

## 非线性耦合对线性耦合同步的调制研究\*

李凡<sup>1)</sup> 靳伍银<sup>2)</sup> 马军<sup>1)†</sup>

1) (兰州理工大学物理系, 兰州 730050)

2) (兰州理工大学机电学院, 兰州 730050)

(2012 年 4 月 8 日收到; 2012 年 6 月 26 日收到修改稿)

基于李亚普诺夫稳定性理论, 构造了指数型的李亚普诺夫函数, 以四变量的 Chen 超混沌系统为例, 解析地证明了线性耦合实现同步的可靠性. 进一步研究了非线性耦合对线性耦合同步的调制作用. 基于无量纲化的动力学方程定义一个统计函数来估算控制器的消耗功率, 确定了线性耦合与非线性耦合实现同步对应的参数范围, 数值计算结果验证了理论结果的可靠性.

**关键词:** 超混沌, 李亚普诺夫稳定性, 耦合同步

**PACS:** 05.45.-a

## 1 引言

混沌现象普遍存在于物理, 化学, 生物等各个领域, 近年来对混沌和超混沌系统的同步控制研究引起了广泛关注. 混沌和超混沌系统的同步问题主要侧重于几个混沌电路或振子之间的广义同步<sup>[1-6]</sup>、全局同步<sup>[7-9]</sup>、相位同步<sup>[10-19]</sup>、自适应同步<sup>[20-25]</sup>、时滞同步<sup>[26-31]</sup>等. 混沌同步在保密通信<sup>[32-35]</sup>、生命科学<sup>[36]</sup>等诸多领域潜在着极大的应用价值. 与低维混沌系统相比, 超混沌系统更具有更复杂的动力学行为. 常见的超混沌系统模型包括四维的超混沌 Lorenz 系统<sup>[37]</sup>, 四维超混沌 Chua 系统<sup>[38]</sup>, 四维超混沌 Chen 系统<sup>[39]</sup>等, 这些有限维的超混沌系统在电路上也容易仿真, 因此基于这些动力系统的动力学同步控制得到了人们广泛的关注. 如文献[3]报道了利用约瑟夫森结谐振电路模拟神经元各类放电行为. 文献[4]利用序参数分析了广义同步的选择和判定问题. 文献[5]利用霍尔维茨定理和李雅普诺夫稳定性研究了一类含有未知参数四变量 Chen 超混沌系统广义同步

问题, 数值模拟结果证明了此方法的有效性. Zheng 等<sup>[6]</sup>介绍了时滞 Mackey-Glass 系统多重吸引子和广义同步问题. 文献[8]报道了一类动力系统完全同步, 相位同步和参数估计问题. 文献[10]重点介绍了耦合振子相位同步问题. 文献[11, 12]介绍了相位同步和广义同步的转化问题等. 文献[17]介绍了神经元耦合簇放电相位同步迁移问题. 文献[18]重点介绍了相位同步在信号记忆处理中的作用. Wang 等<sup>[20,21]</sup>分别报道了 Hindmarsh-Rose 模型单个控制器作用下簇放电同步和四变量能量系统的线性控制自适应同步问题. Li 等<sup>[22]</sup>报道了两个异结构分数阶混沌系统的同步问题. 徐伟等<sup>[26]</sup>细致介绍了一类参数不确定混沌系统的延迟同步. Taherion 等<sup>[27]</sup>从实验角度报道了一类耦合振子的滞后同步问题. Sun 等<sup>[28]</sup>介绍了白噪声对滞后同步的影响作用. Wang 等<sup>[31]</sup>报道了延迟反馈下一类混沌系统的自适应滞后同步问题. 文献[35]论证了混沌激光器在保密通讯的应用问题. Perc 等<sup>[36]</sup>报道了钙离子振荡的相干共振效应. 文献[40-44]以 Hindmarsh-Rose 和 Hodgkin-Huxley 神经元为例, 研究了神经元在参数区域的动力学特性、自适应

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11072099, 11265008) 资助的课题.

† E-mail: hyperchaos@163.com

耦合神经元的有效同步及了神经元携带信息, 传递所需的能量与同步行为及自身系统的性质等诸多因素之间的关系. 文献 [45] 研究了两个不同系统达到不同程度同步的控制代价, 给出了一类全同系统达到完全同步的出自适应规则. 文献 [46] 讨论了非全同的混沌系统达到同步的最小能量流问题, 推断出能量的减少对神经元簇放电同步过程有作用.

线性耦合方法可以实现许多混沌和部分超混沌系统的同步, 一般通过计算耦合系统的条件李亚普诺夫的负定条件来确定耦合强度的临界值, 而对线性耦合下混沌和超混沌系统同步的解析证明比较少. 本文通过构造指数型的李亚普诺夫函数, 理论上严格证明了线性耦合方法实现同步的可靠性. 实际上, 线性耦合是一种理想情况, 如振荡电路中通常采用的电压耦合遇到的问题是耦合电阻元件由于工艺和热效应使得电阻出现非线性特性. 因此, 用线性耦合和非线性耦合的组合可以来研究耦合同步问题, 即在线性耦合基础上引入不同程度的非线性耦合项来简化模拟实际系统之间的耦合作用. 拟在线性耦合下引入了指数型的小幅度扰动来刻画非线性耦合对线性耦合作用的调制, 基于无量纲化方程定义了功率函数来估计控制器的能耗问题, 通过计算同步暂态时间来确定线性和非线性耦合共同作用下的同步参数区域, 分析了非线性耦合对线性耦合同步的调制作用.

## 2 模型和方法

四维的超混沌 Chen 系统数学模型为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= 4x - 10xz + cy + 4w, \\ \dot{z} &= y^2 - bz, \\ \dot{w} &= -dx,\end{aligned}\quad (1)$$

$x, y, z$  和  $w$  为系统的状态变量,  $a, b, c, d$  为系统的控制参数. 当参数  $a = 35, b = 3, c = 21, d = 2$ , 此系统可观察到超混沌状态. 通常将控制器施加在系统 (1) 第二变量的动力学方程上来改变系统的动力学行为, 对应的受控系统 (响应系统) 为

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 35(\hat{y} - \hat{x}), \\ \dot{\hat{y}} &= 4\hat{x} - 10\hat{x}\hat{z} + 21\hat{y} + 4\hat{w} + u_1, \\ \dot{\hat{z}} &= \hat{y}^2 - 3\hat{z},\end{aligned}$$

$$\dot{\hat{w}} = -2\hat{x}, \quad (2)$$

(2) 式中线性控制器形式为

$$u_1 = k_1(y - \hat{y}). \quad (3)$$

通过计算系统 (2) 的最大李亚普诺夫指数发现, 当耦合强度  $k_1$  超过一定临界值时, 驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 可以达到完全同步, 该临界值可以通过计算李亚普诺夫最大指数小于零来判断 (数值计算的线性耦合强度临界制值  $k_1 \approx 3.8$ ). 这里将利用李亚普诺夫稳定性理论来严格证明这种线性耦合方法的有效性.

$$\begin{aligned}e_x &= x - \hat{x}, \quad e_y = y - \hat{y}, \\ e_z &= z - \hat{z}, \quad e_w = w - \hat{w}; \\ \dot{e}_x &= 35(e_y - e_x), \\ \dot{e}_y &= 4e_x - 10xz + 10\hat{x}\hat{z} + 21e_y + 4e_w - k_1e_y, \\ \dot{e}_z &= y^2 - \hat{y}^2 - 3e_z, \\ \dot{e}_w &= -2e_x,\end{aligned}\quad (4)$$

构造正定的指数型的李亚普诺夫函数为

$$\begin{aligned}V &= \exp \left[ -2e_x^2/35 + e_y^2/2 + e_z^2/2 \right. \\ &\quad \left. + e_w^2 - 4e_xe_w/35 + \int 10(xz - \hat{x}\hat{z})e_y dt \right. \\ &\quad \left. - \int (y^2 - \hat{y}^2)e_z dt - \int (148e_x^2/35 \right. \\ &\quad \left. + 17.2e_y^2) dt \right],\end{aligned}\quad (6)$$

则对应的李亚普诺夫函数随时间导数为

$$\begin{aligned}dV/dt &= V \left[ -4e_x\dot{e}_x/35 + e_y\dot{e}_y + e_z\dot{e}_z \right. \\ &\quad \left. + 2e_w\dot{e}_w - 4\dot{e}_xe_w/35 - 4e_x\dot{e}_w/35 \right. \\ &\quad \left. + 10(xz - \hat{x}\hat{z})e_y - (y^2 - \hat{y}^2)e_z \right. \\ &\quad \left. - (148e_x^2/35 + 17.2e_y^2) \right] \\ &= V[3.8e_y^2 - 3e_z^2 - u_1e_y] \\ &= V[3.8e_y^2 - 3e_z^2 - k_1e_y^2] \\ &= V[-(k_1 - 3.8)e_y^2 - 3e_z^2].\end{aligned}\quad (7)$$

(7) 式包含了控制器 (3) 式  $u_1 = k_1e_y$ , 且从理论上给出临界强度值约为 3.8. 根据李亚普诺夫稳定性理论, 要使方程 (7) 满足负定条件, 则需方程 (8) 负定, 即需满足

$$-(k_1 - 3.8)e_y^2 - 3e_z^2 < 0. \quad (8)$$

当 (8) 式中的耦合系数超过临界值时, 该不等式满足负定条件, 此时线性耦合可实现两个超混沌系统的完全同步. 从 (8) 式条件看数值计算下条件李亚普诺夫指数对应的临界反馈强度  $k_1 \approx 3.8$  在理论上满足同步条件.

由于系统中只有线性耦合是理想情况, 这里拟施加一个动态的非线性耦合控制项与线性耦合共同作用来研究耦合同步问题. 对应的动态控制器  $u_1$  为

$$u_1 = k_1(y - \hat{y}) + (y - \hat{y}) \exp[k_2(y - \hat{y})]. \quad (9)$$

当 (9) 式中非线性耦合系数  $k_2 = 0$  时, 则退化为线性耦合情形如 (3) 式. 同样构造正定的指数型李亚普诺夫函数为

$$\begin{aligned} V = \exp \bigg[ & -2e_x^2/35 + e_y^2/2 + e_z^2/2 \\ & + e_w^2 - 4e_x e_w/35 + \int 10(xz - \hat{x}\hat{z})dt \\ & - \int (y^2 - \hat{y}^2)e_z dt - \int (148e_x^2/35 \\ & + 16.2e_y^2)dt \bigg]. \end{aligned} \quad (10)$$

则李亚普诺夫函数对时间导数为

$$\begin{aligned} dV/dt = V \bigg[ & -4e_x \dot{e}_x/35 + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z \\ & + 2e_w \dot{e}_w - 4\dot{e}_x e_w/35 - 4e_x \dot{e}_w/35 \\ & + 10(xz - \hat{x}\hat{z})e_y - (y^2 - \hat{y}^2)e_z \\ & - (148e_x^2/35 + 16.2e_y^2) \bigg] \\ = & V[4.8e_y^2 - 3e_z^2 - u_1 e_y] \\ = & V[4.8e_y^2 - 3e_z^2 - k_1 e_y^2 - e_y^2 \exp(k_2 e_y)] \\ = & V[-(k_1 - 4.8)e_y^2 \\ & - e_y^2 \exp(k_2 e_y) - 3e_z^2]. \end{aligned} \quad (11)$$

即使方程 (11) 式满足为负定条件, 则需使方程满足负定条件

$$-(k_1 - 4.8)e_y^2 - e_y^2 \exp(k_2 e_y) - 3e_z^2 < 0. \quad (12)$$

当 (12) 式中反馈系数超过一定临界值, 则负定条件满足. 对比 (12) 和 (8) 式, 可发现当  $k_2 = 0$  时, (12) 式将退化为形如 (8) 式.

根据李亚普诺夫稳定性理论, 通过线性耦合和非线性耦合可实现超 Chen 混沌系统的完全同步, 且系统耦合同步的暂态过程的长短主要取决于耦

合参数的取值. 这里进一步将分别讨论系统在线性耦合和非线性耦合下, 系统达到同步的暂态时间, 基于无量纲动力学方程的控制器定义功耗统计量来估算控制器的效率, 以及确定同步所需的耦合参数区域.

### 3 数值计算和讨论

数值计算中采用四阶龙格库塔方法对以上微分方程组进行积分, 积分步长为 0.001. 驱动系统 (1), 响应系统 (2) 各个变量初始值分别为 (0.5, 0.3, 0.1, 0.7), (1.3, 1.1, 1.3, 1.1), 计算时间为 1000 个时间单位.

以系统中任意两变量的乘积作为统计函数来观察其时间序列变化特征, 这里令  $P$  为系统的统计函数, 来刻画当系统达到同步时的变化特征. 从物理意义讲, 如果将模型四个变量用实际的非线性电路来刻画, 通常用电感线圈, 电容器, 电阻等元件可构建振荡电路, 以其中一个变量代表电路输出的电压序列, 另一变量代表电流, 则其任意两个变量的乘积作为系统的消耗功率, 用施加控制后的系统输出功率减去无施加控制器下系统的消耗功率作为控制器的消耗功率.

未加控制器的超 Chen 混沌系统 (1) 的功率定义为

$$p_1 = |\hat{x}\hat{z}|. \quad (13)$$

施加控制器的受控超 Chen 混沌系统 (2) 的功率表示为

$$p_2 = |\hat{x}\hat{z}|. \quad (14)$$

则控制器的功耗定义为

$$p = |p_1 - p_2|. \quad (15)$$

为了简单起见, 控制器的最大功耗表示为

$$\Delta p = \max(p), \quad (16)$$

其中  $\max(*)$  表示对一定暂态过程中的变量序列选取最大值. 首先数值估算下线性同步所需要的临界耦合强度, 数值计算结果见图 1.

图 1 的结果表明系统 (2) 受线性耦合时, 当线性耦合参数达到一定的临界值时, 系统将达到同步状态. 这里进一步分析讨论系统受线性耦合时, 系统的同步和控制器的功耗随时间的演化分布以及与线性耦合参数的关系. 图 2 为超 Chen 混沌系统

的控制器在取不同的线性耦合参数时的功耗随时间的演化.

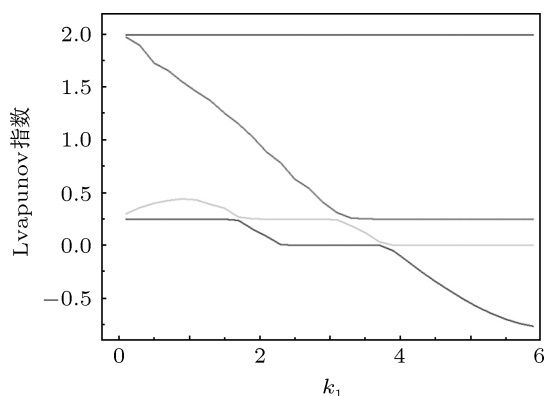


图1 四个较大李雅普诺夫指数随线性耦合参数  $k_1$  的演化

图2的结果表明系统(1)和(2)在线性耦合

下,系统随线性耦合参数的值达到一定的临界值时,系统控制器的功耗趋于零,即表明系统达到完全同步.对比图2各种情况可以发现线性耦合参数的值越大,相应系统达到同步所需的时间越短.

如前所述,动力系统之间线性耦合是一种理想情况,因此拟在线性耦合基础上引入一定幅度的非线性耦合作用来逼近动力系统的耦合作用问题,控制器形式为(9)式,进一步讨论系统(2)受非线性耦合控制时,系统控制器的功耗和同步时间与耦合参数的关系,以便分析非线性耦合对线性耦合同步的影响.在模拟中选取线性耦合强度在临界值( $k_1 < 3.8$ ),主要观察非线性耦合对线性耦合同步的促进作用,图3给出了受控系统(2)在不同非线性控制器(9)作用下的控制器的功耗变化问题.

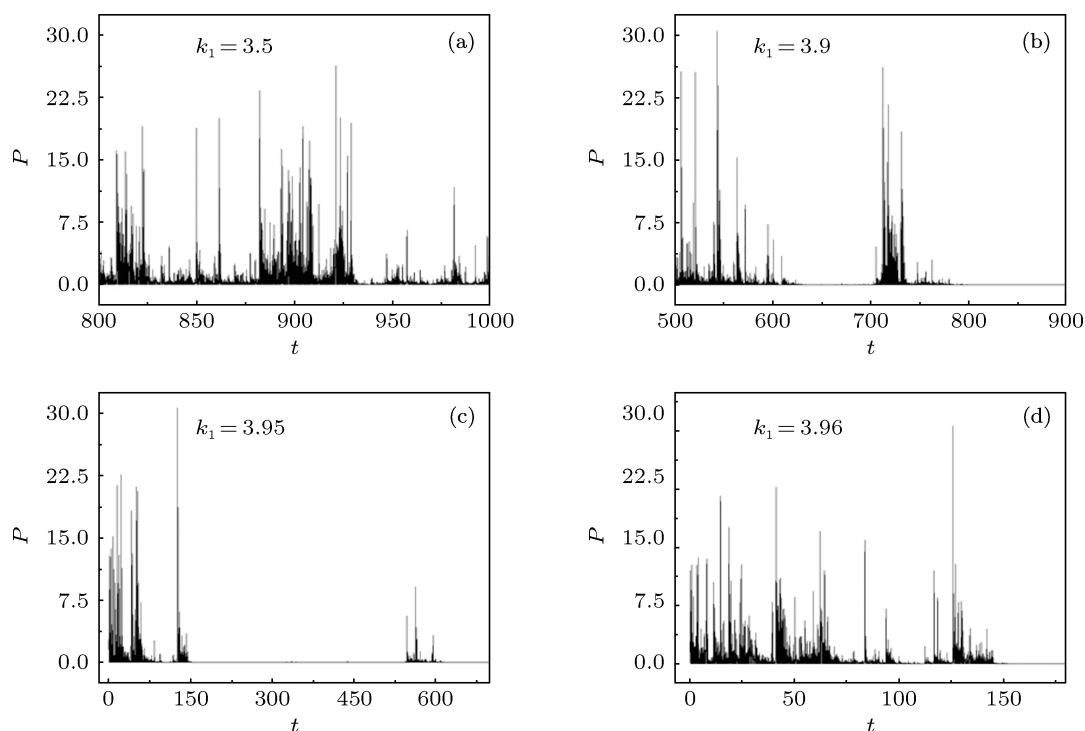


图2 系统(2)线性控制器的功耗随时间的演化分布,当线性耦合系数  $k_1$  分别取固定值 (a)  $k_1 = 3.5$ ; (b)  $k_1 = 3.9$ ; (c)  $k_1 = 3.95$ ; (d)  $k_1 = 3.96$

图3的结果表明,当系统受非线性耦合时,系统达到完全同步的所需线性耦合参数的临界值约为3.0,相比线性耦合单独作用情形,此时线性项耦合参数  $k_1$  的取值可以取得更小,即非线性耦合作

用降低了线性耦合同步所需耦合强度的阈值.分析发现:线性耦合参数  $k_1$  对系统达到同步的时间起主导作用,非线性项耦合参数  $k_2$  对系统达到同步具有微弱的调制及促进作用,但对系统控制

器的功耗的大小具有影响. 相应的非线性项耦合参数  $k_2$  的值越大, 控制器的功耗越小. 进一步通过数

值计算给出了二参数区域  $(k_1, k_2)$  中控制器的能耗分布问题, 结果见图 4.

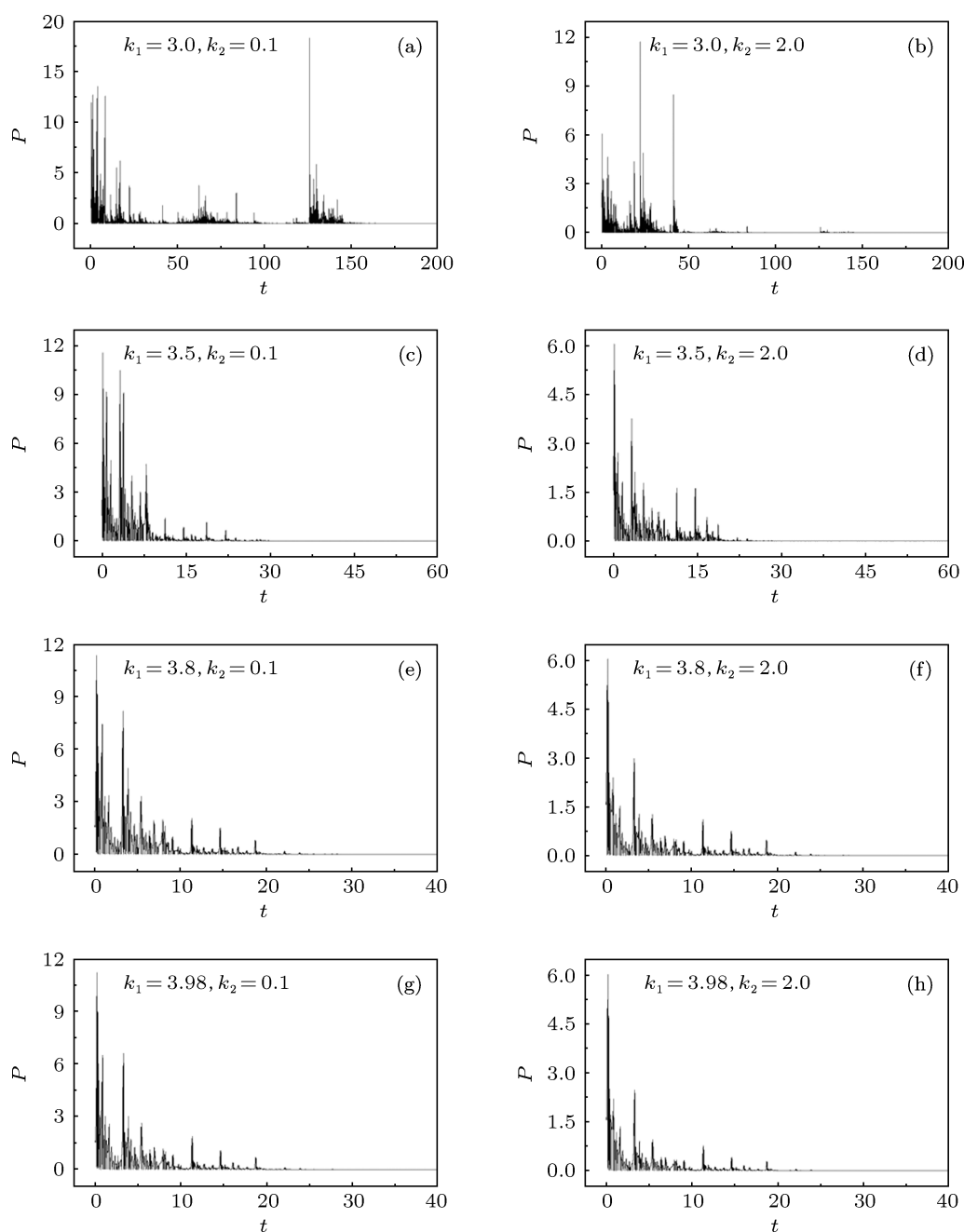


图 3 系统 (2) 中非线性控制器的功耗随时间的演化, 线性和非线性耦合参数的值分别取  $k_1 = 3.0, k_2 = 0.1$  (a);  $k_1 = 3.0, k_2 = 2.0$  (b);  $k_1 = 3.5, k_2 = 0.1$  (c);  $k_1 = 3.5, k_2 = 2.0$  (d);  $k_1 = 3.8, k_2 = 0.1$  (e);  $k_1 = 3.8, k_2 = 2.0$  (f);  $k_1 = 3.98, k_2 = 0.1$  (g);  $k_1 = 3.98, k_2 = 2.0$  (h)

图 4 结果表明系统 (1) 和系统 (2) 在未达到完全同步时, 系统 (2) 控制器的最大功耗由非线性耦合参数  $k_2$  起主导作用, 但当线性耦合参数  $k_1$  达到一定临界值后, 系统 (2) 控制器的最大功耗在一个固定的范围内变化, 此时也标志

着系统达到完全同步. 但系统的最大功耗随非线性耦合项参数  $k_2$  的增大, 其值相应的减小, 并锁定在一个有限值内. 进一步探测了两个系统达到完全同步时所需要的暂态时间问题, 数值结果见图 5.

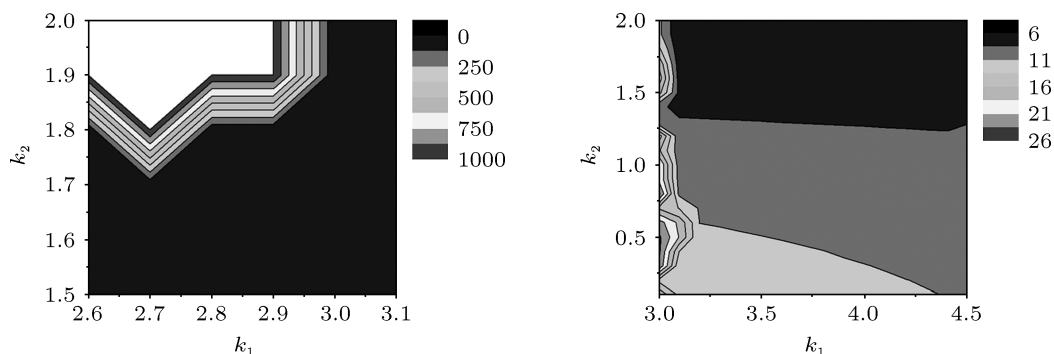


图4 系统(2)的控制器的最大功耗在线性耦合参数  $k_1$  和非线性耦合参数  $k_2$  相空间的分布, 相空间的灰度表示控制器的功耗大小

图5的结果表明, 在非线性的控制器中, 耦合参数  $k_1$  和  $k_2$  起着不同的作用. 即耦合系统达到混沌同步的暂态过程中, 线性耦合系数  $k_1$  起着主导作用, 即线性耦合参数的值达到一定的值时, 非线性项耦合参数  $k_2$  的作用将非常微弱; 反之当线性耦合参数  $k_1$  小到一定程度时, 非线性耦合参数  $k_2$  对系统达到同步的快慢的作用比较明显.

图6的结果表明, 在二参数区域, 同步和非同步区域有明显的界限, 非线性耦合对系统的同步暂态时间及耦合参数的取值范围较线性耦合时有明显的促进. 当然当线性耦合系数增大到一定的值时, 系统将很快的达到同步, 所需的同步时间几乎不变. 因此线性耦合系数的取值并非越大越好; 相应的非线性耦合的参数  $k_2$  的取值也不能

过大.

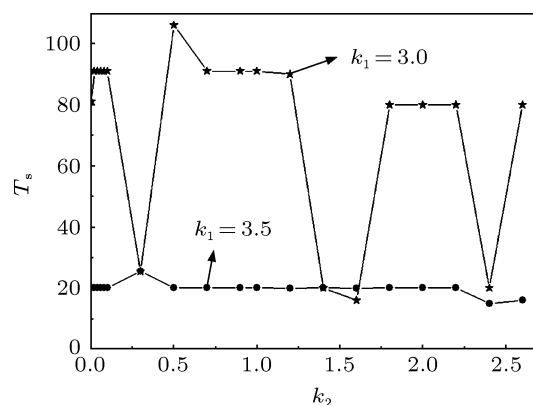


图5 系统(1)和(2)达到同步的同步时间随非线性耦合参数  $k_2$  的演化, 当线性耦合参数分别取固定值  $k_1 = 3.0$ ,  $k_1 = 3.5$

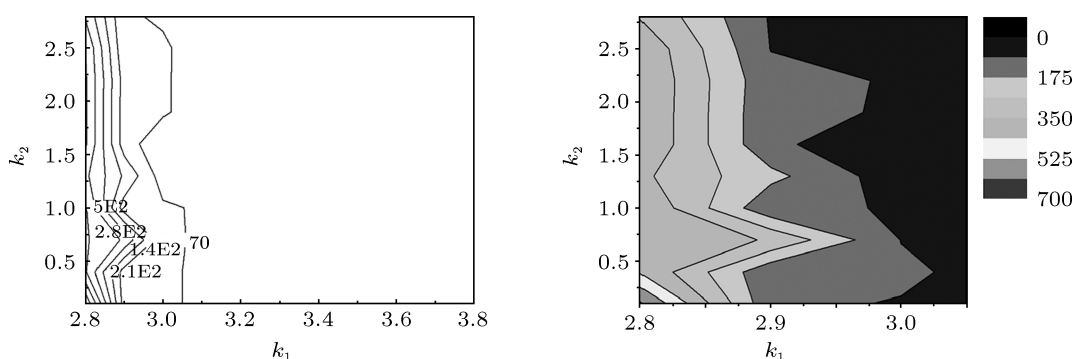


图6 系统(1)和系统(2)达到同步的同步时间在线性系数  $k_1$  和非线性系数  $k_2$  相空间的分布, 相空间的灰度表示控制器的功耗大小

## 4 结论

基于李亚普诺夫稳定性理论, 构造了指数型的李亚普诺夫函数来严格证明一类 Chen 超混沌系统

的线性同步问题, 并分析了非线性耦合对线性耦合同步的调制作用问题. 基于无量纲化动力学方程, 以系统中任意两变量的乘积为统计函数来刻画系统功率和控制器消耗功率问题. 以系统达到同步的

暂态时间和控制器的功耗为判断准则, 分析了耦合强度对系统达到同步的作用. 研究结果: 1) 线性耦合时, 从理论和数值方面证明耦合参数超过一定阈值可实现超混沌系统同步, 且控制器的功耗在系统 (1) 和 (2) 达到同步后随时间的演化将趋于零, 体现了动态适应性. 2) 非线性耦合时, 同步区域较线性耦合有明显的区别, 即非线性耦合对线性耦合项有明显的促进作用. 线性耦合参数  $k_1$  对系统达到同步和最大功耗的消耗范围的具有主导作用, 而非

线性耦合项参数  $k_2$  对系统的同步时间和控制器的功耗起促进和一定程度的调制补偿作用. 系统达到同步的同步时间和系统控制器最大功耗在线性耦合参数  $k_1$  和非线性耦合参数  $k_2$  的相空间的分布充分证明了此以上理论分析的可靠性, 进一步得到了耦合参数的有效区域. 本文构造指数型李亚普诺夫函数的方法可以用来论证其他系统线性耦合同步问题, 对线性耦合同步的理论证明可提供部分参考信息.

- [1] Zhan M, Wang X G, Gong X F 2003 *Phys. Rev. E* **68**036208
- [2] Yuan Z L, Xu Z Y, Guo L X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070503
- [3] Li F, Liu Q R, Guo H Y 2012 *Nonlinear Dynam* **69** 2169
- [4] Liu Z H, Zhou J, Munakata T 2009 *EPL* **87** 50002
- [5] Jia L X, Dai H, Hui M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100501
- [6] Li D, Zheng Z G 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4009
- [7] Wang Z S, Zhang H G, Wang Z L 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** (in Chinese) 2687 [王占山, 张化光, 王智良 2006 物理学报 **55** 2687]
- [8] Ma J, Li F, Huang L 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer Simulat* **16** 3770
- [9] Chen Y, Wu X F, Gui Z F 2010 *Appl. Math. Model.* **34** 4161
- [10] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
- [11] Zhan M, Hu G, Wang X G 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 332
- [12] Zheng Z G, Hu G, Zhou C S 2000 *Acta. Phys. Sin.* **49** 2320 (in Chinese) [郑志刚, 胡岗, 周昌松等 2000 物理学报 **49** 2320]
- [13] Li X W, Zheng Z G 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 265
- [14] Yang X L, Xu W 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2004
- [15] Wei D Q, Luo X S, Qin Y H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2184
- [16] Wang X H, Jiao L C, Wu J S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020501
- [17] Wang H X, Lu Q S, Shi X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060509
- [18] Fell J, Axmacher N 2011 *Nature Rev. Neurosci* **12** 105
- [19] Taghvafard H., Erjaee G H 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer Simulat* **16** 4078
- [20] Wang Z L, Shi X R 2012 *Nonlinear Dynam.* **67** 1817
- [21] Wang Z L, Shi X R 2011 *Commun. Nonlinear Sci. Numer Simulat* **16** 463
- [22] Li D, Deng L M, Du Y X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 050502 (in Chinese) [李东, 邓良民, 杜永霞, 杨媛媛 2012 物理学报 **61** 050502]
- [23] Zhang R X, Tian G, Li P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2080 (in Chinese) [张若洵, 田钢, 栗苹, 杨世平 2008 物理学报 **57** 2073]
- [24] Luo Q, Gao Y, Qi Y N 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6809 (in Chinese) [罗群, 高雅, 齐雅楠, 高雅 2, 吴桐, 许欢, 李丽香, 杨义先 2009 物理学报 **58** 6809]
- [25] Zhou P, Kuang F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6851 (in Chinese) [周平, 邝菲 2010 物理学报 **59** 6851]
- [26] Jia F L, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3106 (in Chinese) [贾飞蕾, 徐伟 2007 物理学报 **56** 3101]
- [27] Taherion S, Lai Y C 2000 *Int. J. Bifurcat Chaos* **11** 2587
- [28] Sun Z K, Yang X L 2011 *Chaos* **21** 033114
- [29] Tong S C, Zhang H G, Ma T D 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3751
- [30] Li C D, Liao X F 2004 *Phys. Lett. A* **329** 301
- [31] Wang Q Y, Lu Q S, Duan Z S 2010 *Int. J. Nonlinear Mecha.* **45** 640
- [32] Tinzel W, Englert A, Kanter I 2010 *Phil. Trans. R. Soc. A* **368** 379
- [33] Kocarev L, Parlitz U 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5028
- [34] Peng J H, Ding E J, Ding M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 904
- [35] VanWigigeren G D, Roy R 1998 *Science* **279** 1198
- [36] Perc M, Marhl M 2003 *Chem. Phys. Lett.* **376** 432
- [37] Ning C Z, Haken H 1990 *Phys. Rev. A* **41** 3826
- [38] Kapitaniak T, Chua L O 1994 *Int. J. Bifurcat Chaos* **4** 477
- [39] Chen G, Dong X 1998 *World Scientific Pub. Co.* **2** 132
- [40] Pinto R D, Varona P, Volkovskii A R 2000 *Phys. Rev. E* **62** 2644
- [41] Torrealdea F J, d'Anjou A, Graña M 2006 *Phys. Rev. E* **74** 011905
- [42] Rech P C 2011 *Phys. Lett. A* **375** 1461
- [43] Moujahid A, d'Anjou A, Torrealdea F J 2011 *Chaos, Solitons & Fractals* **44** 92
- [44] Moujahid A, d'Anjou A, Torrealdea F J 2011 *Phys. Rev. E* **83** 031912
- [45] Sarasola C, Torrealdea F J, d'Anjou A 2002 *Math. Comput. Simulat.* **58** 309
- [46] Sarasola C 2005 *Phys. Rev. E* **72** 026223

# Modulation of nonlinear coupling on the synchronization induced by linear coupling\*

Li Fan<sup>1)</sup> Jin Wu-Yin<sup>2)</sup> Ma Jun<sup>1)</sup>†

1) ( *Department of Physics, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China* )

2) ( *College of Mechano-Electronic Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China* )

( Received 8 April 2012; revised manuscript received 26 June 2012 )

## Abstract

Based on the Lyapunov stability theory, the Lyapunov function in the form of exponential type is constructed. The four-variable Chen hyperchaotic model is investigated as an example. The reliability of a linear coupling-induced synchronization of hyperchaotic system is proofed analytically. Furthermore, the modulation effect of nonlinear coupling on the synchronization induced by linear coupling is investigated. A statistical function is defined to evaluate the power consumption of controller according to the dimensionless dynamical equations, the appropriate parameter region for synchronization due to the joint action of linear and nonlinear coupling, and the extensive numerical results confirm the correctness of the theoretical predication.

**Keywords:** hyperchaos, Lyapunov stability, coupling synchronization

**PACS:** 05.45.-a

---

\* Project supported by the National Natural and Science Foundation of China (Grant Nos. 11072099, 11265008).

† E-mail: hyperchaos@163.com