

二次等效法求三层媒质中静态电偶极子的场分布*

陈聪[†] 李定国 蒋治国 刘华波

(海军工程大学理学院, 武汉 430033)

(2012年3月5日收到; 2012年6月16日收到修改稿)

在唯一性原理的基础上, 提出采用二次等效的方法, 求解三层平行媒质模型下, 位于中间层的静态水平电偶极子在其他层媒质中产生的电场分布的解析表达式. 也就是先经过一次等效求出场源同层时的场分布, 然后利用二次等效将三层模型等效为两层模型, 进而利用镜像法求出场分布. 所得标量电位分布的表达式被证明是满足边界条件的, 由此说明推导结果的有效性. 并在实验室中模拟空气-海水-海床三层模型, 对位于海水中的静态水平电偶极子在海水和海床中的标量电位进行了实测, 并利用实验参数进行了仿真分析. 实测结果和仿真分析相符合, 表明推导结果的正确性. 研究所得场分布表达式为以静态电偶极子为基本模拟体的电场分布的数学模拟、场分布特征分析等应用奠定了理论基础.

关键词: 二次等效, 三层模型, 静态电偶极子, 镜像法

PACS: 41.20.Cv, 02.90.+p, 93.85.Bc

1 引言

电偶极子是电场目标特性的基本模拟单元, 在水中目标探测、地球物理勘探、水下通信等方面应用十分广泛^[1-4]. 出于对水中目标电场特性进行数学模型构建、特征预报、模型参数反演等应用需要^[5-8], 部分研究者十分关注平行分层导电媒质中静态电偶极子的电场分布规律. 在这些实际应用中, 场域被视为“绝缘媒质-导体媒质 1-导体媒质 2”的三层平行媒质模型, 而且为了便于特征预报或模型参数反演算法的实现, 研究者往往希望能获得各层媒质中场分布的解析表达式.

平行分层导电媒质中电偶极子的静态电场分布的求解思路目前可见两种, 一是利用标量电位或矢量磁位的概念结合边界条件求解麦克斯韦方程. 由于场域分层, 且含导体, 复杂的电磁特性使得基于麦克斯韦方程的边值问题的求解相对困难, 所得表达式形式也比较复杂. 如采用三层平行媒质模型时, 静态场的矢量磁位表达式中仍然含有 Bessel 函

数积分, 只能根据场域电磁特性进行近似计算或数值求解^[9-11]. 另一思路是从静态场的特性出发, 根据唯一性原理, 在边界条件的限制下, 用镜像法来求解. 该方法用于求解三层媒质模型中, 源点和场点同时位于中间层媒质时的场分布过程简单, 物理图像清晰. 如文献 [12] 利用镜像法求解了空气-海水-海床三层模型中位于海水中的静态电偶极子在海床区域中产生的场分布. 其主要方法是将界面的影响用场源通过两个界面的往返镜像来等效, 从而得到了三层模型中, 源点和场点同时位于中间层时场分布的无穷级数表达式. 但当源位于中间层而场点位于其他层媒质、也就是场源异层时, 由于界面的影响不能直接用源的往返镜像来等效, 使得场分布解析表达式的获得仍是个难题.

本文在前面研究的基础上, 提出采用二次等效的方法对此问题进行求解, 所得结果被证明满足边界条件, 并在实验室中设计分层媒质环境及静态偶极子源, 对电偶极子产生的标量电位分布进行实测, 同时进行仿真分析, 以证明推导过程及结论的正确性.

* 国家自然科学基金青年基金(批准号: 51109215) 和国防预研究基金(批准号: 51444070105JB11) 资助的课题.

[†] E-mail: cckx7145@sohu.com

2 二次等效方法

如图 1 所示为本文所研究的三层媒质模型, 相应的电容率和电导率为 (ϵ_i, σ_i) , $i = 1, 2, 3$, 分别用下标 1, 2, 3 来表示第 1, 2, 3 层媒质, 其中第 1 层媒质设为绝缘媒质 $\sigma_1 = 0$. 中间层媒质厚度为 D , 第 1, 3 层媒质厚度无限大. 建立如图所示坐标. 本文着重推导场源异层时的电场分布, 为举例说明方法, 可取源位于第 2 层媒质中而场点位于第 3 层媒质中, 其他场源异层的情况可类似处理. 以位于第 2 层媒质中 (x_0, y_0, z_0) 处、电偶极矩为 $I_x d\mathbf{l}\mathbf{i}$ 的水平电偶极子为例进行推导, 垂直电偶极子的场分布推导与此方法同.

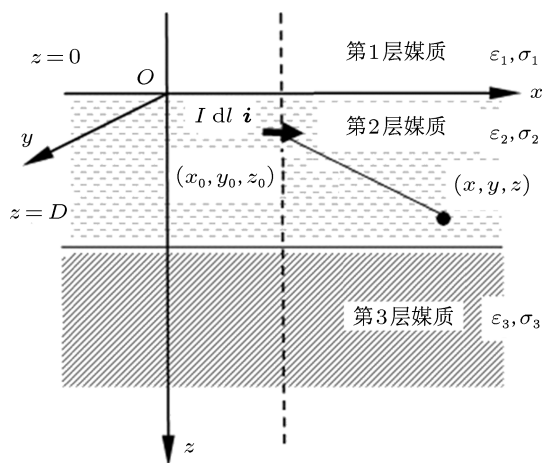


图 1 三层媒质模型

2.1 一次等效

首先进行一次等效. 如图 1 所示, 假想场点与源点同层, 均位于第 2 层媒质中. 此时静态电偶极子在导电媒质中形成稳定的电流场, 并在绝缘媒质中产生稳定的电场分布, 因此在 $z = 0$ 和 $z = D$ 两个分界面两边, 标量电位和电流密度应满足相应的边界条件, 即:

- 1) 分界面两边标量电位连续;
- 2) 分界面两边电流密度的法向分量连续.

$$\text{设 } \eta = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 + \sigma_3}, \xi = \frac{2\sigma_3}{\sigma_2 + \sigma_3}.$$

此时界面的影响可用场源通过界面的镜像来等效. 文献 [12] 已推出, 当场点、源点均位于第 2 层媒质中时, 若只存在本文所述的 $z = 0$ 界面 (导体-绝缘体), 则像 $I_x d\mathbf{l}\mathbf{i}$ 位于源关于 $z = 0$ 界面的镜像处; 若只存在本文所述的 $z = D$ 界面 (导体-导体) 时, 则像 $\eta I_x d\mathbf{l}\mathbf{i}$ 位于源关于 $z = D$ 界面的镜像

处. 当两个界面都存在时, 则两个界面的影响可以用源通过两个界面的往返镜像来等效, 如图 2(a) 所示, 这个过程本文称之为一次等效. 位于中间层媒质中一个水平电偶极子在同层的场点处产生的场可以用无穷多个镜像电偶极子 (本文称之为一次等效偶极子) 在无限大的中间层媒质中各自独立、分别产生的场的叠加来替代. 一次等效偶极子可根据其位置和偶极矩的特点分为下述四组:

第 1 组: 位于 $(x_0, y_0, 2kD - z_0)$ 处, 电偶极矩为 $\eta^k I_x d\mathbf{l}\mathbf{i}$, $k = 1, 2, \dots$, 场点相对于该组电偶极子的位置矢量为 \mathbf{r}_{1k} ;

第 2 组: 位于 $(x_0, y_0, 2kD + z_0)$ 处, 电偶极矩为 $\eta^k I_x d\mathbf{l}\mathbf{i}$, $k = 1, 2, \dots$, 场点相对于该组电偶极子的位置矢量为 \mathbf{r}_{2k} ;

第 3 组: 位于 $(x_0, y_0, -2mD + z_0)$ 处, 电偶极矩为 $\eta^m I_x d\mathbf{l}\mathbf{i}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, 场点相对于该组电偶极子的位置矢量为 \mathbf{r}_{1m} ;

第 4 组: 位于 $(x_0, y_0, -2mD - z_0)$ 处, 电偶极矩为 $\eta^m I_x d\mathbf{l}\mathbf{i}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, 场点相对于该组电偶极子的位置矢量为 \mathbf{r}_{2m} .

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1k} &= (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - 2kD + z_0)\mathbf{k}; \\ \mathbf{r}_{2k} &= (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - 2kD - z_0)\mathbf{k}; \\ \mathbf{r}_{1m} &= (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z + 2mD - z_0)\mathbf{k}; \\ \mathbf{r}_{2m} &= (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z + 2mD + z_0)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

据此, 则和源同位于中间层的场点 (x, y, z) 处的标量电位可计算为

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\eta^k I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{1k}^3} + \frac{\eta^k I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{2k}^3} \right] \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{1m}^3} + \frac{\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{2m}^3} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

式中 标量电位的下标 2 表示场点位于第 2 层媒质中.

2.2 二次等效

由 2.1 中关于源的镜像的相关分析可知, 三层模型中, 位于第 2 层的一个水平电偶极子在同层场点产生的场与两层媒质中 (由第 2 层媒质和第 3 层

媒质构成、且分界面位于 $z = D$ 处) 下述两组水平电偶极子在同一场点产生的场分布是相同的, 如图 2(b) 所示.

1) 位于 $(x_0, y_0, -2mD + z_0)$ 处, 电偶极矩为 $\eta^m I_x dl \mathbf{i}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, 场点相对于该组电偶极子的位置矢量为 \mathbf{r}_{1m} ;

2) 位于 $(x_0, y_0, -2mD - z_0)$ 处, 电偶极矩为 $\eta^m I_x dl \mathbf{i}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, 场点相对于该组电偶极子的位置矢量为 \mathbf{r}_{2m} .

其中 $\mathbf{r}_{1m}, \mathbf{r}_{2m}$ 表达式同前.

也就是说, 为求出三层模型中位于第 2 层的一个水平电偶极子在同层场点产生的场, 可将三层媒质等效为由第 2 层媒质和第 3 层媒质构成的两层

媒质, 且分界面位于 $z = D$ 处; 空间中的源等效为位于半无限大第 2 层媒质中的两组电偶极子. 显然这种等效有效地解决了 $z = 0$ 分界面的影响, 三层模型退变成两层模型, 这个过程可称之为二次等效. 上述两组电偶极子称为二次等效偶极子.

特别注意到, 上述二次等效并未改变第三层媒质空间中的源分布, 此时若 $z = D$ 界面上边界条件仍是满足的, 则由唯一性原理可知: 此时位于第 2 层的一个水平电偶极子在第 3 层场点产生的场, 可等同于仅存在 $z = D$ 分界面时, 上述这两组二次等效偶极子在第 3 层媒质中产生的场. 继续实施镜像法, 将 $z = D$ 界面的影响用镜像偶极子来替代, 即可求出待求场分布.

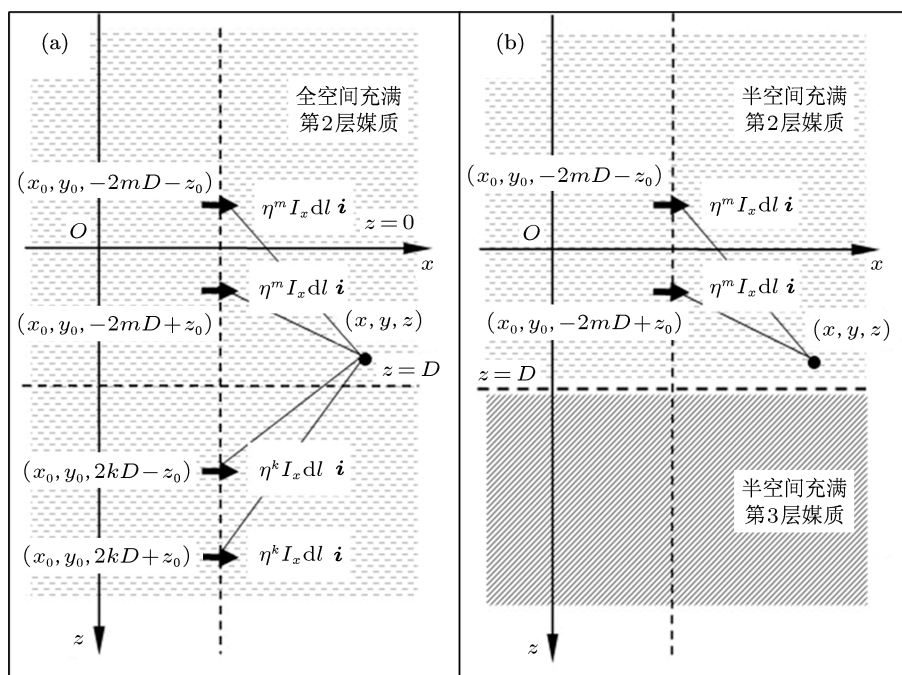


图 2 二次等效方法说明 (a) 一次等效; (b) 二次等效

显然, 上述这种用二次等效的方法求解场源异层时场分布的思路是否正确, 最终还是取决于边界条件是否满足. 在没有求出第 1, 第 3 层媒质中的场分布的情况下, 是无法验证边界条件的, 因此下面将先采取二次等效的办法分别求出第 1, 第 3 层媒质中的场分布, 再验证边界条件. 若在三层媒质的两个边界上边界条件均满足, 则说明推导的场分布表达式是正确的, 也就说明所提出的二次等效的处理方法是可行的.

3 场源异层时的场分布及解的有效性分析

在二次等效模型的基础上, 继续实施镜像法. 当只存在本文所述的 $z = D$ 界面时, 若水平电偶极子源点、场点分别位于第 2, 第 3 层媒质中, 则像和源位于同一位置, 两者合起来相当于电偶极子 $\xi I_x dl \mathbf{i}$, 因此此时第 3 层媒质中的场相当于图 3 所示的所有电偶极子在充满第 3 层媒质的无限大

空间中产生的场的叠加.

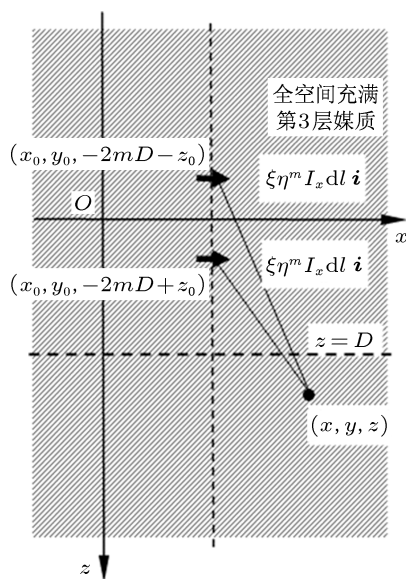


图3 镜像法应用

则场点处的标量电位为图3中所有电偶极子产生的标量电位的和:

$$\Phi_3(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\xi \eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_3 r_{1m}^3} + \frac{\xi \eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_3 r_{2m}^3} \right], \quad (2)$$

式中标量电位的下标3表示场点位于第三层媒质中. 利用标量电位的负梯度, 可分别求出相应的电场强度矢量.

利用同样的思路可求出当源位于第2层媒质而场点位于第1层媒质中的场分布, 此时三层媒质等效为由第1和第2层媒质构成的两层媒质, 且分界面位于 $z = 0$ 处, 二次等效偶极子位于半无限大第2层媒质中, 可描述为下述两组:

第1组: 位于 $(x_0, y_0, 2kD - z_0)$ 处, 电偶极矩为 $\eta^k I_x dl \mathbf{i}$, $k = 1, 2, \dots$, 场点相对于该组电偶极子的位置矢量为 \mathbf{r}_{1k} ;

第2组: 位于 $(x_0, y_0, 2kD + z_0)$ 处, 电偶极矩为 $\eta^k I_x dl \mathbf{i}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 场点相对于该组电偶极子的位置矢量为 \mathbf{r}_{2k} , 注意此时 k 的范围;

其中 $\mathbf{r}_{1k}, \mathbf{r}_{2k}$ 表达式同前.

$z = D$ 界面的影响用二次等效偶极子来替代了. 继续对 $z = 0$ 分界面实施镜像法, 即可求出第1

层媒质中的标量电位为

$$\Phi_1(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^k I_x dl(x - x_0)}{2\pi\sigma_2 r_{1k}^3} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^k I_x dl(x - x_0)}{2\pi\sigma_2 r_{2k}^3}. \quad (3)$$

下面对解的有效性进行分析.

首先由 $\eta, \mathbf{r}_{1m}, \mathbf{r}_{2m}, \mathbf{r}_{1k}, \mathbf{r}_{2k}$ 等量的性质易见上述表达式对任意均匀媒质均是收敛的.

其次, 将第2, 3层媒质中的标量电位分布表达式(1), (2)代入边界条件进行验算.

1) 在 $z = D$ 分界面上标量电位的连续性.

首先将 ξ 变形为 $\xi = \frac{\sigma_3(1 + \eta)}{\sigma_2}$, 则 $\Phi_3(x, y, z)$ 可以改写为

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(1 + \eta)\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{1m}^3} + \frac{(1 + \eta)\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{2m}^3} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{1m}^3} + \frac{\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{2m}^3} \right] \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\eta^{m+1} I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{1m}^3} + \frac{\eta^{m+1} I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{2m}^3} \right]. \end{aligned}$$

当 $z \rightarrow D^+$ 时,

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y, z)|_{z \rightarrow D^+} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{1mD}^3} + \frac{\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{2mD}^3} \right] \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\eta^{m+1} I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{1mD}^3} + \frac{\eta^{m+1} I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{2mD}^3} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{1mD}^3} + \frac{\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{2mD}^3} \right] \\ &\quad + \sum_{q=1}^{\infty} \left[\frac{\eta^q I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{1qD}^3} + \frac{\eta^q I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{2qD}^3} \right]. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1mD} &= (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + [(1 + 2m)D - z_0]\mathbf{k}; \\ \mathbf{r}_{2mD} &= (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + [(1 + 2m)D + z_0]\mathbf{k}; \\ \mathbf{r}_{1qD} &= (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + [(2q - 1)D - z_0]\mathbf{k}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_{2qD} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + [(2q - 1)D + z_0]\mathbf{k}.$$

又当 $z \rightarrow D^-$ 时,

$$\begin{aligned} & \Phi_2(x, y, z) \Big|_{z \rightarrow D^-} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\eta^k I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{1kD}^3} + \frac{\eta^k I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{2kD}^3} \right] \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{1mD}^3} + \frac{\eta^m I_x dl(x - x_0)}{4\pi\sigma_2 r_{2mD}^3} \right], \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{r}_{1kD} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + [(1 - 2k)D + z_0]\mathbf{k};$$

$$\mathbf{r}_{2kD} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + [(1 - 2k)D - z_0]\mathbf{k};$$

$\mathbf{r}_{1mD}, \mathbf{r}_{2mD}$ 同前. 显然

$$\begin{aligned} r_{1kD} &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + [(1 - 2k)D + z_0]^2} \\ &= r_{1qD}, k, q = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{2kD} &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + [(1 - 2k)D - z_0]^2} \\ &= r_{2qD}, k, q = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

因此有 $\Phi_3 \Big|_{z \rightarrow D^+} = \Phi_2 \Big|_{z \rightarrow D^-}$, 也就是在 $z = D$ 分界面上标量电位是连续的.

2) 在 $z = D$ 分界面上电流密度的法向分量的连续性:

$$\begin{aligned} j_{3z} \Big|_{z \rightarrow D^+} &= \sigma_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow D^+} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{3\xi\eta^m I_x dl(x - x_0)[(1 + 2m)D - z_0]}{4\pi r_{1mD}^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\xi\eta^m I_x dl(x - x_0)[(1 + 2m)D + z_0]}{4\pi r_{2mD}^5} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{3\eta^m I_x dl(x - x_0)[(1 + 2m)D - z_0]}{4\pi r_{1mD}^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\eta^m I_x dl(x - x_0)[(1 + 2m)D + z_0]}{4\pi r_{2mD}^5} \right] \\ &+ \sum_{q=1}^{\infty} \left[\frac{3\eta^q I_x dl(x - x_0)[(2q - 1)D - z_0]}{4\pi r_{1qD}^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\eta^q I_x dl(x - x_0)[(2q - 1)D + z_0]}{4\pi r_{2qD}^5} \right], \\ j_{2z} \Big|_{z \rightarrow D^-} &= \sigma_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow D^-} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{3\eta^k I_x dl[(1 - 2k)D + z_0](x - x_0)}{4\pi r_{1kD}^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\eta^k I_x dl[(1 - 2k)D - z_0](x - x_0)}{4\pi r_{2kD}^5} \right] \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{3\eta^m I_x dl[(1 + 2m)D - z_0](x - x_0)}{4\pi r_{1mD}^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\eta^m I_x dl[(1 + 2m)D + z_0](x - x_0)}{4\pi r_{2mD}^5} \right]. \end{aligned}$$

同 1) 中分析, 显然有 $j_{3z} \Big|_{z \rightarrow D^+} = j_{2z} \Big|_{z \rightarrow D^-}$.

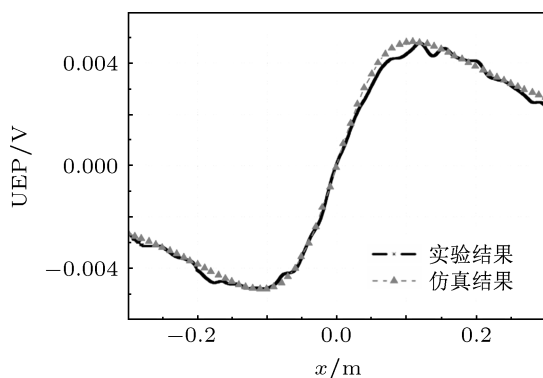
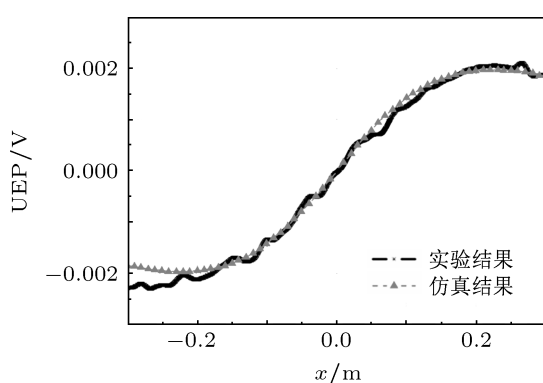
利用本文推导的第 1, 2 层媒质中的标量电位分布表达式 (3) 式和 (1) 式, 采用上述同样方法, 可以验证对 $z = 0$ 分界面, 边界条件也是满足的. 因此由唯一性原理, 上述场源异层时的标量电位分布表达式是有效的. 本文下面还将继续给出实验验证.

4 实验验证及仿真分析

为验证上述推导结论的正确性, 在实验室中模拟分层海洋环境及静态电偶极子源, 分别测量了源位于第 2 层媒质 (海水) 中时, 场点分别在第 2 层 (海水) 和第 3 层 (海床) 中的标量电位分布, 并进一步进行了仿真分析.

实验中, 特制水池尺寸为 $1.500 \text{ m} \times 0.800 \text{ m} \times 0.600 \text{ m}$, 模拟海水深度 0.300 m , 用 0.200 m 厚的沙层模拟海床, 因此模拟海洋环境可视为空气-海水-沙质海床三层模型. 测得模拟海水和模拟海床的电导率分别为 $\sigma_2 = 0.107 \text{ S/m}$, $\sigma_3 = 0.035 \text{ S/m}$. 将两段铂铌丝平行固定, 用来模拟电偶极子, 间距为 0.010 m , 与海水接触的导电长度为 0.002 m , 位于水深 0.050 m 处, 通以恒定直流 $I = 0.0225 \text{ A}$. 建立如图 1 所示的坐标系, 模拟偶极子源的坐标为 $(0, 0, 0.050)$, 用 Ag-AgCl 电极对分别测量了 $y = -0.090 \text{ m}$ 时, 深度 (z) 为 0.150 m (海水中) 和 0.340 m (海床中) 时标量电位随 x ($-0.300 \text{ m} - 0.300 \text{ m}$) 的分布, 实验结果分别如图 4 和图 5 所示.

根据前述各实验参数, 利用 (1), (2) 式进行仿真分析. 用 Matlab 编程, 在计算过程中, 对无穷级次的求和, 采取相邻前后项相减, 若差的绝对值小于 10^{-12} 时, 停止求和. 为方便对比, 计算结果也分别显示在图 4 和图 5 中.

图4 $z = 0.15$ m 深度处标量电位分布图5 $z = 0.34$ m 深度处标量电位分布

分别对比图4和图5中对应深度的标量电位分布曲线,充分考虑实验测量的误差,从幅值、分

布特征、最大值位置等多个特征来看,根据本文推导结果所做的仿真计算结果和实验结果都非常符合,在前述被证明满足边界条件的基础上,进一步说明了本文推导结果的正确性.

5 结论

为求解三层平行媒质模型中,位于中间层的静态电偶极子源在异层场点产生的场分布的解析表达式,以便于实际应用,本文提出采用二次等效的办法进行求解,方法是:

- 1) 首先进行一次等效,求出场点、源点都位于中间层时的场分布,并找出一等效偶极子分布;
- 2) 再用二次等效的方法将三层媒质等效成两层媒质,并找出二次等效偶极子分布;
- 3) 利用镜像法求出异层场点的场分布,并分析其收敛性并证明是否满足边界条件.

二次等效方法实质上是镜像法在多层导电媒质中解决场点、源点位置异层问题时的灵活应用,因此在所得场分布满足边界条件时,根据唯一性原理,所得结果是正确的.尽管解决过程稍嫌曲折,但由于所得结果为无穷项求和,且表达式对于任意均匀媒质均收敛,因此更易于实际应用,如进行场分布特征的预报、深度换算、场源参数的反演等等.

- [1] Zhang H Q, Pan W Y 2001 *Chin. J. Radio Sci.* **16** 5 (in Chinese) [张红旗,潘威炎 2001 电波科学学报 **16** 5]
- [2] Mao Y, Mao X J, Chen S Y, Wang B, Zhou G Q 2003 *J. Seismological Research* **26** 343 (in Chinese) [毛燕,毛先进,陈顺云,王彬,周光全 2003 地震研究 **26** 343]
- [3] Li K, Park S O 2003 *J. Electromagn. Waves and Appl.* **17** 1399
- [4] Xiao C Y, Lei Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1950 (in Chinese) [肖春燕,雷银照 2005 物理学报 **54** 1950]
- [5] Ditchfield R W, Mcgrath J N, Tighe-Ford D J 1995 *J. Appl. Elec.* **25** 54
- [6] Adey R, Baynham J M W 2007 *Simulation of Electrochemical Processes II. Engineering Sciences* **54** 213
- [7] Rawlins P G, Ganderton C P 2002 *Conf. Proc. UDT Europe La Spezia, Italy*, 2002 p1
- [8] Demilier L, Durand C, Rannou C 2007 *Simulation of Electro-Chemical Processes II. Engineering Sciences* **54** 235
- [9] King R W P 1993 *J. Appl. Phys.* **74** 4845
- [10] King R W P 1994 *Radio Science* **29** 97
- [11] Li S D 2002 *Ph. D. Dissertation* (Wuhan: Navy university of engineering) (in Chinese) [刘胜道 2002 博士学位论文(武汉:海军工程大学)]
- [12] Chen C, Li D G, Gong S G 2010 *J. Wuhan Univ. Tech. (T&E)* **34** 716 (in Chinese) [陈聪,李定国,龚沈光 2010 武汉理工大学学报(交通科学与工程版) **37** 716]

Electric field of a static electric dipole in three-layer medium model using secondary equivalent method*

Chen Cong[†] Li Ding-Guo Jiang Zhi-Guo Liu Hua-Bo

(College of Sciences, Navy University of engineering, Wuhan 430033, China)

(Received 5 March 2012; revised manuscript received 16 June 2012)

Abstract

In three-layer-parallel-medium mode, the method of secondary equivalent is proposed to derive the analytic expression of the electric field produced by a static electric dipole based on the uniqueness theorem when the source point is located in the middle layer but the field point is located in other layer. That is, the distribution of the electric field is solved when the source point and the field point are located in the same medium using the first equivalent method. Then the three-layer model is equivalent to two-layer model using the second equivalent method. Finally, the mirror image theory is used to obtain the field distribution. The expression of the scalar electric potential is proved to satisfy the boundary conditions, so the derivation results are proved to be effective. In order to prove the correctness of the expression of the scalar electric potential, a three-layer-parallel-medium mode, that is air-seawater-seabed, is simulated in laboratory, and the scalar electric potentials in the space of seawater and in the space of seabed are measured respectively. Some theoretical analyses are performed and the results of the analyses are in accordance with the experimental measurements, so the correctness of the solution is validated. The research results provide a theoretical base for the actual application such as modeling and characteristic analysis of electric field whose basic simulator is the static electric dipole.

Keywords: secondary equivalent method, three-layer-parallel-medium mode, static electric dipole, mirror image method

PACS: 41.20.Cv, 02.90.+p, 93.85.Bc

* Project supported by the Young Scientists Fund of National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51109215), and the National Defense Pre-Research Foundation of China (Grant No. 51444070105JB11).

[†] E-mail: cckx7145@sohu.com