 和自旋为 1 的两格点间纠缠 N_{1-2} 在约化磁场 B_0 取不同数值时随温度的变化; (b) 自旋都为 $1/2$ 的两格点间纠缠 N_{1-3} 在约化磁场 B_0 取不同数值时随温度的变化

外磁场对该系统的纠缠也有一定的影响. 图 4 给出了当约化温度 $k_B T/|J| = 0.001$ 时 N_{1-2} 和 N_{1-3} 在铁磁和反铁磁这两种情况下随外磁场的变化. 从图中可以看出, 在铁磁情况下, 随着磁场的增大, 纠缠在 $B_0 = (\sqrt{33} - \sqrt{17})/4$ 和 $B_0 = (\sqrt{17} + 1)/4$ 处发生突变, 并在 $0 < B_0 < (\sqrt{33} - \sqrt{17})/4$ 和 $(\sqrt{33} - \sqrt{17})/4 < B_0 < (\sqrt{17} + 1)/4$ 这两个区域形成稳定的平台. 而对于反铁磁情况, 纠缠则在 $0 < B_0 < (\sqrt{33} - \sqrt{17})/4$ 和 $(\sqrt{33} - \sqrt{17})/4 < B_0 < (\sqrt{17} - 1)/4$ 这两个区域形成平台. 我们还注意到, 无论是在铁磁还是在反铁磁情况下, N_{1-2} 和 N_{1-3} 都具有相同的临界磁场, 并且存在着一定的反相关, 即 N_{1-2} 减小时 N_{1-3} 随之增大.

我们继续对图 1(c) 所示四格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统的纠缠进行研究. 在外场作用下, 此系统的哈密顿量为

$$H_4 = -J(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{s}_1) - B(s_1^z + S_2^z + s_3^z + S_4^z). \quad (15)$$

其中 $s_1^\alpha, S_2^\alpha, s_3^\alpha, S_4^\alpha$, ($\alpha = x, y, z$) 分别代表自旋为 $1/2, 1, 1/2$ 和 1 的算符在 x, y, z 方向上的分量. 此系统存在着三种形式的纠缠即自旋为 $1/2$ 和 1 的格点间纠缠 $N_{1\leftrightarrow 2}$, 两个自旋都为 $1/2$ 的格点间纠缠 $N_{1\leftrightarrow 3}$ 以及两个自旋都为 1 的格点间纠

缠 $N_{2\leftrightarrow 4}$.

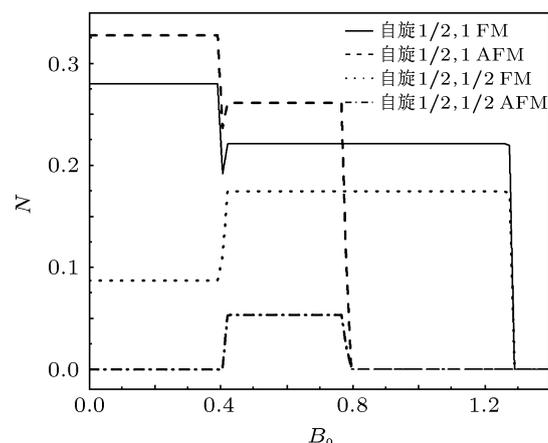


图 4 $k_B T/|J| = 0.001$ 时, 三格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统自旋间的纠缠 N_{1-2} 和 N_{1-3} 随磁场的变化

消约掉系统中格点 3 和格点 4, 可得到密度矩阵 $\rho_{1\leftrightarrow 2}$, 即 $\rho_{1\leftrightarrow 2} = \text{Tr}_{s_3 S_4} \rho_4$, 它和 (3) 式的形式相同. 消约掉系统中格点 2 和格点 4, 可得到密度矩阵 $\rho_{1\leftrightarrow 3}$, 即 $\rho_{1\leftrightarrow 3} = \text{Tr}_{S_2 S_4} \rho_4$, 它与 (13) 式的形式相同. 消约掉系统中格点 1 和格点 3, 可得到密度矩阵 $\rho_{2\leftrightarrow 4}$, 即 $\rho_{2\leftrightarrow 4} = \text{Tr}_{s_1 s_3} \rho_4$, 进行部分转置后得到 $\rho_{2\leftrightarrow 4}^T$, 然后再根据 Negativity 定义就能够求出 $N_{2\leftrightarrow 4}$. 通过数值求解, 我们发现四格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统的纠缠随温度的变化性质与两格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统类似. 图 5 给出了 $k_B T/|J| = 0.001$ 时, 该系统各自旋间的

纠缠随磁场的变化. 从图中可以看出纠缠在 $0 < B_0 < (\sqrt{6} - \sqrt{5})$, $(\sqrt{6} - \sqrt{5}) < B_0 < (\sqrt{5} - \sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{5} - \sqrt{2}) < B_0 < \sqrt{2}$ 这三个区域形成稳定的平台, 并且三种不同形式的纠缠具有相同的临界磁场. 与前面计算的三格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统相应的结果作比较, 发现随着系统格点数目的增加, 自旋间的纠缠是减小的.

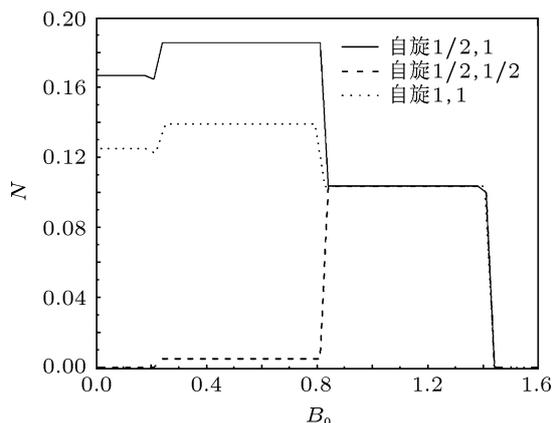


图5 $k_B T / |J| = 0.001$ 时, 四格点混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统的纠缠随磁场的变化

4 结论

我们研究了混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统在外场作用下的热纠缠, 发现在磁场不存在或者比较弱的情况下, 随着温度的升高, 纠缠单调减小, 当超过某一临界温度时, 纠缠完全消失. 对于两格点和四格点的混合自旋 $(1/2, 1)$ XY 系统, 临界温度在铁磁和反铁磁情况下是相等的, 并且这一临界温度不受外磁场的影响. 而对于三格点的情况, 由于对称性质的不同, 纠缠的变化以及相应的临界温度在铁磁和反铁磁情况下不再相等. 在零温情况下, 系统的基态纠缠在一定磁场范围内形成稳定的平台, 但是当磁场强度大于某一临界值时, 纠缠出现从非零值到零的跃变. 在同样的条件下, 混合自旋耦合系统的热纠缠受温度的影响较小, 纠缠消失时的临界温度高于单一自旋系统, 并且临界温度近似的与混合自旋成比例; 尤其是多体混合自旋系统, 在外磁场作用下存在能级交错, 从而导致多层次的“纠缠平台”现象, 这为通过调节磁场来控制纠缠的大小提供了一定的理论依据.

- [1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [2] Bell J S 1964 *Physics* **1** 195
- [3] Aspect A, Dalibard J, Roger G 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 1804
- [4] Bose I, Chattopadhyay E 2002 *Phys. Rev. A* **66** 062320
- [5] Osborne T J, Nielsen M A 2002 *Phys. Rev. A* **66** 032110
- [6] Vidal G, Latorre J I, Rico E, Kitaev A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 227902
- [7] Arnesen M C, Bose S, Vedral V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 017901
- [8] Zhou L, Song H S, Guo Y Q, Li C 2003 *Phys. Rev. A* **68** 024301
- [9] Abliz A, Gao H J, Xie X C, Wu Y S, Liu W M 2006 *Phys. Rev. A* **74** 052105
- [10] Wang X G 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012313
- [11] Wang X G 2002 *Phys. Rev. A* **66** 034302
- [12] Kamta G L, Starace A F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 107901
- [13] Sun Y, Chen Y G, Chen H 2003 *Phys. Rev. A* **68** 044301
- [14] Its A R, Jin B Q, Korepin V E 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 2975
- [15] Zhang L F, Tong P Q 200 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 7377
- [16] Liu S X, Li S S, Kong X M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030303 (in Chinese) [刘圣鑫, 李莎莎, 孔祥木 2011 物理学报 **60** 030303]
- [17] Du X M, Man Z X, Xia Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7462 (in Chinese) [杜秀梅, 满忠晓, 夏云杰 2008 物理学报 **57** 7462]
- [18] Shan C J, Chen W W, Liu T K, Huang Y X, Li H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2687 (in Chinese) [单传家, 程维文, 刘堂昆, 黄燕霞, 李宏 2008 物理学报 **57** 2687]
- [19] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413
- [20] Vidal G 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032314

Thermal entanglement of mixed spin XY systems*

Wang Lu-Shun Jiang Hui Kong Xiang-Mu[†]

(Shandong Provincial Key Laboratory of Laser Polarization and Information Technology, Department of Physics, Qufu Normal University,
Qufu 273165, China)

(Received 29 May 2012; revised manuscript received 8 July 2012)

Abstract

In this article, we investigate thermal entanglements of the two-site, three-site and four-site mixed spin $(1/2, 1)$ XY systems. The entanglement versus temperature and external magnetic field is discussed. It is found that the entanglements decrease monotonically as temperature increases in the presence and absence of a weak external magnetic field. For the two-site and four-site XY systems, thermal entanglements disappear at the same temperature which is called critical temperature no matter in the ferromagnetic case or antiferromagnetic. It also shows that the critical temperature is independent of external magnetic field. For the three-site system, the corresponding critical temperature is also irrelevant to external magnetic field, while the critical temperature for the ferromagnetic case is higher than that for the antiferromagnetic case. The entanglement of XY systems can develop a few stable platform in an environment of low temperature, but the entanglement vanishes when external magnetic field exceeds some critical value. In this article, we also analyze the difference in thermal entanglement between mixed-spin system and single-spin system, and find that there exists multi-level level crossing in the mixed-spin system.

Keywords: XY model, quantum entanglement, external magnetic field

PACS: 03.65.-w, 75.10.Jm

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10775088), and the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. ZR2011AM018).

[†] E-mail: kongxm@mail.qfnu.edu.cn