

# 切换电路系统的复杂行为及其机理\*

马新东 毕勤胜†

(江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)

(2012年6月25日收到; 2012年7月11日收到修改稿)

建立了不同类型 Jerk 电路之间存在开关的切换电路系统. 基于平衡态分析, 指出随参数的变化, 两子系统分别存在着稳定的焦点以及由 Hopf 分岔导致其失稳而产生的周期振荡. 考察了开关周期切换引起的各种复杂行为, 分别给出了点/环和环/环切换周期振荡现象及其相应的产生机理. 在不同的切换振荡过程中, 切换点的数目随参数的变化会产生倍化序列, 导致系统由倍周期分岔进入混沌, 同时, 由于参数的变化影响着子系统周期振荡的幅值, 进而引起整个切换系统吸引子结构的变化.

**关键词:** 切换电路, 倍周期分岔, 切换周期振荡, 混沌

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Pq

## 1 引言

由于存在着大量的诸如开关、阈值等非线性结构<sup>[1]</sup>, 导致实际系统会在不同的子系统之间产生各种切换行为<sup>[2]</sup>. 切换一般可以分为二类, 一是基于时间, 二是基于状态变量, 当然还会存在着两种切换的耦合<sup>[3]</sup>. 这种在不同子系统之间的切换会导致各种复杂的动力学行为, 即使对于结构相对简单的子系统, 也会由于切换产生不同的振荡现象甚至混沌<sup>[4]</sup>. 近年来, 随着科学技术的不断发展, 切换系统得到了更为广泛的应用, 例如往往会引入阈值实现对实际系统的控制<sup>[5]</sup>, 因而切换系统的研究引起了国内外学者们的高度重视, 也取得了大量的成果<sup>[6]</sup>. 这些工作大都是围绕着不同线性系统之间切换展开的, 考察由于切换产生的稳定性问题, 并基于 Lyapunov 理论, 分析不同控制模式下切换系统平衡态的动力特性<sup>[7]</sup>, 如 Xie 和 Wang 研究了线性切换系统的周期稳定性<sup>[8]</sup>. 而对于非线性系统之间存在切换的工作相对较少, 只是针对具体问题取得了一些结果, 如吴天一等人考察了同时存在周期转

换开关和控制阈值时 Rayleigh 振子的不同振荡现象及其分岔机理<sup>[9]</sup>.

为进一步揭示不同非线性系统存在切换时的动力特性, 本文首先构建了两 Jerk 电路之间存在开关的非线性周期切换电路模型, 进而考察切换系统的各种复杂振荡行为及其相应的产生机理.

## 2 切换电路模型

在一定条件下, Jerk 电路系统 (见图 1) 可以产生许多诸如混沌振荡等丰富的动力学行为, 其一肢式的数学模型可以表示为<sup>[10]</sup>

$$\ddot{x} + A\dot{x} + \dot{x} = G(x), \quad (1)$$

其中  $G(x)$  表示具有不同特性的非线性电阻, 通过该电阻的电流和电压关系满足  $I = G(V)$ . 在实际电路系统中, 存在着各种不同非线性特性的电阻, 导致系统产生各种非线性行为.

为考察切换引起的振荡特性, 我们引入开关  $S$ , 使得其在具有不同伏安特性的非线性电阻之间切换 (参见图 2).

\* 国家自然科学基金 (批准号: 20976075, 10972091) 资助的课题.

† E-mail: qbi@ujs.edu.cn

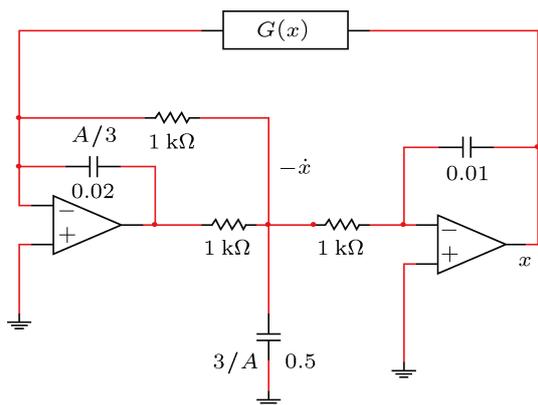


图1 Jerk 电路系统

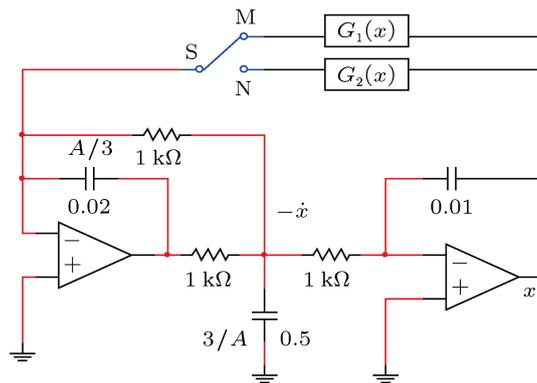


图2 切换电路系统

设定开关 S 为周期切换, 也即每隔固定时间 T, 开关 S 分别在 M 和 N 之间切换, 分别对应于不同特性的非线性电阻  $G_1(x)$  和  $G_2(x)$ , 系统相应的无量纲数学模型可以表示为

$$\ddot{x} + A\dot{x} + \dot{x} = G_1(x),$$

$$t \in [2(n-1)T, (2n-1)T], \quad \text{a 子系统}, \quad (2)$$

$$\ddot{x} + A\dot{x} + \dot{x} = G_2(x),$$

$$t \in [(2n-1)T, 2nT], \quad \text{b 子系统}, \quad (3)$$

其中  $n$  为自然数,  $G_1(x)$  和  $G_2(x)$  的结构如图 3 所示, 其相应的无量纲伏安特性可以分别描述为  $G_1(x) = B_1|x| - C_1$ ,  $G_2(x) = -B_2 \max(x, 0) + C_2$ .

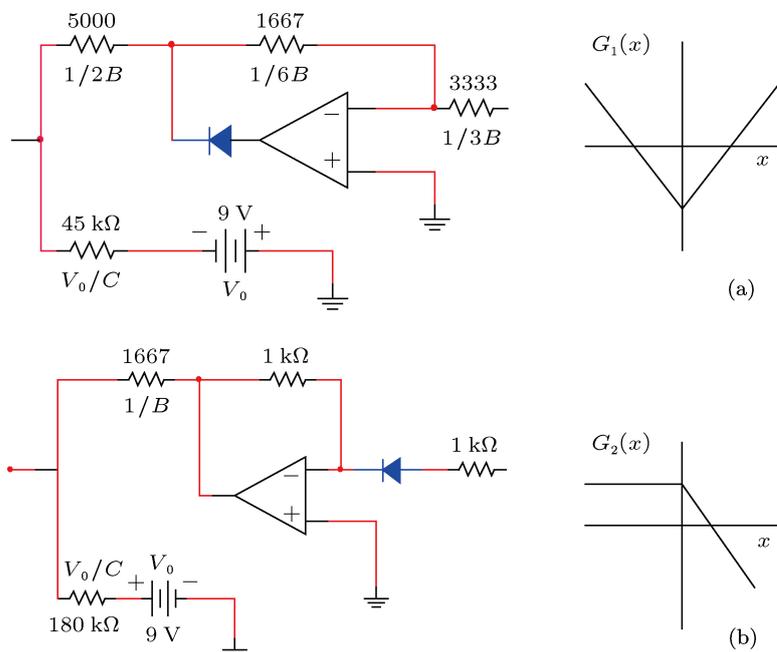


图3 非线性电阻结构及其特性

### 3 平衡点分析

由于开关 S 会导致系统在两子系统之间切

换, 首先分析子系统的平衡点及其特性. 当开关位于 M 点, 即对应于 a 子系统, 当系数  $A$ ,  $B_1$  和  $C_1$  均为正数时, 此时该子系统存在两个对称的平衡

点  $EQ_{10}^{\pm}(\pm \frac{C_1}{B_1}, 0, 0)$ , 其相应的特征方程为

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + \lambda \pm B_1 = 0. \quad (4)$$

显然, 当  $A - B_1 > 0$  时, 平衡点  $EQ_{10}(-\frac{C_1}{B_1}, 0, 0)$  为稳定的焦点, 当  $A = B_1$  时, 其特征方程存在一对共轭的纯虚根  $\lambda_{1,2} = \pm I$  和一负实根  $\lambda_3 = -A$ , 使得 a 子系统产生超临界 Hopf 分岔, 导致周期频率为  $\Omega_1 = \sqrt{A}$  的周期振荡, 其振荡幅值随  $\delta = B_1 - A$  的增加而增大.

当开关位于 N 点, 即对应于 b 子系统, 同样考虑  $A, B_2$  和  $C_2$  均为正数情形, 此时该子系统存在单个平衡点  $EQ_{20}(\frac{C_2}{B_2}, 0, 0)$ , 其相应的特征方程为

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + \lambda + B_2 = 0. \quad (5)$$

显然, 当  $A - B_2 > 0$  时, 平衡点  $EQ_{20}(\frac{C_2}{B_2}, 0, 0)$  为稳定的焦点, 当  $A = B_2$  时, 其特征方程存在一对共轭的纯虚根  $\lambda_{1,2} = \pm I$  和一负实根  $\lambda_3 = -A$ , 使得 b 子系统产生超临界 Hopf 分岔, 导致周期频率为  $\Omega_2 = \sqrt{A}$  的周期振荡, 其振荡幅值随  $\delta = B_2 - A$  的增加而增大.

## 4 动力学行为及其机理

当开关 S 以固定时间间隔  $T$  在两子系统之间引起切换时, 导致系统轨迹轮流受不同向量场的控制, 从而会引起丰富的动力学特性, 为深入分析该切换系统的动力特性, 固定参数

$$\begin{aligned} A = 1.0, \quad C_1 = 3.0, \\ B_2 = 2.0, \quad C_2 = 0.9, \quad T = 30.0, \end{aligned} \quad (6)$$

考察切换系统随参数  $B_1$  变化时的动力学演化行为.

图 4 给出了其相应的分岔过程, 其中  $y = \dot{x}$ , 从图中可以看出, 当  $B_1 > 1.0$  时, 切换系统表现为周期振荡, 而当  $B_1 = 1.075$  时, 由计算可知, 其周期轨道的 Floquet 指数在  $-1$  处穿越单位圆, 导致倍周期分岔, 并由倍周期分岔序列进入混沌. 当  $B_1 = 1.197$  时, 混沌失稳, 回到周期振荡, 并又由周期倍化分岔进入混沌, 在混沌区域中存在着诸如周期三等不同的周期窗口. 由于参数  $B_1$  的变化会导致 a 子系统的不同动力特性, 导致系统轨迹在不

同的吸引子上切换, 产生各种复杂行为.

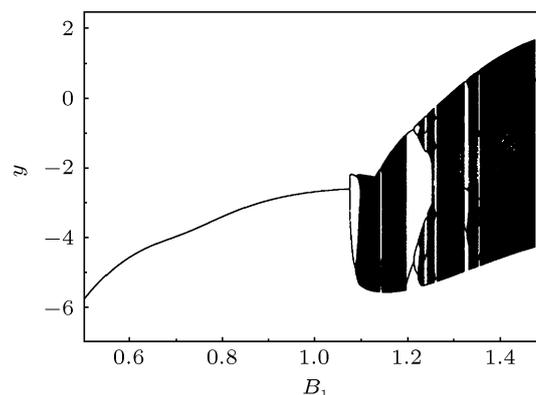


图 4 切换系统的分岔图

### 4.1 点/环切换周期振荡

当  $B_1 < A = 1.0$  时, a 子系统存在稳定的焦点  $EQ_{10}(-C_1/B_1, 0, 0)$ , 而 b 子系统则由于 Hopf 分岔表现为周期振荡, 其振荡频率接近于  $\Omega_2 = 1$ . 图 5 给出了  $B_1 = 0.50$  时切换系统的振荡特性, 其中  $y = \dot{x}, z = \ddot{x}$ , 其轨迹在分别趋于稳定的焦点和稳定的极限环之间来回切换, 表现为点/环切换特性, 其相应的轨迹存在两个不同的切换点  $P_1(-5.81522, 0.17846, -0.20509)$ ,  $P_2(1.4838, 0.10346, -1.54718)$ , 将系统轨迹划分为两部分, 其中  $\widehat{P_1ABP_2}$  为切换系统从切换点  $P_1$  按照 b 子系统的向量场向其相应的极限环逐渐逼近的过程, 轨迹从  $P_1$  到达  $P_2$  点时所需时间刚好等于切换周期  $T$ , 切换开关使得系统轨迹从  $P_2$  点开始按照 a 子系统所定义的向量场运动, 即逐渐收敛于稳定焦点  $EQ_{10}$ , 沿  $\widehat{P_2CDP_1}$  到达  $P_1$ , 所需时间同样等于切换周期  $T$ , 从而完成切换系统的一个完整的周期运动 (参见图 5(a) 和 (b)).

从切换系统的轨迹及其相应的时间历程可以发现, 两切换点的非光滑性存在着明显的差异, 通过计算可知, 在  $P_1$  点切换前后的向量场可以分别表示为  $(0.17846, -0.20509, -0.06576)$ ,  $(0.17846, -0.20509, 0.92663)$ , 而  $P_2$  点切换前后的向量场则表示为  $(0.10346, -1.54718, -0.62388)$ ,  $(0.10346, -1.54718, -0.81438)$ , 显然  $P_1$  点两边向量场的差异度远大于  $P_2$  点, 从而导致其相应的轨迹在两切换点的非光滑显著度不同.

### 4.2 环/环切换周期振荡

当  $B_1 > A = 1.0$  时, a 子系统的平衡

点  $EQ_{10}(-C_1/B_1, 0, 0)$  由 Hopf 分岔失稳, 导致周期振荡, 而  $b$  子系统则保持为周期振荡. 图 6 给出了  $B_1 = 1.05$  时切换系统的振荡特性, 其轨迹在分别趋于两稳定的极限环之间来回切换, 表现为环/环切换特性, 其相应的轨迹同样存在两个不同的切换点  $P_1(-2.62963, -0.76302, -0.25178)$ ,  $P_2(-1.27766, -0.80974, 1.36008)$ , 将系统轨迹划分为两部分, 其中  $\widehat{P_1AP_2}$  为切换系统从切换点  $P_1$  按照  $b$  子系统的向量场向其相应的极限环逐渐逼近的过程, 轨迹从  $P_1$  到达  $P_2$  点时所需时间刚好等于切换周期  $T$ , 切换开关使得系统轨迹从  $P_2$  点开始按照  $a$  子系统所定义的向量场运动, 即逐渐收敛于

围绕  $EQ_{10}$  的极限环, 沿  $\widehat{P_2BP_1}$  到达  $P_1$ , 所需时间同样等于切换周期  $T$ , 从而完成切换系统的一个完整的周期运动 (参见图 6(a) 和 (b)).

由于导致两子系统的极限环的 Hopf 分岔相应的频率均等于 1.0, 因而在切换周期  $T$  内, 轨迹均分别围绕两极限环振荡两周多一点 (参见图 6), 同时分别计算两切换点两边的向量场, 即  $P_1$  为  $(-0.76302, -0.25178, 0.766)$  和  $(-0.76302, -0.25178, -1.91480)$ ,  $P_2$  为  $(-0.80974, 1.36008, 0.34966)$  和  $(-0.80974, 1.36008, -2.2088)$ , 可以发现在轨迹穿越切换点时, 其向量场存在变化, 因而轨迹上的非光滑特性比较明显.

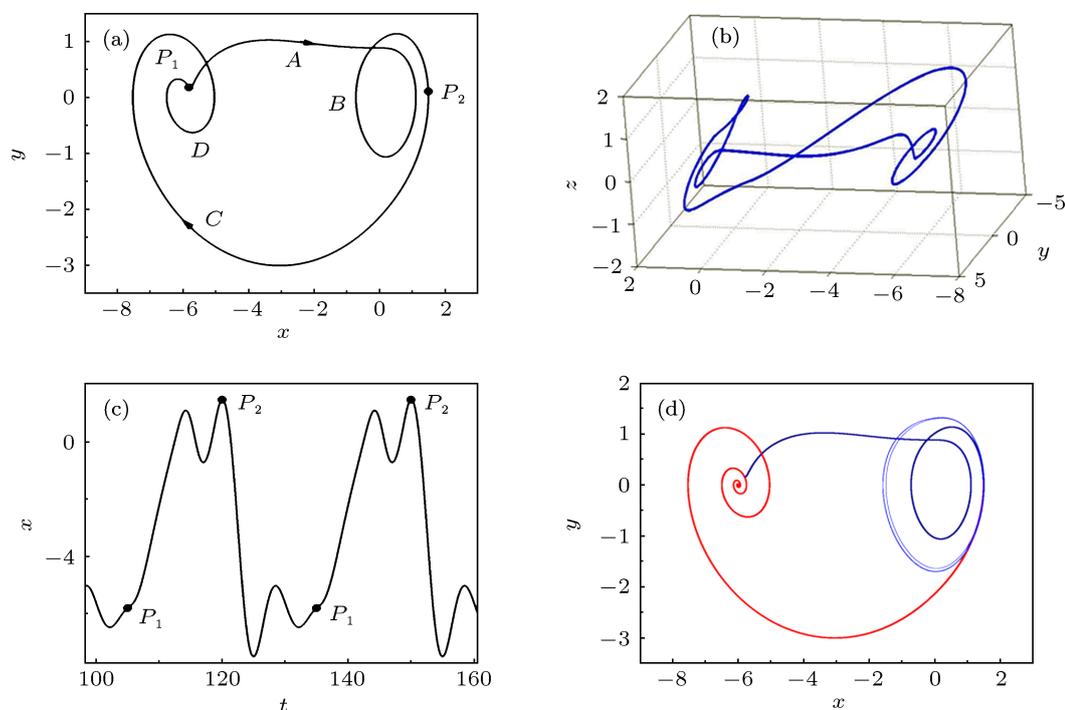


图 5  $B_1 = 0.5$  时周期解 (a) 平面相图; (b) 空间相图; (c) 时间历程; (d) 切换系统与两子系统相图叠加

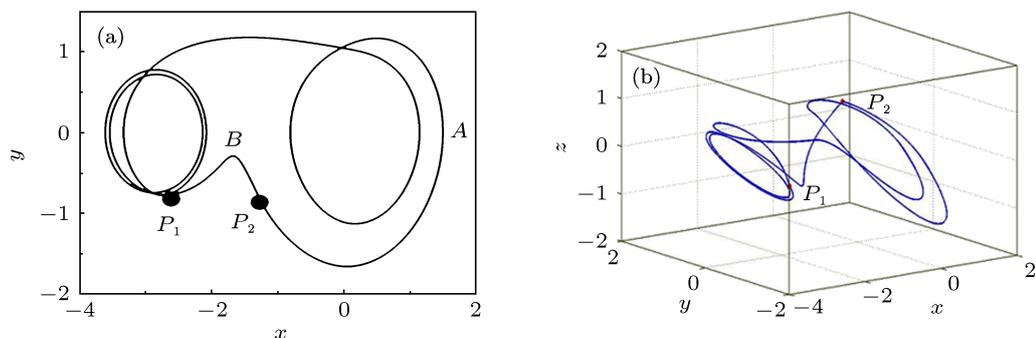


图 6  $B_1 = 1.05$  时周期解 (a) 平面相图; (b) 空间相图

### 4.3 倍周期分岔

随着参数  $B_1$  的增加, 其周期轨道的 Floquet 指数也会发生相应的变化, 当  $B_1 = 1.075$  时在  $-1$  处穿越单位圆, 导致倍周期分岔. 图 7(a) 给出了系统在  $B_1 = 1.083$  时的振荡特性.

此时两子系统均表现为周期振荡, 也即耦合系统在分别趋于两极限环的轨迹之间切换, 因倍周期分岔, 使得切换系统的周期由  $2T$  变为  $4T$ , 从而在其相应的轨迹上存在有四个不同的切换点  $P_1(-4.58991, -0.56783, 1.87265)$ ,  $P_2(-1.40436, 0.2003, 1.21691)$ ,  $P_3(-2.20177, -1.87306, -0.66657)$ ,  $P_4(0.02942, -1.60538, 0.04856)$ , 也就是说, 轨迹从离开某一子系统到返回该子系统时存在两个不同的相点, 其倍周期分岔特性相应地表现为切换点数目的倍化. 随着参数的继续增加, 切换点数目也会成倍的增加 (参见图 7(c)), 从而构成了倍周期分岔序列, 直到进入混沌 (参见图 7(d)).

### 4.4 混沌失稳与倍周期分岔

随着参数  $B_1$  的继续增加, 在  $B_1 = 1.197$  时混沌失稳, 产生周期为  $4T$  周期振荡, 图 8 给出了  $B_1 = 1.20$  时切换系统的振荡特性, 轨道的 Flo-

quet 指数也会发生相应的变化, 当  $B_1 = 1.214$  时在  $-1$  处穿越单位圆, 导致倍周期分岔. 此时两子系统均表现为周期振荡, 系统轨迹在分别趋于两极限环的过程中来回切换, 由于来回单一子系统的轨迹存在两不同的相点, 使得在轨迹上形成四个不同的切换点, 将整个轨迹划分为按照不同向量场变化的四部分, 与图 7 相比, 虽然两周期切换振荡的性质相同, 但两者之间还是存在着一定的差异. 回到两子系统, 显然, 对两者而言,  $b$  子系统的特性是完全相同的, 而随着参数  $B_1$  的变化, 虽然  $a$  子系统均为极限环, 但是由于  $B_1$  的变化, 其相应的振荡幅值不同, 随着  $B_1$  离开  $a$  子系统的 Hopf 点距离的增加, 极限环的幅值也会随之增加, 导致系统轨迹由  $a$  子系统控制的部分的振荡幅值的变化, 从而引起整个切换系统吸引子结构的变化.

随着  $B_1$  的增加, 切换点数目会发生倍变化, 图 9(a) 给出了周期  $8T$  振荡, 不断的倍周期分岔导致切换系统进入混沌振荡 (见图 9(b)).

在  $B_1$  的不断变化过程中, 还会产生各种不同形式的周期窗口, 但是基本上都是由倍周期分岔导致不同振荡特性之间的演化, 也就是说, 至少对于该切换系统, 切换点数目是成倍变化的, 而切换点的数目也就对应着系统的振荡周期.

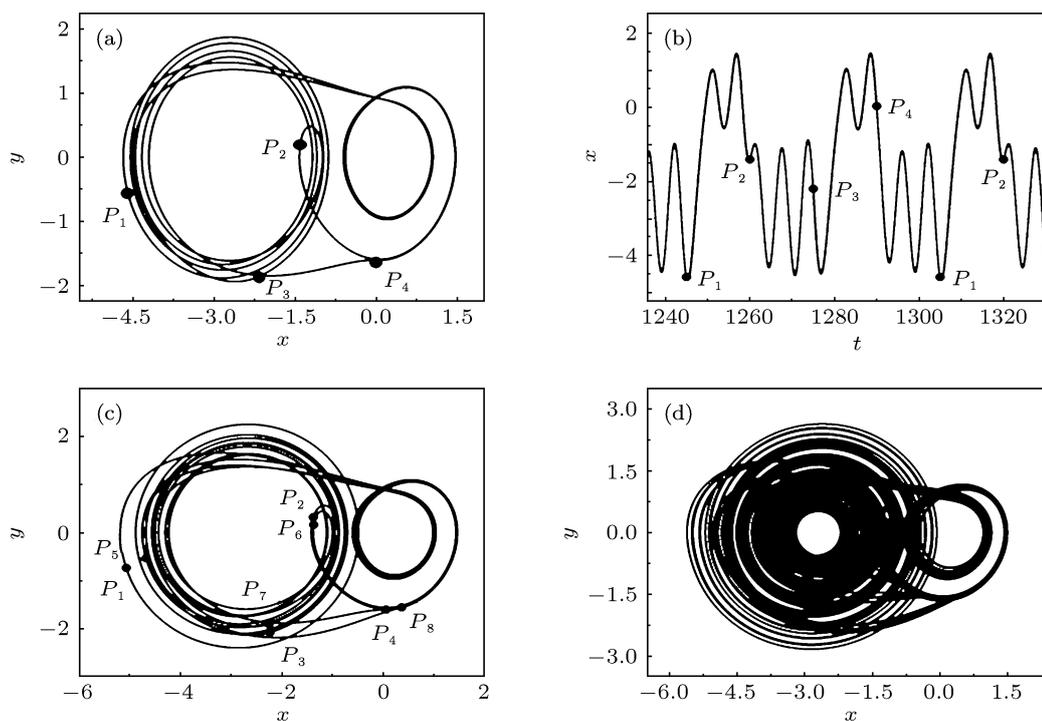


图 7 倍周期分岔到混沌 (a)  $B_1 = 1.083$  时相图; (b)  $B_1 = 1.083$  时时间历程; (c)  $B_1 = 1.09$  时相图; (d)  $B_1 = 1.10$  时相图

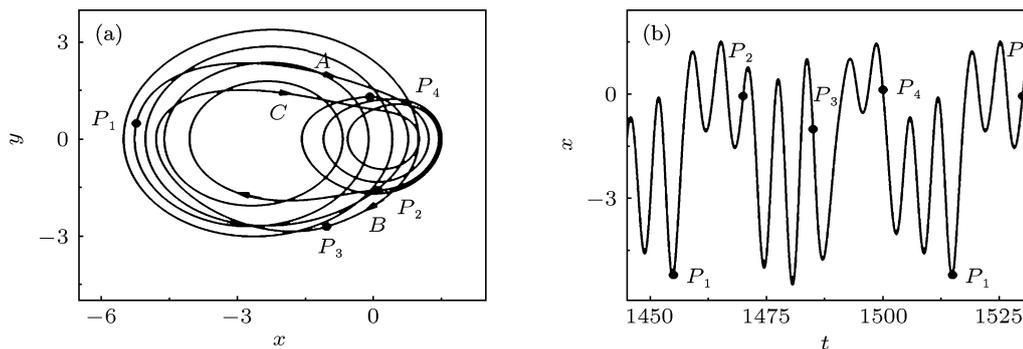


图8  $B_1 = 1.20$  时周期  $4T$  解 (a) 相图; (b) 时间历程

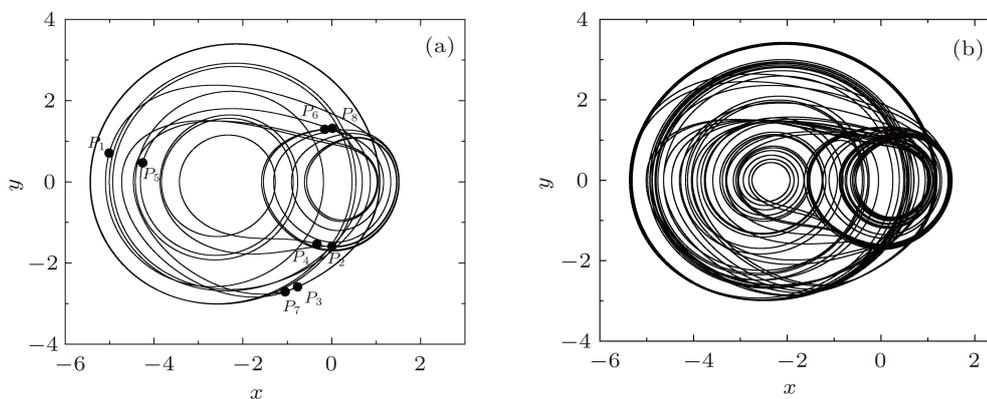


图9 (a)  $B_1 = 1.22$  时周期  $8T$  解; (b)  $B_1 = 1.25$  时混沌解

## 5 结论

两 Jerk 电路系统之间的周期开关切换会导致各种复杂振荡行为, 在不同参数条件下, 子系统存在着不同的平衡态, 使得切换系统产生不同的振荡特性, 当在两子系统稳定的焦点和周期轨道之间切换时, 会产生点/环周期切换振荡, 而在两子系统分别表现为稳定的周期振荡之间切换时, 切

换系统呈现出明显的环/环周期振荡特性, 切换点的数目随参数的变化会产生倍化序列, 从而导致倍周期分岔引起的混沌现象. 切换点会将系统轨迹划分为分别受子系统向量场控制的不同部分, 而切换点的非光滑显著度与其两边向量场变化存在着明显的对应关系, 同时对应相同机理的切换振荡解, 参数对于其吸引子结构也会产生明显的影响.

- [1] Zhusubaliyev Z H, Mosekilde E 2003 *Bifurcation and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems* (Singapore: World Scientific)
- [2] Zhusubaliyev Z H, Mosekilde E 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2237
- [3] Baglietto M, Battistelli G, Scardovi L 2007 *Automatica* **43** 1442
- [4] Cveticanin L, Abd El-Latif G M, El-Naggar A M, Ismail G M 2008 *Journal of Sound and Vibration* **318** 580
- [5] Tousi M M, Karuei I, Hashtrudi-Zad S, Aghdam A G 2008 *Systems, Control Letters* **57** 132
- [6] Santis E D, Benedetto M D D, Pola G 2008 *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* **2** 750
- [7] Santis E D 2011 *Systems, Control Letters* **60** 807
- [8] Xie G M, Wang L 2005 *Journal of Computational and Applied Mathematics* **181** 176
- [9] Wu T Y, Zhang Z D, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 070502 (in Chinese) [吴天一, 张正娣, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 070502]
- [10] Sprott J C 2000 *Phys. Lett. A* **266** 19

# Complicated behaviors as well as the mechanism of the switching circuit\*

Ma Xin-Dong, Bi Qin-Sheng<sup>†</sup>

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 25 June 2012; revised manuscript received 11 June 2012)

## Abstract

Switching electrical circuit with switcher between different types of Jerk systems is established. Based upon the analysis of equilibrium states, stable focus as well as periodic oscillations via Hopf bifurcation can be observed in the two subsystems as parameters varies. Complicated behavior caused by the periodic switcher is investigated in detail, and the point/circle and circle/circle switching periodic oscillations as well as the mechanism are presented. In the different types of switching oscillations, the number of the switching points on the trajectory may increase doubly with the variation of the parameter, which may lead to the cascade of period-doubling bifurcation to chaos. Furthermore, the variation of the parameter may influence the amplitude of the periodic oscillation of the subsystem and therefore the structure of the attractor of the whole switching system.

**Keywords:** switching electrical circuit, period-doubling bifurcation, periodic switching oscillation, chaos

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Pq

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 20976075, 10972091).

<sup>†</sup> E-mail: qbi@ujs.edu.cn