

# 关于多比特电路量子动力学系统中光子自由度的消除方案研究\*

孟建宇<sup>†</sup> 王培月 冯伟 杨国建 李新奇

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2012年4月17日收到; 2012年7月8日收到修改稿)

基于超导传输线和超导量子比特相互耦合的电路量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED) 系统, 是研究固态量子信息和量子测量与控制的理想实验平台. 本文在已有工作 (单比特电路 QED) 基础上, 进一步研究多比特电路 QED 系统. 具体通过对两比特系统的量子测量和量子控制动力学的模拟, 检验了“绝热消除”和“极化子变换”两种消除微腔光子自由度方法的适用条件. 和单比特情况不同, 我们特别检验了两比特系统 Bell 纠缠态的“确定性”制备问题. 在量子路径水平上模拟发现, 由于反馈操作引起量子比特状态翻转, 使得极化子变换方法失效, 它所导出的“有效测量算符” (其中含有非平庸的“宇称项”) 此时也将变得没有意义.

**关键词:** 电路 QED, 绝热消除, 极化子变换, 量子反馈控制

**PACS:** 03.67.Bg, 32.80.Qk, 42.50.Lc, 42.50.Pq

## 1 引言

电路量子电动力学 (circuit quantum electrodynamics, QED) 系统<sup>[1,2]</sup>, 如图 1 所示, 可以看成是基于原子的光学微腔 QED 系统的固态对应物<sup>[3]</sup>. 其中, 基于超导 Josephson 结的量子比特 (qubit) 对应人工原子, 与之耦合的 (一维) 超导传输线对应光学微腔. 这个固态系统, 由于具备良好的量子相干性和器件可集成性, 近年来引起了人们的高度关注, 例如, 观察到了微波光子的“类-粒子”特性<sup>[4]</sup>; 实现了单光子态<sup>[5]</sup>和 Fock 态<sup>[6]</sup>的产生; 观察到了 Berry 相<sup>[7]</sup>; 实现了人工单原子激光<sup>[8]</sup>; 研究了量子测量和退相干之间的基本量子极限问题<sup>[9,10]</sup>; 实现了微波光子诱导的双量子比特之间的有效耦合和基本量子逻辑门操作<sup>[11]</sup>等等.

另一方面, 该复合系统特别适合量子测量和量子控制方面的研究<sup>[12-14]</sup>. 为了实现有效的量子测量, 这个系统需要较强的微波驱动, 从而在整个测

量过程中, 微腔中存在较大数目的光子数, 这将引起状态空间维数过大带来的数值模拟方面的困难. 为了避免这个困难, 人们往往采取“消除”光子自由度的办法, 建立一个只保留量子比特自由度的有效描述方案. 消除光子自由度的办法有两种, 一种是比较传统的“绝热消除”方案<sup>[15]</sup>, 另一种则是新近发展的“极化子变换”消除方法<sup>[16,17]</sup>. 本文将在我们的已有工作 (单比特 QED 系统) 基础上, 通过对两比特量子测量和量子控制动力学做数值模拟, 检验“绝热消除”和“极化子变换”两种消除方案的适用条件. 和单比特情况不同, 我们将特别检验两比特系统 Bell 纠缠态的“确定性”制备问题, 并在量子路径水平上模拟由于反馈操作引起量子比特状态翻转所带来的影响, 包括检验极化子变换方法所导出的“有效测量算符”的适用性问题.

## 2 系统与模型

不失一般性, 我们考虑如图 1 所示的两比特电

\* 国家自然科学基金 (批准号: 101202101, 10874176) 和国家科技部 973 项目 (批准号: 2011CB808502, 2012CB932704) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: mjj198411@mail.bnu.edu.cn

路 QED 系统, 其中的超导量子比特 (qubit) 为人工两能级原子, 超导传输线构成谐振腔和提供量子测量. 该系统可用如下的 Jaynes-Cummings (JC) 模型描述 [18,19]:

$$H = \omega_r a^\dagger a + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \omega_{qj} \sigma_j^z + \sum_{j=1}^2 g_j (\sigma_j^- a^\dagger + \sigma_j^+ a) + \varepsilon (a + a^\dagger), \quad (1)$$

以上哈密顿量中的  $a^\dagger(a)$  是交流电压量子化后的量子(光子)产生(湮没)算符,  $\omega_r$  和  $\omega_{qj}$  分别是微波腔光子频率和第  $j$  个 qubit 的跃迁频率. 方程 (1) 中的第一项和第二项分别为谐振腔和 qubit 的哈密顿量. 其中第三项描述光子与 qubit 之间的相互作用 (JC 模型),  $g_j$  为第  $j$  个 qubit 与微腔的相互作用强度,  $\sigma_j^+$  ( $\sigma_j^-$ ) 是 qubit 的状态升(降)算符. 最后一项描述微波驱动, 其中  $\varepsilon = \varepsilon_m e^{-i\omega_m t} + \varepsilon_m^* e^{i\omega_m t}$ ,  $\varepsilon_m$  为驱动强度,  $\omega_m$  是驱动微波的频率 (它通常与谐振腔频率相近).

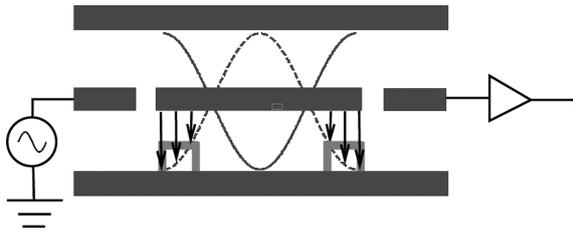


图 1 含有两个超导量子比特 (人工原子) 电路 QED 系统示意图, 其中的微腔是一个受微波驱动的超导传输线谐振腔

在所谓色散区, 即  $|\Delta_j| = |\omega_{qj} - \omega_r| \gg |g_j|$ , 可以对 JC 哈密顿量做正则变换:  $H_{\text{eff}} = U^\dagger H U$ , 其中  $U = \exp \left[ \sum_{j=1}^2 \lambda_j (a^\dagger \sigma_j^- - a \sigma_j^+) \right]$ , 式中  $\lambda_j = g_j / \Delta_j$  为小量. 忽略  $g_j$  的二阶以上小量, 并变换到以  $\omega_m$  频率旋转的相互作用表象, 系统的有效哈密顿量为 [1]

$$H_{\text{eff}} = \Delta_r a^\dagger a + \sum_{j=1}^2 \chi_j a^\dagger a \sigma_j^z + (\varepsilon_m a^\dagger + \varepsilon_m^* a) + H_q, \quad (2)$$

其中  $H_q = \sum_{j=1}^2 \frac{\tilde{\omega}_j}{2} \sigma_j^z + J_{21} (\sigma_2^- \sigma_1^+ + \sigma_2^+ \sigma_1^-)$ . 这里, 我们还引进了记号  $\Delta_r = \omega_r - \omega_m$ ,  $\tilde{\omega}_j = \omega_{qj} + \chi_j$ , 以及  $\chi_j = g_j^2 / \Delta_j$ . 可以看出, 方程 (1) 中的相互作用项  $g_j (\sigma_j^- a^\dagger + \sigma_j^+ a)$  在变换后变为  $\chi_j a^\dagger a \sigma_j^z$ . 这表明在色散区, qubit 与谐振腔光场的相互作用会导致

光场产生依赖于 qubit 状态的频率移动. 这个频率移动, 会引起透射微波的强度变化或位相移动, 据此则可判断 qubit 的状态. 这也正是该电路 QED 系统的色散测量原理.

在量子测量过程中, 微腔光子的随机泄漏将引起测量过程对量子比特的反作用 (backaction), 即测量过程不可避免的退相干效应. 再考虑到 qubit 本身受其它环境的影响, 整个系统的状态演化可由下面的量子主方程描述:

$$\dot{\rho} = -i[H_{\text{eff}}, \rho] + \kappa \mathcal{D}[a] \rho + \sum_{j=1}^2 \gamma_{1,j} \mathcal{D}[\sigma_j^-] \rho + \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_{\phi j}}{2} \mathcal{D}[\sigma_j^z] \rho, \quad (3)$$

其中的 Lindblad 超算符定义为  $\mathcal{D}[a]\rho = a \rho a^\dagger - 1/2\{a^\dagger a, \rho\}$ . 上式中的第二项描述光子从谐振腔的随机泄漏,  $\kappa$  为泄漏速率; 第三项和第四项描述 qubit 受其他环境影响的退相干,  $\gamma_{1,j}$  和  $\gamma_{\phi j}$  分别为弛豫 (relaxation) 和退相 (dephasing) 速率.

### 3 光子自由度的消除方案

#### 3.1 绝热消除方法

当光子从谐振腔漏出速率  $\kappa$  较大时, 通常采用以下的“绝热消除”方案. 包括两个主要步骤: 1) 首先对主方程 (3) 做光场位移变换  $\rho^D(t) = D^\dagger[\alpha_0] \rho(t) D[\alpha_0]$ , 其中  $D[\alpha] = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$  为位移算符, 光场位移量  $\alpha_0 = -i\varepsilon_m / (i\Delta_r + \kappa/2)$  为微腔在不含 qubit 情况下, 受驱动后形成的稳态相干态参数 (即稳态为相干态  $|\alpha_0\rangle$ ). 2) 经过上面的位移变换后, 光子数变得很少, 在这种情况下, 可以合理地假设密度矩阵元  $\rho_{mn}(m, n$  为光子数) 将随着  $m, n$  的增加迅速减小. 于是可以将密度矩阵按光子数 Fock 态做如下展开:  $\rho^D \simeq \rho_{00}|0\rangle\langle 0| + \rho_{11}|1\rangle\langle 1| + [(\rho_{10}|1\rangle\langle 0| + \rho_{20}|2\rangle\langle 0|) + \text{H.c.}]$ . 进一步, 对光子自由度求迹, 定义只含 qubit 自由度的约化密度矩阵  $\rho = \rho_{00} + \rho_{11}$ , 可得如下关于  $\rho$  的有效主方程 [17]:

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho + \frac{\Gamma_d}{2} \mathcal{D} \left[ \sum_{j=1}^2 \delta_j \sigma_j^z \right] \rho - iK \left[ \left( \sum_{j=1}^2 \delta_j \sigma_j^z \right)^2, \rho \right], \quad (4)$$

该方程中的刘维超算符定义为  $\mathcal{L}\rho = -i[H_q, \rho] -$

$i\chi|\alpha_0|^2 \sum_j [\delta_j \sigma_j^z, \rho] + \sum_j \gamma_{1j} \mathcal{D}[\sigma_j^-] \rho + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} \mathcal{D}[\sigma_j^z] \rho$ .  
 约化色散位移  $\delta_j = \chi_j/\bar{\chi}$  ( $j = 1, 2$ ), 其中  $\bar{\chi} = (\chi_1 + \chi_2)/2$ .  $\Gamma_d = 2\kappa|\alpha_0|^2\chi^2/(\Delta_r^2 + \kappa^2/4)$  为测量引起的退相干速率;  $K = -2\Delta_r|\alpha|^2\chi^2/(i\Delta_r + \kappa/2)$  为微腔光子诱导的 qubit 之间的有效耦合强度.

在色散测量中, 通常用 homodyne 方案测量微腔中的光子状态 (从而推测 qubit 的状态), 相应的输出电流为 [20]:  $J(t) = \sqrt{\kappa} \langle a e^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi} \rangle_t + \xi(t)$ , 其中  $\phi$  为本地参考光 (Local Oscillator) 与谐振腔中漏出光子的相对位相,  $\langle \dots \rangle_t$  定义为对微腔光子态的平均. 由于这里表达的是单次测量实现 (单条量子路径) 的结果, 所以其中的“微腔光子态”是依赖测量结果的条件量子态 (它们的系踪平均是上面的“非条件量子态”). 式中  $\xi(t)$  是 高斯白噪声, 源于单次测量中量子态的随机塌缩 (collapse), 它的平均值  $E[\xi(t)] = 0$ , 关联函数  $E[\xi(t)\xi(t')] = \delta(t - t')$ . 利用上面的方法, 消除光子自由度, 测量电流可重新表达为 [17]

$$J(t) = -\sqrt{\Gamma_{ci}} \sum_{j=1}^2 \langle \delta_j \sigma_j^z \rangle_t + \xi(t), \quad (5)$$

其中  $\Gamma_{ci} = 4\kappa\chi^2 X^2/(\Delta_r^2 + \kappa^2/4)$ ,  $X = \text{Re}[\alpha_0^* e^{i(\phi-\theta)}]$ ,  $\theta = \arctan(\kappa/2\Delta_r)$ .  $\Gamma_{ci}$  表示量子测量的信息获取速率.

### 3.2 极化子变换消除方法

在上面的绝热消除方案中, 光场位移变换的“位移量”不依赖 qubit 状态. 极化子变换的基本思想是让“位移量”依赖 qubit 状态. 具体方法为, 对主方程 (3) 做位移变换,  $\rho^P = P^\dagger \rho P$ , 其中  $P(t) = \Sigma_x \Pi_x \mathcal{D}[\alpha_x(t)]$ . 这里,  $x \in \{ee, eg, ge, gg\}$ ,  $\Pi_x = |x\rangle\langle x|$ , 位移算符  $\mathcal{D}[\alpha]$  与前面相同, 定义为  $\mathcal{D}(\alpha_x) = \exp(\alpha_x a^\dagger - \alpha_x^* a)$ . 位移量  $\alpha_x$  依赖 qubit 状态, 与 qubit 状态投影算符  $\Pi_x = |x\rangle\langle x|$  相关联. 位移量  $\alpha_x(t)$  满足方程:  $\dot{\alpha}_x = -i(\omega_r + \chi_x)\alpha_x - i\epsilon_m e^{-i\omega_m t} - \kappa\alpha_x/2$ . 其中  $\chi_{ee} = \chi_1 + \chi_2$ ,  $\chi_{eg} = \chi_1 - \chi_2$ ,  $\chi_{ge} = -\chi_1 + \chi_2$ ,  $\chi_{gg} = -\chi_1 - \chi_2$ . 通过以上位移变换并消除光子自由度后, 得到只含 qubit 自由度的有效主方程为 [21]

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i \left[ \sum_{j=1}^2 \frac{\tilde{\omega}_j}{2} \sigma_j^z, \rho \right] + \sum_{j=1}^2 \gamma_{1,j} \mathcal{D}[\sigma_j^-] \rho \\ & + \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_{\phi j}}{2} \mathcal{D}[\sigma_j^z] \rho \end{aligned}$$

$$+ \sum_{xy} (\Gamma_d^{xy} - iA_c^{xy}) \Pi_x \rho \Pi_y. \quad (6)$$

上式中  $\Gamma_d^{xy} = (\chi_x - \chi_y) \text{Im}[\alpha_x \alpha_y^*]$ ,  $A_c^{xy} = (\chi_x - \chi_y) \text{Re}[\alpha_x \alpha_y^*]$ . 前者是测量 backaction 引起的退相干速率, 后者则是 backaction 引起的量子比特能级的移动 (即 ac-Stark 效应).

相应地, 利用以上的极化子变换消除方法, 可以导出如下的 homodyne 电流表达式  $J(t) = \text{Tr}[c_\phi \rho J(t)] + \xi(t)$ , 其中的有效测量算符  $c_\phi$  为 [21]

$$c_\phi = \sqrt{\Gamma_{10}(\phi)} \sigma_1^z + \sqrt{\Gamma_{01}(\phi)} \sigma_2^z + \sqrt{\Gamma_{11}(\phi)} \sigma_1^z \sigma_2^z. \quad (7)$$

在这个结果中,  $\Gamma_{ij}(\phi) = \kappa|\beta_{ij}|^2 \cos^2(\phi - \theta_{ij})$ , 其中  $\beta_{ij}$  和  $\theta_{ij}$  为组合相干态参数  $\beta_{ij}$  的模和幅角;  $\beta_{ij} = (\alpha_{ee} + (-1)^j \alpha_{eg} + (-1)^i \alpha_{ge} + (-1)^{i+j} \alpha_{gg})/2$ . (7) 式是极化子变换导出的一个重要结果, 其中第三项称为“宇称”测量项, 因为通过调节 homodyne 测量中参考光的位相, 可以使前两项为零而只留下最后一项, 从而实现 qubit 联合状态的宇称测量. 但是, 后面的数值模拟将显示, 这个结果只有在 qubit 状态无翻转下才真正成立.

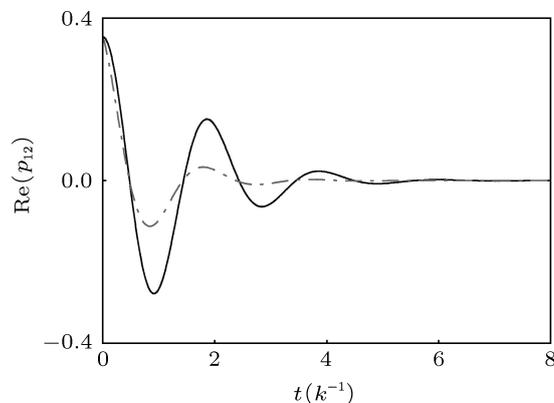


图 2 Qubit (约化) 密度矩阵非对角元的对比图 (初态制备为  $1/\sqrt{2}(|e\rangle + |g\rangle)_1 \otimes 1/\sqrt{2}(|e\rangle + |g\rangle)_2$ . QND 测量将引起以下基态之间的退相干:  $|1\rangle = |ee\rangle$ ,  $|2(3)\rangle = 1/\sqrt{2}(|eg\rangle \pm |ge\rangle)$ ,  $|4\rangle = |gg\rangle$ .  $\rho_{12}$  定义为  $\rho_{12} \equiv \langle 1|\rho|2\rangle$ . 图中实线对应含光子自由度的主方程演化结果, 虚线和点虚线分别表示极化子变换和绝热消除光子自由度后的有效主方程的结果. 无量纲化后 (以下各图也如此), 系统参数取为  $\Delta_r = 0$ ,  $\chi_1 = 0.1$ ,  $\chi_2 = 0.1$ ,  $\epsilon_m = 2.0$ ,  $\kappa = 1.0$

### 4 两比特联合测量动力学模拟

在本文所考虑的测量过程中, qubit 状态无翻转, 这实际上是一种比较简单的量子非破坏 (quantum nondemolition, QND) 测量模式. 下面我们通过

数值模拟计算, 比较绝热消除和极化子变换两种方法与基于方程 (3) 的数值计算结果的差异.

通过对每个量子比特做么正旋转操作, 可以假定制备出两比特系统初态为  $1/\sqrt{2}(|e\rangle + |g\rangle)_1 \otimes 1/\sqrt{2}(|e\rangle + |g\rangle)_2$ . 由于在 QND 测量情况下, qubit 初态中各叠加分量的占据概率不变 (qubit 状态无翻转), 测量只引起有效测量算符的本征态之间的退相干, 所以我们只需分析比较两比特系统的约化密度矩阵的非对角元. 图 2 分别给出了含微腔光子自由度的主方程的数值演化结果, 常规的绝热消除方法结果, 以及基于极化子变换的光子自由度消除方案的结果 (在包含微腔光子自由度的数值模拟计算中, 由于描述微腔光子自由度的基矢数量原则上为无穷, 我们采取“数值自洽收敛”的办法进行截断, 截断保留的基矢数量依赖系统参数, 即驱动强度和微腔泄漏速率). 首先我们看到, 在所用的参数条件下, 绝热消除方法得到的结果与含微腔光子自由度的主方程的数值结果偏离很大. 其根本原因在于, 在通常的绝热消除方案中, 当我们将微腔光场做位移变换时, 没有考虑 qubit 的影响, 即无论 qubit 处于  $|ee\rangle$ ,  $|eg\rangle$  或  $|gg\rangle$  态, 位移变换中的位移量始终是  $\alpha_0 = -\frac{i\epsilon_m}{i\Delta_r + \kappa/2}$ . 这将导致位移变换后, 光场并不十分接近真空态  $|0\rangle$ . 于是, 之后按光子数的“小量”展开近似程度不好, 导致了图 2 所示的较大偏差.

上面的参数条件显示出绝热消除方法的较大误差, 但在某些适当的条件下, 这个方法还是十分有效的. 例如当 qubit 与光场的耦合较弱, 由 qubit 不同状态导致的光子频率移动 ( $\chi_j$ ) 很小, 即光场受到 qubit 的影响很小, 这时微腔光场的状态与相干态  $\alpha_0$  相差很小. 此时, 我们可以近似地忽略光子的频率移动, 假设微腔光场始终处于相干态  $|\alpha_0\rangle$ . 按照绝热消除方法, 忽略光场的动力学演化, 始终让位移变换中的光场位移量为常量  $\alpha_0$ , 于是位移变换后, 新的光场状态总是近似地处于真空态  $|0\rangle$ , 因此绝热消除与含光子自由度的主方程 (3) 的数值模拟结果可以很好地符合. 另外, 当微腔光子漏出速率很快 ( $\kappa$  很大) 时, 腔内平均光子数较少, 光场随 qubit 变化的含时动力学不明显. 此时, 经过位移量为  $\alpha_0$  的位移变换后, 光场也在真空态  $|0\rangle$  附近, 因而也可得到很好的结果.

但是, 当  $\chi_j$  较大和  $\kappa$  较小时, 微腔光场的含时动力学明显, 光场的频率移动不能忽略, 实际光场与相干态  $|\alpha_0\rangle$  差别较大, 经过位移量为  $\alpha_0$  的位移

变换后, 实际光场其实并没有被位移到真空态  $|0\rangle$ , 所以在把密度矩阵按照光子数小量展开后存在较大误差, 导致绝热消除与系统的真实演化存在较大差别. 对于这种情况, 极化子变换方法很好地克服了其中的缺点, 因为极化子变换不仅考虑了 qubit 在不同状态下位移变换中选取的位移量不同, 而且位移量还实时地随时间变化, 符合光场的实际演化, 所以可以保证每一时刻光场相干态都被位移到真空态  $|0\rangle$ , 因而可以得到很好的结果.

因此, 我们可以得到结论: 对于 qubit 无翻转的 QND 测量, 利用极化子变换可以严格消除光子自由度, 得到严格的 qubit 约化动力学方程 (6). 特别重要的是, 由此获得的测量 backaction 引起的退相干速率  $\Gamma_d^{xy} = (\chi_x - \chi_y)\text{Im}[\alpha_x(t)\alpha_y^*(t)]$  依赖时间, 有典型的非马尔科夫特性. 而通常的绝热消除方案, 即使在 QND 测量下也不准确, 由它所导出的 qubit 约化动力学方程与 qubit 的实际测量动力学有明显偏差. 只有在微腔光子泄漏速率  $\kappa$  较大或 qubit 与微腔耦合较弱的情况下, 微腔中光场动力学才无明显“结构”, 此时用“常数位移量”变换可以较好地消除光子自由度, 得到较准确的结果.

为了印证极化子变换中的“含时位移变换”处理, 图 3 通过  $Q$  函数方式描绘了微腔光场在两比特系统的测量过程中随时间的演变.  $Q$  函数的定义为  $Q(\alpha) = \langle \alpha | \bar{\rho} | \alpha \rangle / \pi$ , 其中  $\bar{\rho}$  为 (约化) 光场密度矩阵,  $\bar{\rho} = \text{Tr}_{\text{qubit}}[\rho]$ .  $Q(\alpha)$  的含义是光场密度矩阵在相干态表象下的准概率分布. 图 3 演示了在两比特状态测量过程中, 微腔光场由初始 (纯) 相干态而逐渐演变成由 3 个纯相干态组成的完全混合态的过程. 具体为, 图 3(a) 给出了初始相干态的  $Q$  函数等高线图; (b) 和 (c) 分别为  $t = 2\kappa^{-1}$  和  $2.8\kappa^{-1}$  的光场分布函数; (d) 为稳态光场, 它对应着由  $|\alpha_{ee}\rangle$ ,  $|\alpha_{gg}\rangle$  和  $|\alpha_{eg}\rangle$  组成的完全统计混合态.

## 5 量子反馈控制下 Bell 态的确定性制备

以上我们数值模拟检验了在量子测量过程中, qubit 的约化动力学和微腔光场动力学. 所谓约化动力学, 是指做了量子路径的系综平均, 并且平均了关联系统中的一部分子系统自由度后的结果. 以下, 我们进一步模拟检验两种消除方法在量子测量的单次实现中 (即在量子路径水平上) 的适用情

况, 将具体考虑两比特 Bell 态在量子反馈控制作用下的确定性制备和抗环境干扰, 比较两种消除方法

与含微腔光子自由度的量子主方程数值模拟结果的差异.

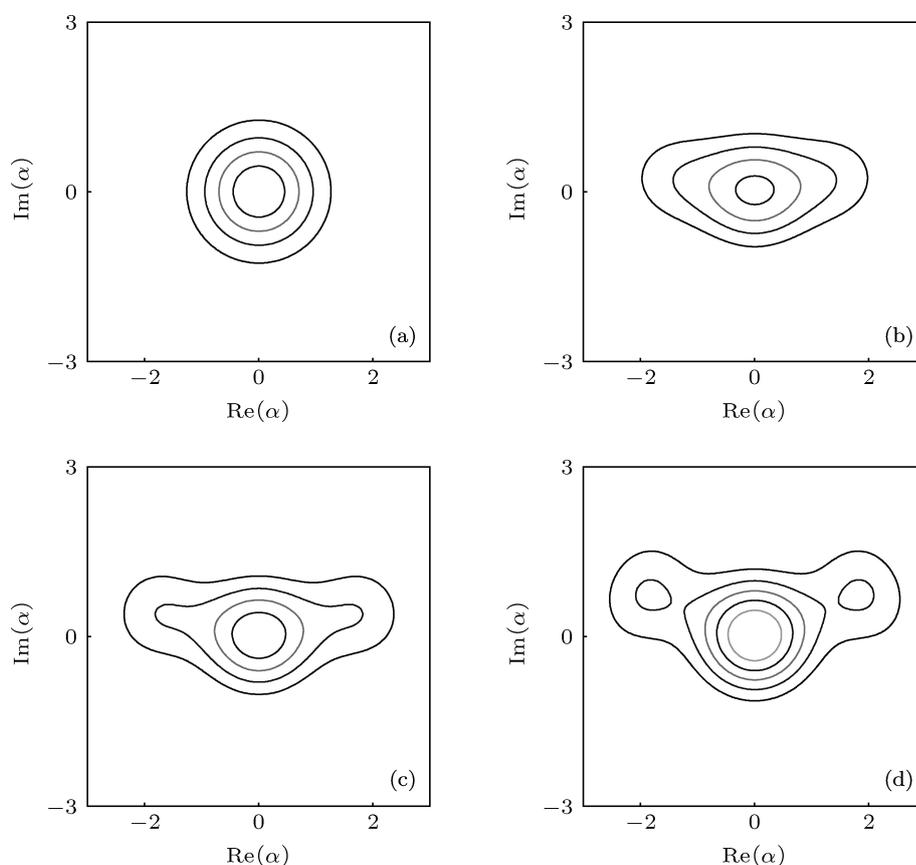


图3 微腔光场密度矩阵的  $Q$  函数 (等高线) 演化图. 光场初态设为未受 qubit 影响的微腔稳态 (即相干态  $|\alpha_0\rangle$ ). 在测量过程中, 受 qubit 影响, 光场逐渐演变为由三个新的相干态组成的统计混合态. 图中显示了几个不同时刻的光场状态 (a)  $t = 0$ ; (b)  $t = 2\kappa^{-1}$ ; (c)  $t = 2.8\kappa^{-1}$ ; (d) 稳态. 系统参数设为  $\Delta_r = 0$ ,  $\chi_1 = 0.1$ ,  $\chi_2 = 0.1$ ,  $\epsilon_m = 3$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_\phi = 0$

对于两比特系统, 有 4 个 Bell 纠缠态:  $|\Psi_{\pm}\rangle = 1/\sqrt{2}(|ee\rangle \pm |gg\rangle)$ ,  $|\Phi_{\pm}\rangle = 1/\sqrt{2}(|eg\rangle \pm |ge\rangle)$ . 如果两比特系统的初态制备为  $1/\sqrt{2}(|e\rangle + |g\rangle)_1 \otimes 1/\sqrt{2}(|e\rangle + |g\rangle)_2 = 1/2(|ee\rangle \pm |gg\rangle) + \sqrt{2}/2|\Phi_{+}\rangle$ , 通过量子测量引起的波函数塌缩效应, 有可能概率性地制备出 Bell 纠缠态 (例如  $|\Phi_{+}\rangle$ ). 这种制备方案是随机成功的, 因为有可能失败 (此时波函数塌缩到其他“非目标态”). 但是, 引入反馈控制手段, 则可以“确定性”地制备出目标 Bell 态. 对于我们前文引入的耦合方式和色散位移 (dispersive shift), 通过对两个 qubit 施加  $J_x$  类型的反馈控制操作, 联合量子测量引起的波函数投影塌缩, 则可以制备和稳定 Bell 态  $|\Phi_{+}\rangle$ . 其他 Bell 态可以通过类似的方法制备和稳定, 只需适当改变耦合方式 (色散位移), 详见文献 [13]. 具体地, 可以利用电流直接反馈方法, 调节反馈操作强度, 实现以上

的控制目的. 在这个反馈方案中, 反馈操作哈密顿量为  $H_{fb}(t) = uI_{hom}(t - \tau)J_x$  其中  $u$  表示反馈强度,  $\tau$  表示在反馈过程中可能的时间延迟 (在简化处理中通常假设  $\tau = 0$ ). 显然, 反馈操作对量子比特系统的状态演化的 (额外) 影响可以描述为:  $[\rho]_{fb} = -i[H_{fb}, \rho] = -iu[I_{hom}(t)J_x, \rho]$ .

在用量子路径理论描述量子测量的单次实现中, 测量输出的 homodyne 电流为  $I_{hom}(t) = \sqrt{\kappa}\langle a + a^\dagger \rangle_t + \xi(t)$ , 其中  $\xi(t)$  是高斯白噪声, 源于波函数的量子塌缩, 它满足  $E[\xi(t)] = 0$ ,  $E[\xi(t)\xi(t')] = \delta(t - t')$ . 对于量子测量过程的描述 (量子态的演化),  $\xi(t)$  是带有 (塌缩) 信息的, 因而在量子态的演化中必须纳入考虑. 但是, 对于反馈操作, 它是多余和有害的 [13], 所以有必要通过滤波的方法加以去除. 滤波处理的数学描述为:  $R(t) = 1/N \int_{t-T}^t e^{-\gamma_f t(t-\tau)} dI_{hom}$ , 这将把电流信

号中的随机项在很大程度上过滤掉,从而消除其不良影响. 滤波后的测量电流为  $R(t) = \sqrt{\kappa}\langle a + a^\dagger \rangle_t$ , 将它纳入反馈哈密顿量  $H_{fb}(t) = uR(t)J_x$ , 则得到连续测量和反馈控制操作下的量子路径方程 (QTE)

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_c = & \mathcal{L}\rho_c - iu\sqrt{\kappa}[\langle a + a^\dagger \rangle_t J_x, \rho_c] \\ & - i\Delta_r[a^\dagger a, \rho_c] + \kappa\mathcal{D}[a]\rho_c \\ & - i\sum_{j=1}^2 \chi_j [a^\dagger a \sigma_j^z, \rho_c] \\ & - i\sum_{j=1}^2 \chi_j [(\alpha a^\dagger + \alpha^* a), \rho_c] \\ & + \sqrt{\kappa}\mathcal{H}[a]\rho_c \xi(t), \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\mathcal{H}[a]\rho_c = a\rho_c + \rho_c a^\dagger - \text{Tr}[(a + a^\dagger)\rho_c]\rho_c$  源于量子测量的信息获取 (引起的“信息演化”).

可以验证: 1) 如果采用通常的“绝热消除方案”, 消除光子自由度后的滤波电流可表达为  $R(t) = -\sqrt{\Gamma_{ci}}\langle J_z \rangle_t$ , 相应的含反馈操作的量子路径方程则为

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_c = & \mathcal{L}\rho_c + iu\sqrt{\Gamma_{ci}}[\langle J_z \rangle_t J_x, \rho_c] \\ & + \frac{\Gamma_d}{2}\mathcal{D}\left[\sum_{j=1}^2 \delta_j \sigma_j^z\right] \rho_c \\ & - iK\left[\left(\sum_{j=1}^2 \delta_j \sigma_j^z\right)^2, \rho_c\right] \\ & + \sqrt{\Gamma_{ci}}\mathcal{M}\left[\sum_{j=1}^2 \delta_j \sigma_j^z\right] \rho_c \xi(t) \\ & - i\frac{\sqrt{\Gamma_{ba}}}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^2 \delta_j \sigma_j^z\right)^2, \rho_c\right] \xi(t), \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\mathcal{M}[c]\rho = (c - \langle c \rangle_t)\rho/2 + \rho(c - \langle c \rangle_t)/2$ ,  $\Gamma_{ba} = 4\kappa\eta\bar{\chi}^2 Y^2 / (\Delta_r^2 + \kappa^2/4)$ . 2) 如果采用极化子变换方法消除光子自由度, 滤波后的测量电流为  $R(t) = \langle c_\phi \rangle_t$ , 进一步引入反馈后的量子路径方程则为

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_c = & \mathcal{L}\rho_c - iu[\langle c_\phi \rangle_t J_x, \rho_c] \\ & + \mathcal{M}[c_\phi]\rho_c \xi(t) - i[c_{\phi-\pi/2}, \rho_c]\xi(t)/2. \end{aligned} \quad (10)$$

图 4 模拟了在单次测量实现过程中 (即在量子路径水平上) homodyne 电流随时间的变化. 在模拟中, 对应于单条量子路径, 我们产生一组随机 Wiener 增量序列  $\{dW_j = dt\xi(t_j); j = 1, 2, \dots\}$ , 然后分别演化含光子自由度的量子路径方程, 以及绝热消除和极化子变换得到的量子路径方程. 由

图 4(a) 可以看出, 当微腔光子泄漏速率较大时, 两种消除方法都可以得到很好的结果. 但图 4(b) 的结果显示, 当微腔光子泄漏速率不很大时, 绝热消除方法首先失效, 而极化子变换方法可以给出相对较好的结果. 随着  $\kappa$  的继续减小 (如图 4(c) 所示), 三条曲线的差别逐渐增大, 即使是极化子变换, 也无法使消除光子自由度后系统的演化与实际情况相符.

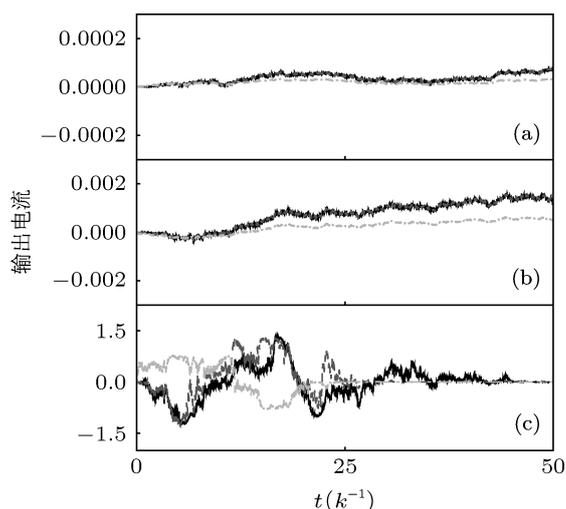


图 4 利用量子测量 (投影) 并结合量子反馈控制实现 Bell 纠缠态的确定性制备, 图中模拟了与 (单条) 量子路径相对应的测量电流. 量子比特系统的初态设定为  $1/\sqrt{2}(|e\rangle + |g\rangle)_1 \otimes 1/\sqrt{2}(|e\rangle + |g\rangle)_2$ . 图中实线为含光子自由度的量子路径方程模拟的测量电流, 点虚线和虚线分别对应绝热消除和极化子变换方法得到的约化量子路径方程给出的结果. 本图演示了三个微腔泄漏速率情形 (a)  $\kappa = 20$ ; (b)  $\kappa = 10$ ; (c)  $\kappa = 1$ . 系统的其他参数取为  $\Delta_r = 0$ ,  $\chi_1 = \chi_2 = 0.1$ ,  $\epsilon_m = 1.0$ ,  $u = 0.5$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_\phi = 0$

我们注意到, 由极化子变换得到的有效测量算符为  $c_\phi = \sqrt{\Gamma_{10}(\phi)}\sigma_z^1 + \sqrt{\Gamma_{01}(\phi)}\sigma_z^2 + \sqrt{\Gamma_{11}(\phi)}\sigma_z^1\sigma_z^2$ , 相应的 (测量) 输出电流  $J(t) \sim \langle c_\phi \rangle_t$ . 这个结果看上去不很显然, 并且用通常的绝热消除方法推导不出这个结构. 通过适当调节 homodyne 测量中参考光的位相  $\phi$ , 可以使  $c_\phi$  的前两项消失, 只留下最后一项, 称为宇称项, 因为它可以帮助实现两个 qubit 状态的宇称测量, 这在某些情况下 (例如量子纠错方面) 可以有特殊的应用. 但是, 这个有效测量算符只是在 qubit 无翻转条件下导出的结果. 在此种情况下, 光场位移变换参数的时间依赖特性, 是在给定的初始微腔光场条件下, 由与特定 qubit 状态相“关联”的相干态参数演化方程给出的. 当 qubit 有翻转后, 光场将受到新的 qubit 状态影响, 这种“关联”消失, 使得无 qubit 翻转情况

下的位移变换将不再准确. 因此在这种情况下, 极化子变换也将失效.

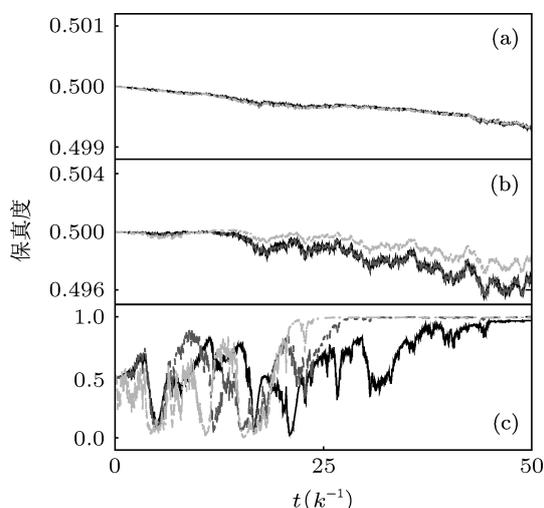


图 5 与图 4 对应 (关于 Bell 纠缠态的确定性制备), 图中模拟了单条量子路径中量子态 (用“保真度”刻画) 的演化. (a), (b) 和 (c) 中的线型设定和参数选取均与图 4 完全相同

与图 4 对应, 图 5 进一步演示了 qubit 状态的演化. 我们用保真度刻画条件量子态 (量子路径) 与目标态的差异, 其定义为  $F(t) = \text{Tr}[\Phi_+ \langle \Phi_+ | \rho_c(t) ]$ . 图 5(a) 和 (b) 均对应微腔光子漏出速率  $\kappa$  较大的情况. 与图 4 中的电流情况一致, (a) 中的结果显示两种消除方法与含微腔光子自由度的数值结果一致; 但 (b) 中结果表明极化子变换在此种 (参数) 情况下符合更好.

我们注意到, (a), (b) 中的 qubit 状态均未到达“目标态”, 原因是  $\kappa$  较大时, 微腔光子携带的 qubit 状态信息很弱 (此种情况实为“量子弱测量”), 实现测量引起的波包塌缩需要较长时间, 所以 (a), (b) 中的结果都对应远未达到投影测量 (波包塌缩) 的情况. 事实上, 此时的测量结果还未能提供足够信息让我们进行 qubit 翻转操作, 所以极化子变换可以给出比通常绝热消除更好的结果. 图 5(c) 中的结果,  $\kappa$  较小, 微腔光场状态与 qubit 状态关联加强, 测量速度加快, 在较短的时间内可以实现波函数的投影测量, 提供较明确的 qubit 状态信息. 据此, 我们实施对 qubit 的  $J_x$  翻转操作 (以便实现确定性的目标态制备). 在 (c) 中, 即在目标态的确定性制备阶段, 由于 qubit 经历了翻转操作, 使得与微腔光场的初始关联消失, 因而导致即使是极化子变换, 也不能给出好的结果. 在这种情况下, 极化子变

换方法比通常的绝热消除方案并无优势. 值得指出, 待目标态制备好后, 系统的演化趋于平稳, 因而三种方法又给出相近的结果. 但如果受到环境影响, 引起 qubit 状态翻转, 之后的操作比较剧烈. 可以预计, 和“制备阶段”类似, 两种消除方法又将与含微腔光子自由度的数值模拟结果出现较大差异.

以上所讨论的光子泄漏速率  $\kappa$  很大的测量, 实际上对应着一种量子“弱测量”, 因为其中的微腔光场很微弱地依赖 qubit 的状态. 由此可以类推, 如果光子泄漏速率  $\kappa$  不很大, 但 qubit 与微腔光场耦合很弱, 这也是一种量子弱测量, 此时两种消除光子自由度的方法也都适用. 值得指出, “量子弱测量”也是一种非常有用的测量手段 [20]. 对于本文所讨论的电路 QED 系统, 在对 qubit 进行量子弱测量的情况下, 我们可以很好地消除微腔光子自由度, 得到等效的只含 qubit 自由度的量子路径方程, 并在此基础上实现对 qubit 量子相干振荡的量子反馈控制 [22,23], 以及实现多个 qubit 纠缠态的制备和稳定 [13,14].

## 6 结论

本文通过对两比特状态的联合测量动力学模拟, 检验了电路 QED 系统中关于微腔光子自由度的两种消除方案. 研究表明, 在 qubit 状态无翻转的量子非破坏 (QND) 测量情况下, 极化子变换可以给出与含微腔光子自由度的数值模拟完全符合的结果, 它所导出的“有效测量算符”很好地刻画了透射 (测量) 微腔对 qubit 系统的影响. 在这种情况下, 极化子变换优于通常的绝热消除方法 (后者只有在“弱测量”情况下才近似适用). 我们进一步考察了使用量子反馈控制方法, 实现 Bell 纠缠态的确定性制备问题. 在量子路径水平上, 通过对输出电流和 qubit 状态的演化模拟发现, 由于引入反馈操作后, qubit 状态有翻转, 使得微腔光场与 qubit 状态的初始关联信息丢失, 极化子变换也将无法给出令人满意的结果. 相对通常的绝热消除方案, 此时极化子变换变得并无优势.

我们因此得到结论, 只有在量子“弱测量”情况下, 两种消除光子自由度的方法才基本适用. 最后指出: 由于消除光子自由度后, 有效 (约化) 量子路径方程在任何参数条件下都只含由解析方法推导而得的有效退相干速率 ( $\Gamma_a$ ) 和仅仅针对 qubit 自由度的有效测量算符. 在量子反馈控制文献中, 人们

往往直接使用这个约化量子路径方程. 本文的结果表明, 当参数条件不满足相应的要求时, 结果很容易变得不可靠. 所以, 在对腔 QED 系统的量子测量

和量子控制的研究中, 有必要先定量检验两种消除方法与含微腔光子自由度的主方程的数值结果的符合程度, 然后再使用相应的约化量子路径方程.

- 
- [1] Blais A, Huang R S, Wallraff A, Girvin S M, Schoelkopf R J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 062320
- [2] Wallraff A, Schuster D I, Blais A, Frunzio L, Huang R S, Majer J, Kumar S, Girvin S M, Schoelkopf R J 2004 *Nature (London)* **431** 162
- [3] Haroche S, Kleppner D 1989 *Phys. Today* **24**
- [4] Schuster D I, Houck A A, Schreier J A, Wallraff A, Gambetta J M, Blais A, Frunzio L, Majer J, Johnson B, Devoret M H, Girvin S M, Schoelkopf R J 2007 *Nature* **445** 515
- [5] Houck A A, Schuster D I, Gambetta J, Schreier J A, Johnson B R, Chow J M, Frunzio L, Majer J, Devoret M H, Girvin S M, Schoelkopf R J 2007 *Nature* **449** 328
- [6] Hofheinz M, Weig E M, Ansmann M, Bialczak R C, Lucero E, Neeley M, O'Connell A D, Wang H, Martinis J M, Cleland A N 2008 *Nature* **454** 310
- [7] Leek P J, Fink J M, Blais A, Bianchetti R, Gppl M, Gambetta J M, Schuster D I, Frunzio L, Schoelkopf R J, Wallraff A 2007 *Science* **318** 1889
- [8] Astafiev O, Inomata K, Niskanen A O, Yamamoto T, Pashkin Y A, Nakamura Y, Tsai J S 2007 *Nature* **449** 588
- [9] Schuster D I, Wallraff A, Blais A, Frunzio L, Huang R S, Majer J, Girvin S M, Schoelkopf R J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 123602
- [10] Gambetta J, Blais A, Schuster D I, Wallraff A, Frunzio L, Majer J, Devoret M H, Girvin S M, Schoelkopf R J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 042318
- [11] Majer J, Chow J M, Gambetta J M, Koch J, Johnson B R, Schreier J A, Frunzio L, Schuster D I, Houck A A, Wallraff A, Blais A, Devoret M H, Girvin S M, Schoelkopf R J 2007 *Nature* **449** 443
- [12] Sarovar M, Goan H S, Spiller T P, Milburn G J 2005 *Phys. Rev. A* **72** 062327
- [13] Liu Z, Kuang L, Hu K, Xu L, Wei S, Guo L, Li X Q 2010 *Phys. Rev. A* **82** 032335
- [14] Feng W, Wang P, Ding X, Xu L, Li X Q 2011 *Phys. Rev. A* **83** 042313
- [15] Wiseman H M, Milburn G J 1993 *Phys. Rev. A* **47** 642
- [16] Gambetta J M, Blais A, Boissonneault M, Houck A A, Schuster D I, Girvin S M 2008 *Phys. Rev. A* **77** 012112
- [17] Hutchison C L, Gambetta J M, Blais A, Wilhelm, F K 2009 *Can. J. Phys.* **87** 225
- [18] Jaynes E T, Cummings F W 1963 *Proc. IEEE* **51** 89
- [19] Tavis M, Cummings F W 1968 *Phys. Rev.* **170** 379
- [20] Wiseman H M, Milburn G J 2010 *Quantum Measurement and Control*, Cambridge University Press, Cambridge, England
- [21] Lalumiere K, Gambetta J M, Blais A 2010 *Phys. Rev. A* **81** 040301(R)
- [22] Ruskov R, Korotkov A N 2002 *Phys. Rev. B* **66** 041401(R)
- [23] Jin J S, Li X Q, Yan Y J 2006 *Phys. Rev. B* **73** 23330

# On the scheme of cavity photon elimination in multi-qubit circuit-quantum electrodynamics system\*

Meng Jian-Yu<sup>†</sup> Wang Pei-Yue Feng Wei Yang Guo-Jian Li Xin-Qi

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

(Received 17 April 2012; revised manuscript received 8 July 2012)

## Abstract

Solid-state superconducting circuit-quantum electrodynamics (QED) system is a promising candidate for quantum information processing and an ideal platform for quantum measurement and quantum control studies. As an extension to our previous simulation for single qubit circuit-QED, in this work we simulate the quantum measurement and control of multi-qubit system. Particularly, we consider the deterministic generation of a two-qubit Bell state. In this context we examine the validity conditions of two cavity-photon-elimination scheme. On the level of quantum trajectory simulation, we find that, owing to the qubit flip caused by feedback, the advanced polaron-transformation scheme is no longer applicable if the measurement is not weak, which also makes meaningless the elegant effective measurement operator.

**Keywords:** circuit-QED, adiabatic elimination, polaron transformation, feedback operating

**PACS:** 03.67.Bg, 32.80.Qk, 42.50.Lc, 42.50.Pq

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 101202101, 10874176), and the Major State Basic Research Project of China (Grant Nos. 2011CB808502, 2012CB932704).

<sup>†</sup> E-mail: m jy198411@mail.bnu.edu.cn